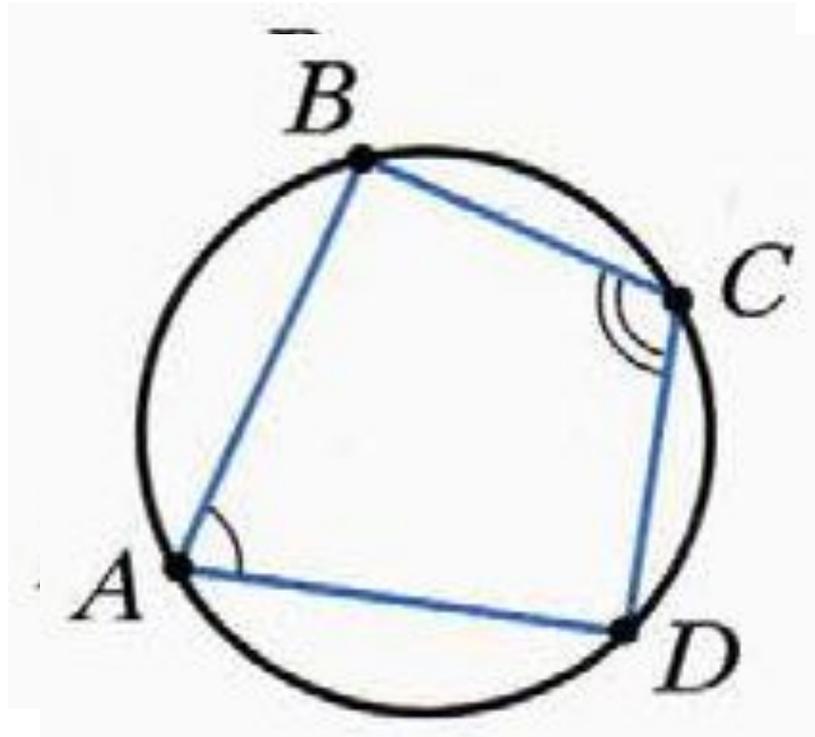


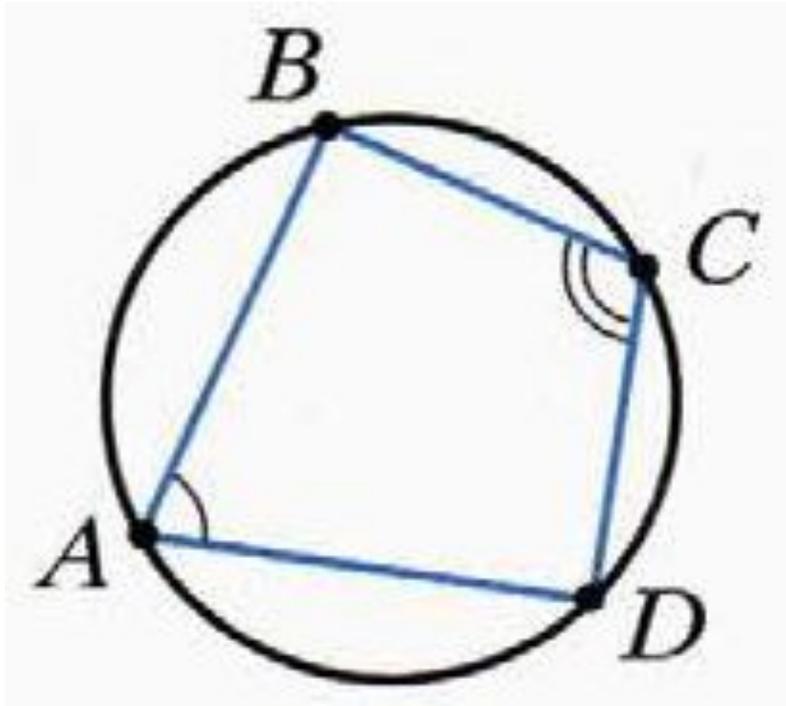
§10. Вписанная и описанная окружности четырехугольника

Решение задач

Окружность называют описанной около четырехугольника, если она проходит через все его вершины



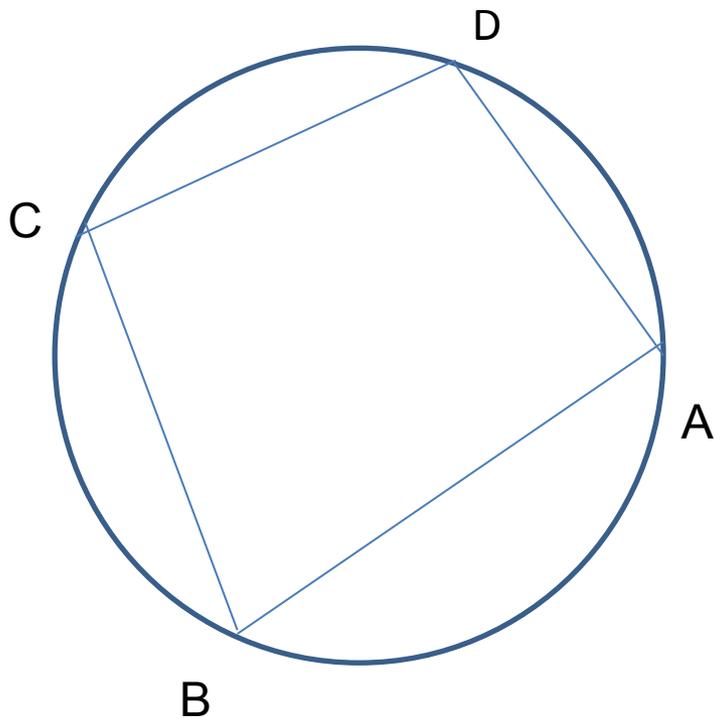
Теорема 10.1. Если четырехугольник
является вписанным в четырехугольник,
то сумма его противолежащих углов равна
 180° .



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

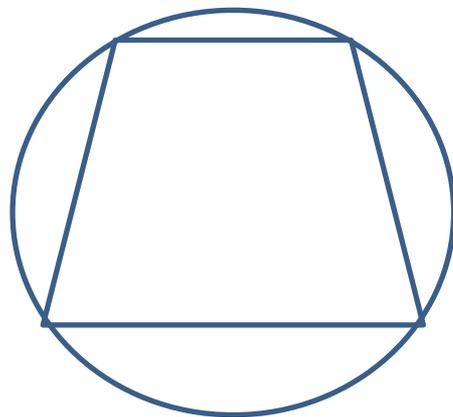
Теорема 10.2. Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.



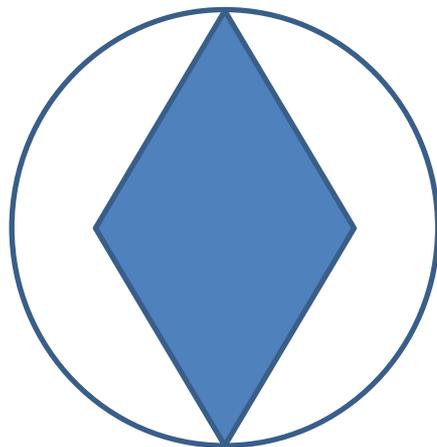
$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Около равнобедренной трапеции можно описать окружность

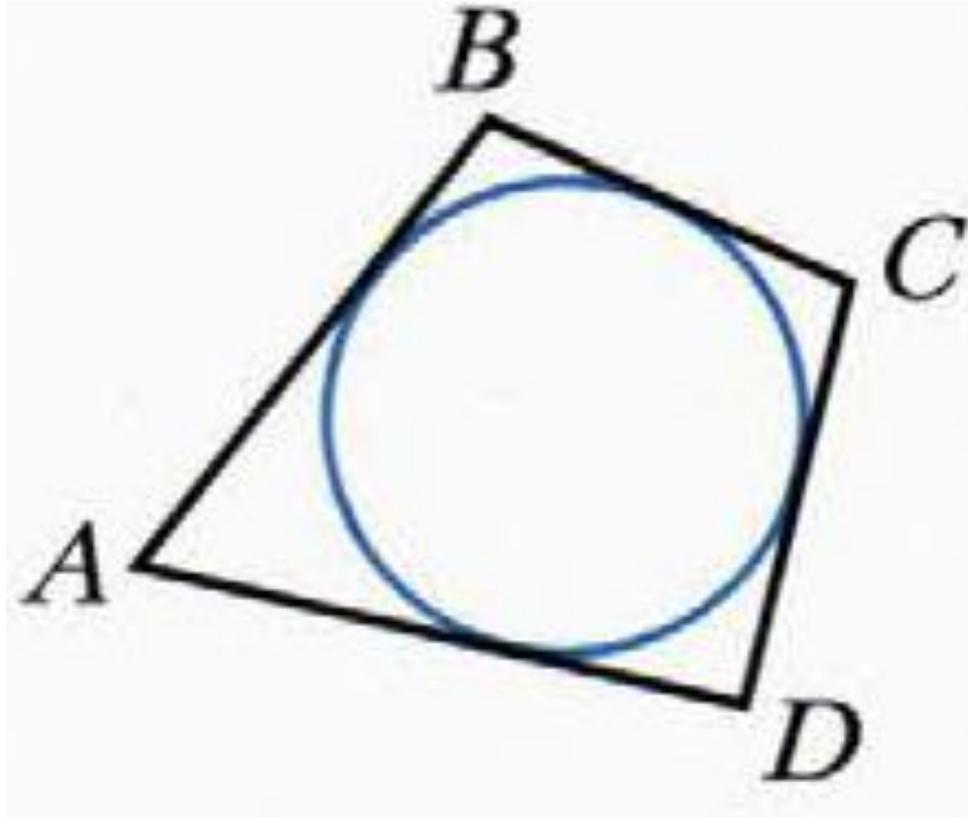


Около ромба нельзя описать окружность

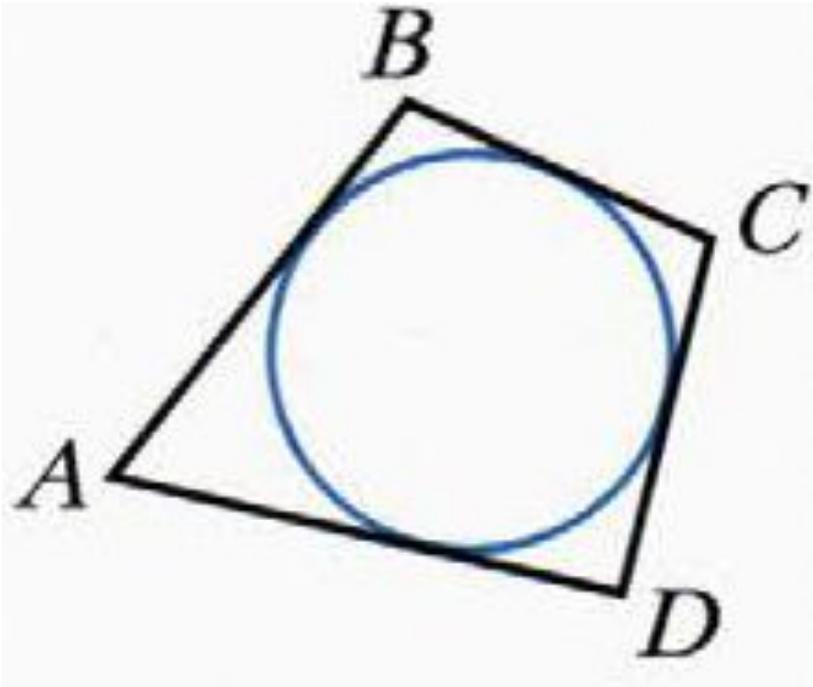


Центр описанной около
четырёхугольника окружности-
точка пересечения
серединных перпендикуляров

Окружность называют вписанной в четырехугольник, если она касается всех его сторон



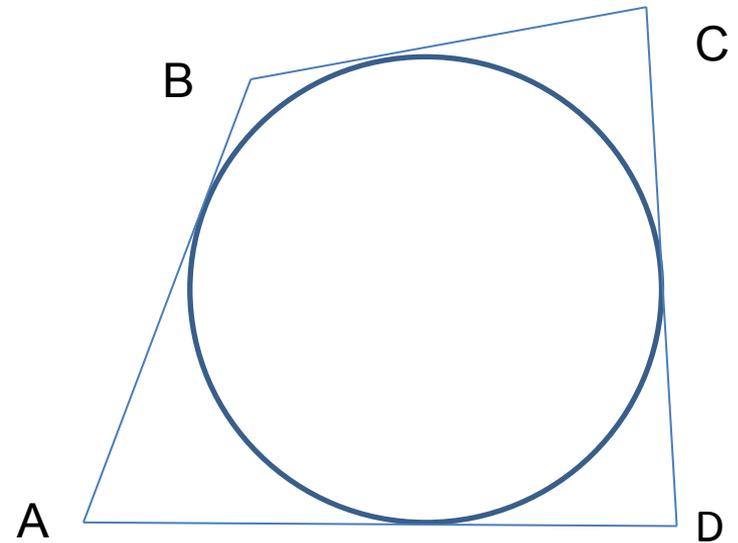
Теорема 10.3. Если четырехугольник является описанным около четырехугольника, то суммы его противоположных сторон равны.



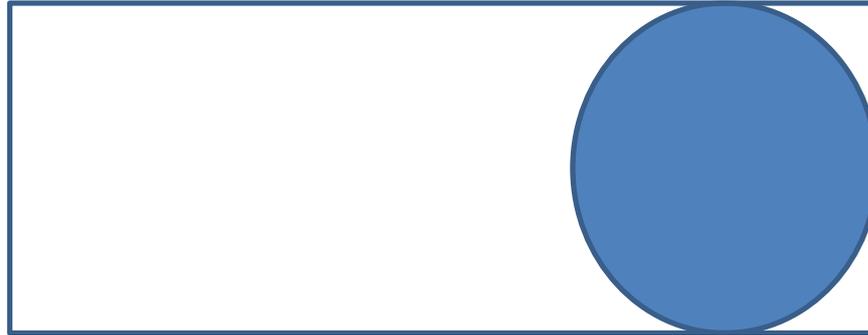
$$AB + CD = BC + AD.$$

Теорема 10.4. Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

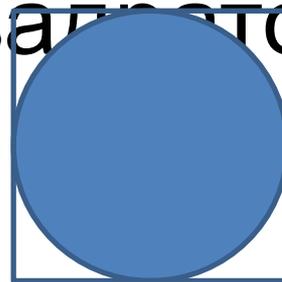
$$AB + CD = BC + AD.$$



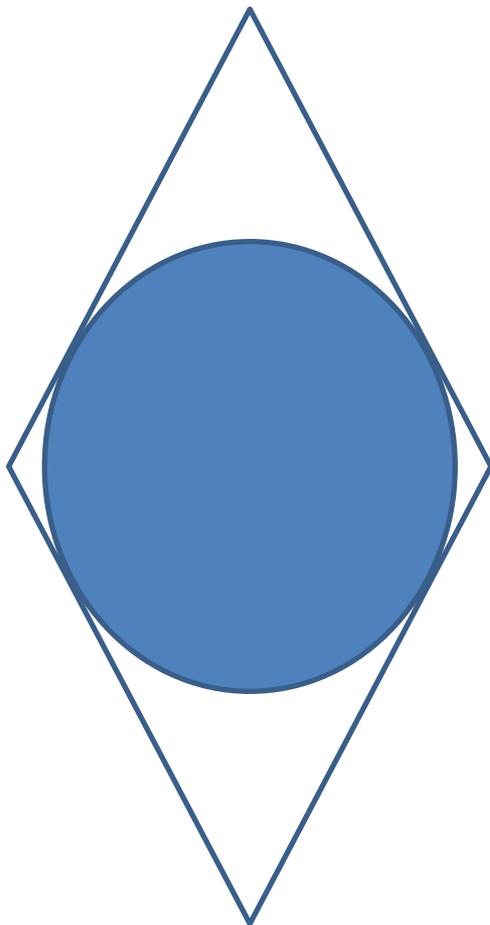
В прямоугольник нельзя вписать
окружность



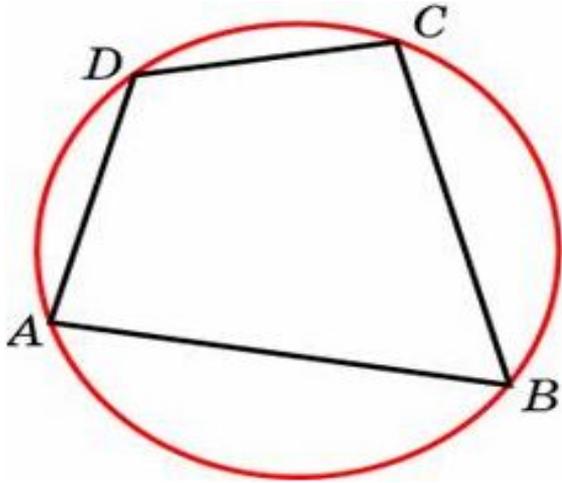
Если в прямоугольник вписана
окружность, то он является
квадратом.



В ромб можно вписать окружность



1) Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов.



Дано: окружность описана около четырехугольника ABCD.

$$\angle A = 82, \angle B = 58^\circ$$

Найти $\angle C, \angle D$

Решение:

$$\angle A + \angle C = \angle D + \angle B = 180^\circ \text{ по теореме}$$

$$\overset{10.1}{\angle C} = 180 - 82 = 98^\circ$$

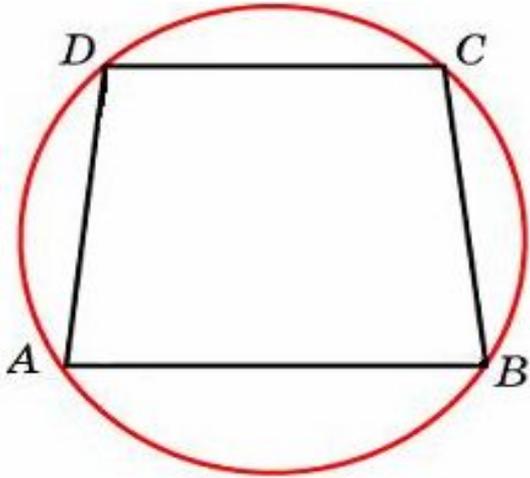
$$\angle D = 180 - 58 = 122^\circ$$

Это не
противолежащие углы,
т.к. в описанном
четырехугольнике их
сумма равнялась бы 180
градусов.

Ответ:

122°

2) Один из углов трапеции, вписанной в окружность, равен 42° . Найдите остальные углы трапеции.



Дано: окружность описана около трапеции ABCD, $\angle A = 42^\circ$

Найти: $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$

Решение:

Окружность можно описать только около равнобедренной трапеции

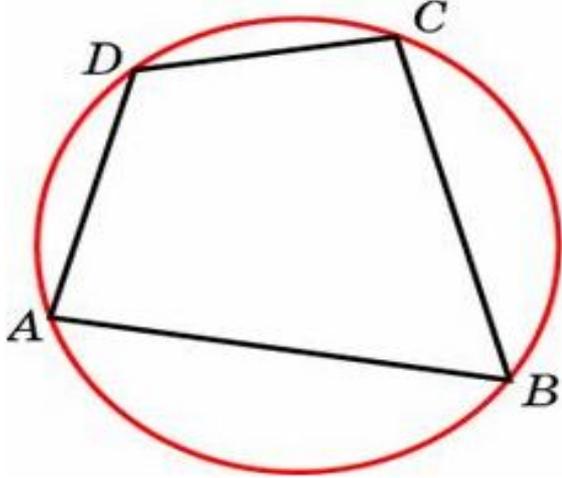
В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны $\angle A = \angle B = 42^\circ$

Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180° .

$$\angle C = \angle D = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

Ответ: $\angle B = 42^\circ$, $\angle C = \angle D = 138^\circ$

3) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол A на 58° больше угла B и в 4 раза больше угла C. Найдите углы четырехугольника.



Дано: окружность описана около четырехугольника ABCD.

$$\angle A = \angle B + 58^\circ, \angle A = 4 \cdot \angle C$$

Найти $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$

Решение:

$$\angle C = x, \angle A = 4x, \angle B = 4x - 58^\circ$$

$$x + 4x = 180^\circ$$

$$5x = 180$$

$$x = 36^\circ - \angle C$$

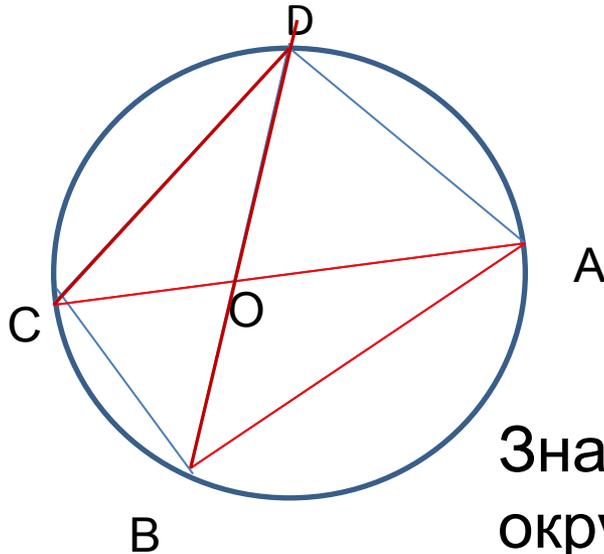
$$\angle A = 4 \cdot 36 = 144^\circ$$

$$\angle B = \angle A - 58 = 144 - 58 = 86^\circ$$

$$\angle D = 180 - 86 = 94^\circ$$

Ответ: $144^\circ, 86^\circ, 36^\circ, 94^\circ$

4) В четырехугольнике ABCD известно, что $\angle ABC=68^\circ$, $\angle ADC=112^\circ$, $\angle BAC=23^\circ$, $\angle DAC=52^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника, противолежащий стороне AD.



Дано: четырехугольник ABCD,
 $\angle ABC=68^\circ$, $\angle ADC=112^\circ$, $\angle BAC=23^\circ$,
 $\angle DAC=52^\circ$.
 Найти: $\angle AOD$

Решение:

$$\angle ABC + \angle ADC = 68 + 112 = 180^\circ$$

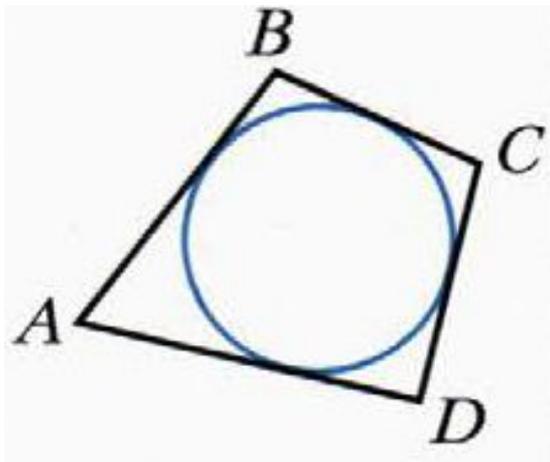
Значит, около четырехугольника можно описать окружность.

$$\begin{aligned} \angle BAC \text{ и } \angle BDC \text{ вписанные и опираются на одну дугу, } \angle BAC = \\ \angle BDC = 23^\circ \\ \angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 112 - 23 = 89^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Рассмотрим } \triangle AOD: \angle AOD = 180 - \angle ADB - \angle DAC = 180 - 89 - 52 = 39^\circ$$

Ответ: $\angle AOD = 39^\circ$

5) В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Найдите сторону CD , если $AB=5$ см, $BC=9$ см, $AD=6$ см.



Дано: окружность вписана в четырехугольник $ABCD$. $AB=5$ см, $BC=9$ см, $AD=6$ см

Найти: CD

Решение:

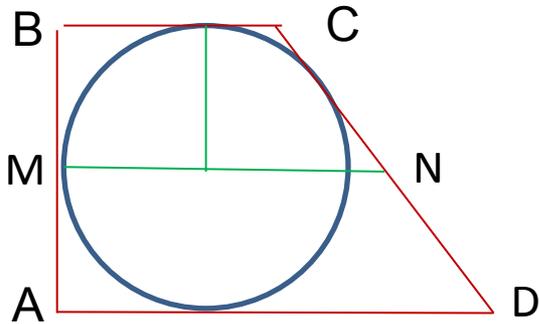
$$BC+AD=9+6=15 \text{ см}$$

$$AB+CD=15 \text{ см по Т.10.3.}$$

$$CD=15-AB=15-5=10 \text{ см}$$

Ответ: $CD=10$ см

6) Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 6 см, а большая боковая сторона этой трапеции равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Дано: окружность вписана в п/уг трапецию ABCD, $R=6$ см, $CD=20$ см. MN-средняя линия.

Найти: MN

Решение:

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $MN = \frac{BC+AD}{2}$

Поскольку окружность вписана в трапецию, то суммы противоположных сторон равны

$$BC+AD=AB+CD. \quad AB=2R=2 \cdot 6=12$$

$$BC+AD=12+20=32 \text{ см.}$$

$$MN = \frac{BC+AD}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см}$$

Ответ: $MN=16$ см