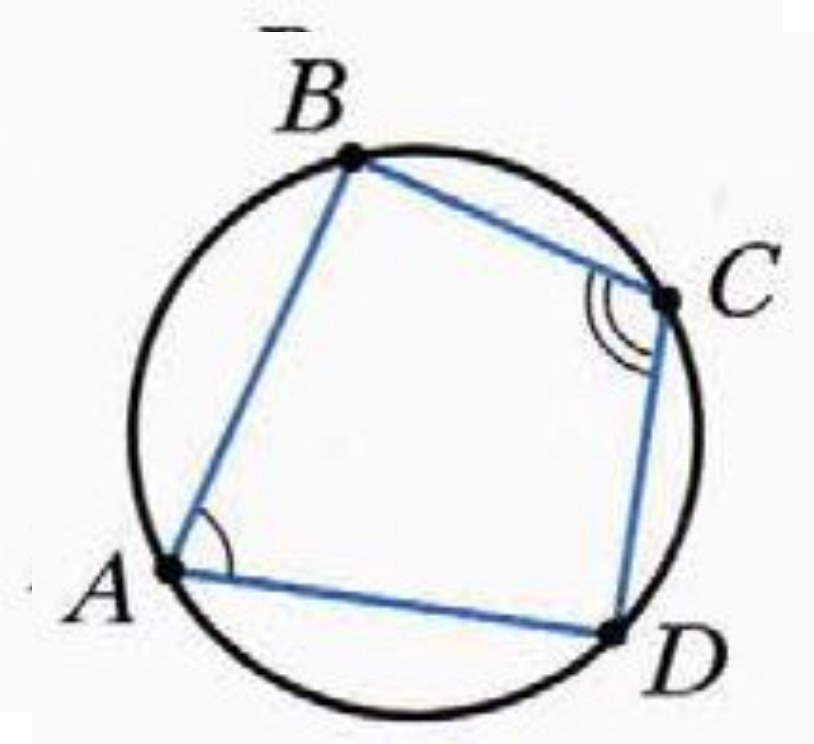
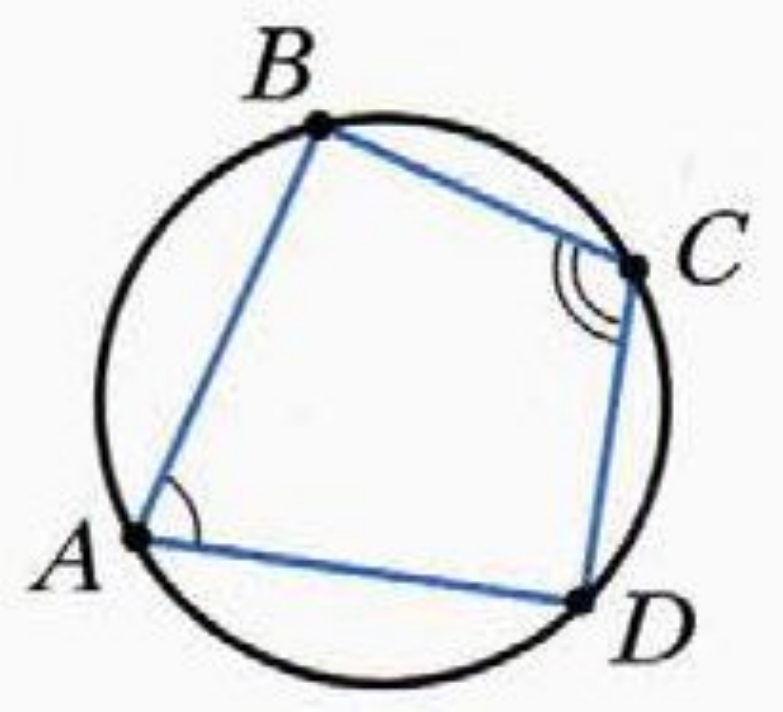
§10. Вписанная и описанная окружности четырехугольника

Решение задач

Окружность называют описанной около четырехугольника, если она проходит через все его вершины



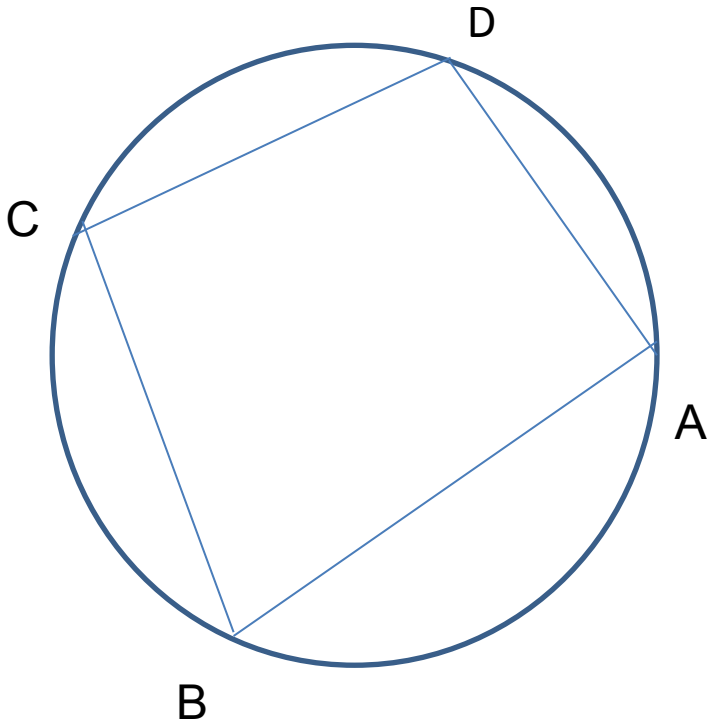
Теорема 10.1. Если четырехугольник является вписанным в четырехугольник, то сумма его противолежащих углов равна 180°.



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

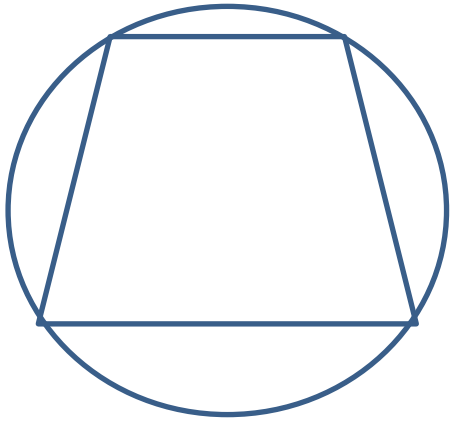
Теорема 10.2. Если в четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

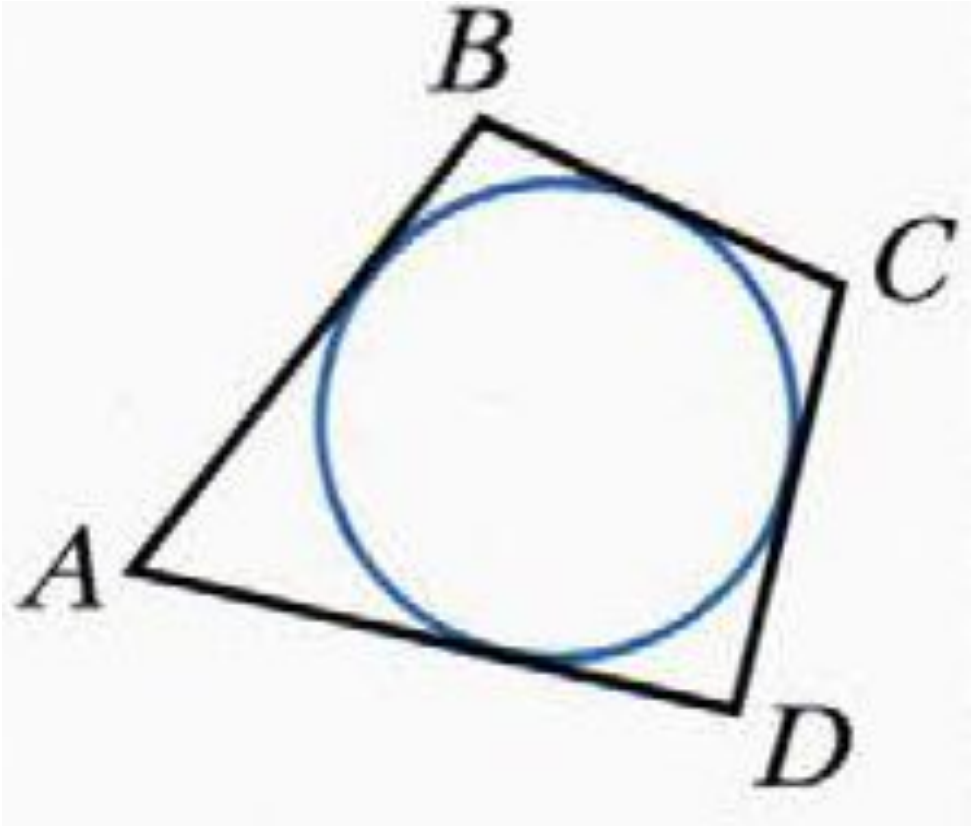
Около равнобедренной трапеции можно описать окружность



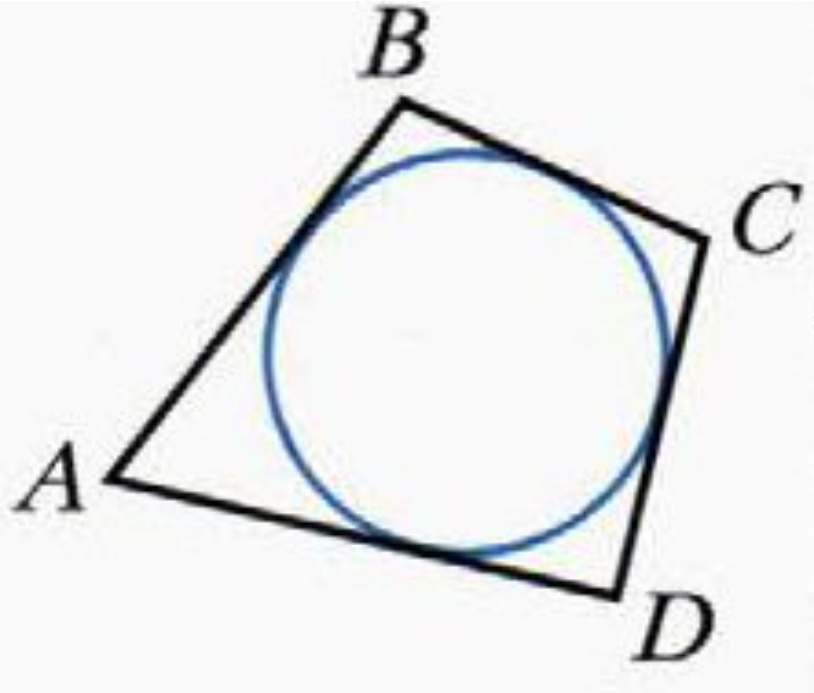
Около ромба нельзя описать окружность

Центр описанной около четырехугольника окружности- точка пересечения серединных перпендикуляров

Окружность называют вписанной в четырехугольник, если она касается всех его сторон



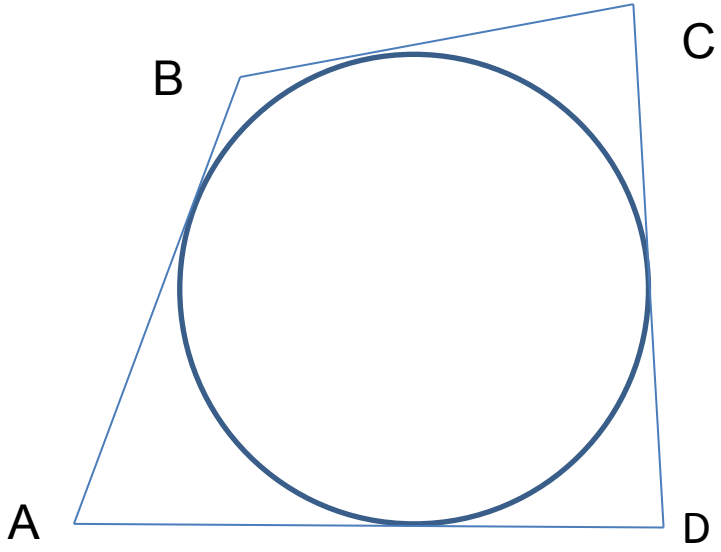
Теорема 10.3. Если четырехугольник является описанным около четырехугольника, то суммы его противолежащих сторон равны.



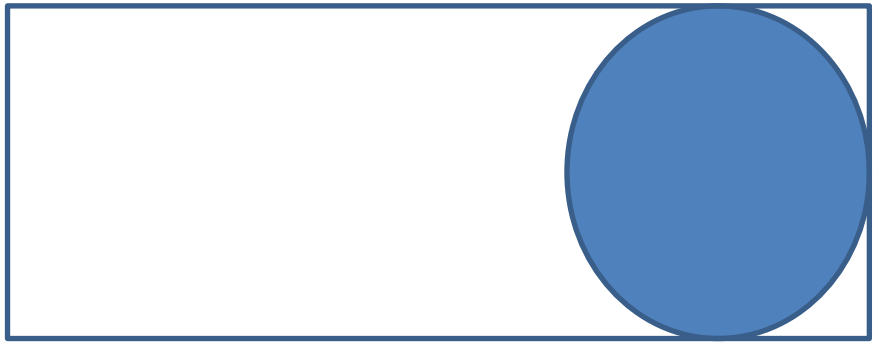
$$AB + CD = BC + AD.$$

Теорема 10.4. Если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

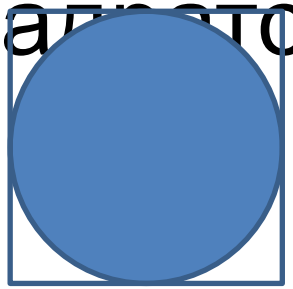
$$AB + CD = BC + AD.$$



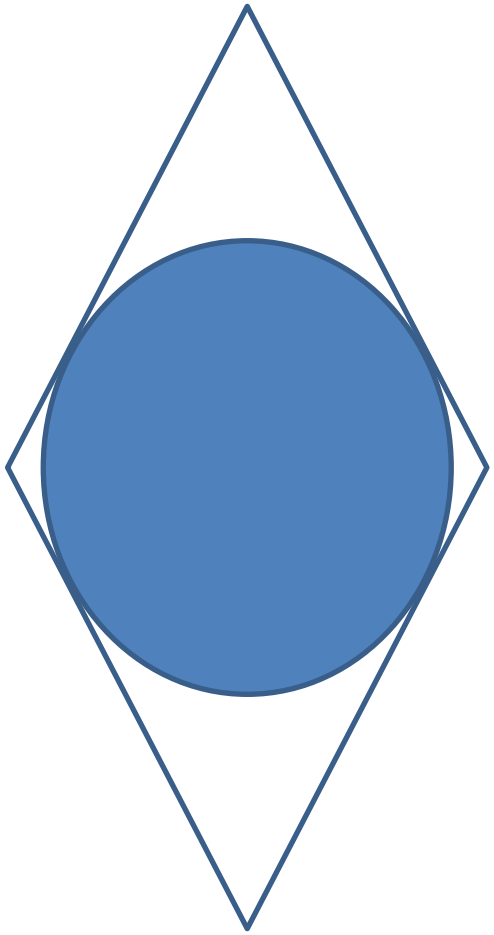
В прямоугольник нельзя вписать окружность



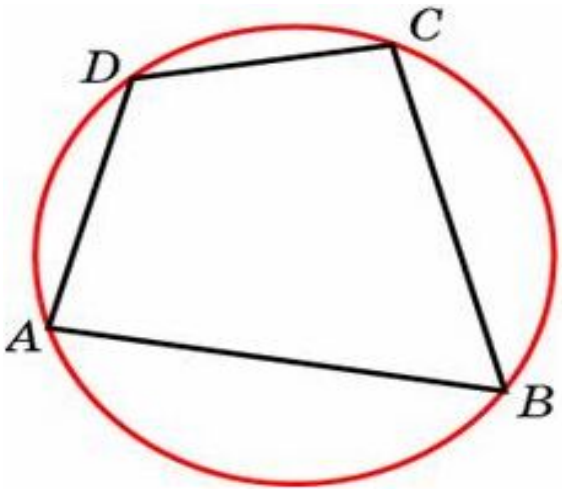
Если в прямоугольник вписана окружность, то он является квадратом.



В ромб можно вписать окружность



1) Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов.



Дано: окружность описана около четырехугольника ABCD.

∟ A =82, ∟ B =58°

Найти ∟C, ∟D

Решение:

∟A+ ∟ C = ∟ D+ ∟ B =180° по теореме 10.1

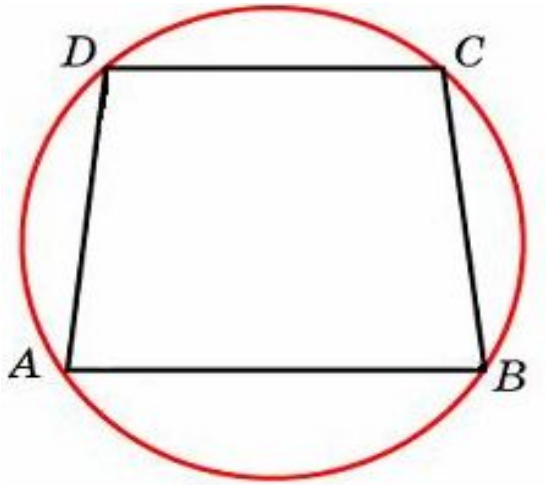
∟C= 180-82=98°

∟D= 180-58=122°

Это не противолежащие углы, т.к. в описанном четырехугольнике их сумма равнялась бы 180 градусов.

Ответ:
122°

2) Один из углов трапеции, вписанной в окружность, равен 42°. Найдите остальные углы трапеции.



Дано: окружность описана около трапеции ABCD, ∠A=42°

Найти: ∠B, ∠C, ∠D

Решение:

Окружность можно описать только около равнобедренной трапеции

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны

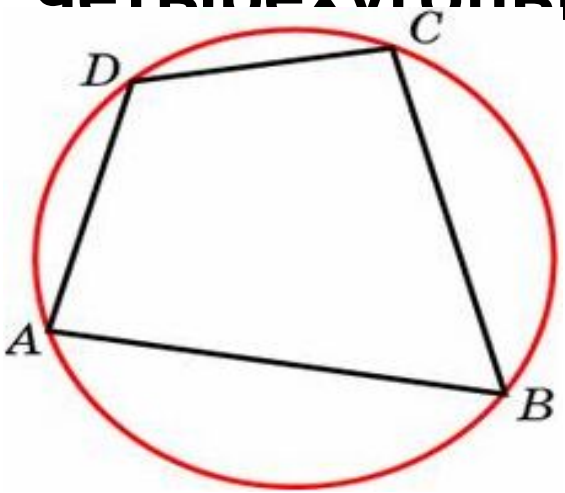
∠A=∠B = 42°

Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.

∠C=∠D=180°-42°=138°

Ответ:∠B = 42°, ∠C=∠D=138°

3) Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол A на 58° больше угла B и в 4 раза больше угла C. Найдите углы четырехугольника.



Дано: окружность описана около четырехугольника ABCD.

$\angle A = \angle B + 58°$, $\angle A = 4 \cdot \angle C$

Найти $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$

Решение:

$\angle C = x$, $\angle A = 4x$, $\angle B = 4x - 58°$

$x + 4x = 180°$

$5x = 180$

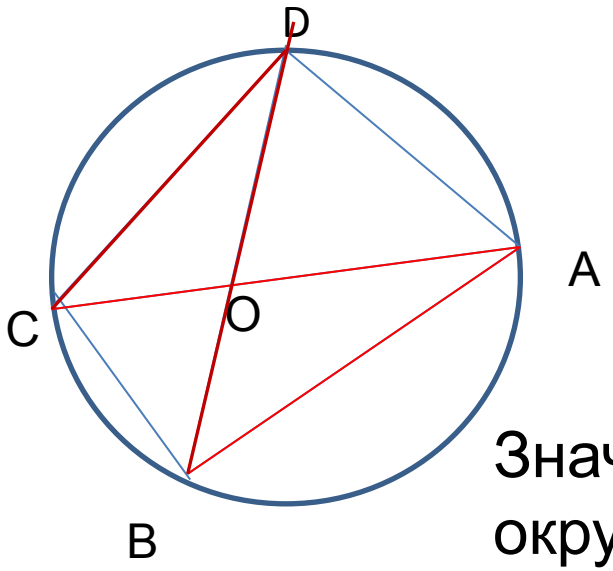
$x = 36°$ - $\angle C$

$\angle A = 4 \cdot 36 = 144°$ $\angle B = \angle A - 58 = 144 - 58 = 86°$

$\angle D = 180 - 86 = 94°$

Ответ: 144°,86°, 36°, 94°

4) **В четырехугольнике ABCD известно, что ∟ABC=68°, ∟ADC=112°, ∟BAC=23°, ∟DAC=52°. Найдите угол между диагоналями четырехугольника, противолежащий стороне AD.**



Дано: четырехугольник ABCD, ∟ABC=68°, ∟ADC=112°, ∟BAC=23°, ∟DAC=52°

Найти: ∟AOD

Решение:

∟ABC+∟ADC=68+112=180°

Значит, около четырехугольника можно опис
окружность.

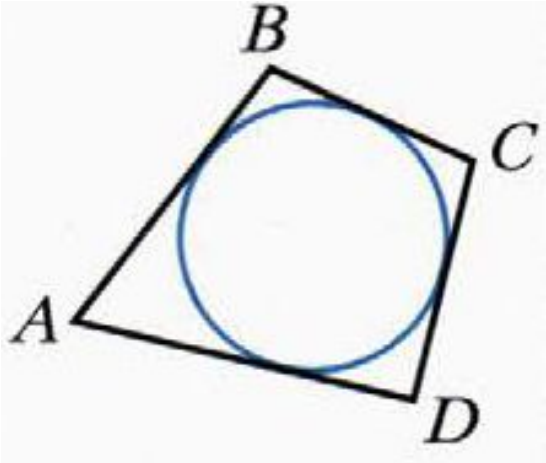
∟BAC и ∟BDC вписанные и опираются на одну дугу, ∟BAC=∟BDC=23°

∟ADB=∟ADC-∟BDC=112-23=89°

Рассмотрим ΔAOD: ∟AOD=180-∟ADB-∟DAC=180-52-89=39°

Ответ: ∟AOD=39°

5) В четырехугольник ABCD вписана окружность. Найдите сторону CD, если AB=5 см, BC=9 см, AD=6 см.



Дано: окружность вписана в четырехугольник ABCD. AB=5 см, BC=9 см, AD=6 см

Найти: CD

Решение:

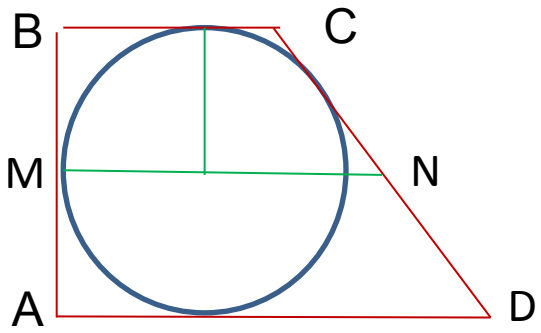
BC+AD=9+6=15 см

AB+CD=15 см по Т.10.3.

CD=15-AB=15-5=10 см

Ответ: CD=10 см

6) Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 6 см, а большая боковая сторона этой трапеции равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Дано: окружность вписана в п/уг трапецию ABCD, R= 6 см, CD=20см. MN-средняя линия.

Найти: MN

Решение:

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $MN=\frac{BC+AD}{2}$

Поскольку окружность вписана в трапецию, то суммы противолежащих сторон равны.

BC+AD=AB+CD.

AB=2R=2·6=12 см

BC+AD=12+20=32 см.

$MN=\frac{BC+AD}{2}=\frac{32}{2}=16$ см

Ответ: MN=16 см