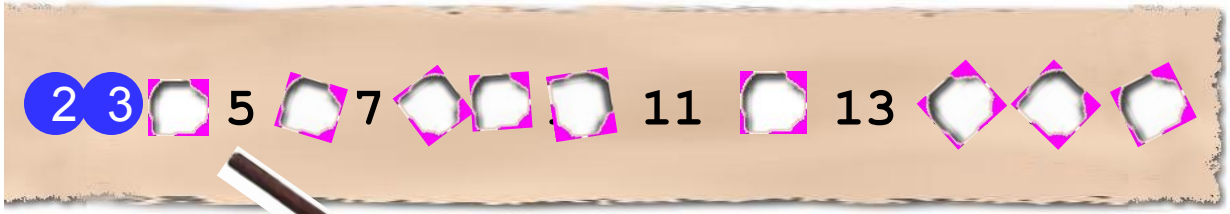
Алгоритмизация и программирование. Язык Python

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 38. Целочисленные алгоритмы

Решето Эратосфена



Эратосфен Киренский
(Eratosthenes, Ερατοσθδνη)
(ок. 275-194 до н.э.)

Алгоритм:

1) начать с **k = 2**
2) «выколоть» все числа через **k**, начиная с **k·k**
3) перейти к следующему «невыколотому» **k**
4) если **k·k <= N**, то перейти к шагу 2
5) напечатать все числа, оставшиеся «невыколотыми»

Новая версия – решето Аткина.

? Как улучшить?

➕ высокая скорость, количество операций

$$O((N \cdot \log N) \cdot \log \log N)$$

➖ нужно хранить в памяти все числа от **1** до **N**

Решето Эратосфена

Задача. Вывести все простые числа от 2 до N.

Массив (сначала все не вычеркнуты):

```
N = 100
A = [True]*(N+1)
```

выделяем на 1 элемент больше, чтобы начать с `A[1]`

Вычёркивание непростых:

```
k = 2
while k*k <= N:
    if A[k]: # если k не вычеркнуто
        i = k*k # начать с k*k
        while i <= N: # вычеркнуть кратные k
            A[i] = False
            i += k
    k += 1
```

Решето Эратосфена

или так:

```
from math import sqrt

for k in range(2, int(sqrt(N))+1):
  if A[k]: # если k не вычеркнуто
    for i in range(k*k, N, k):
      A[i] = False
```

все кратные **k**

Решето Эратосфена

Вывод результата:

```
for i in range(2,N+1):
    if A[i]:
        print( i )
```

или так:

```
P=[ i for i in range(2,N+1)
          if A[i] ]
print( P )
```

выбираем те, которые не вычеркнуты

«Длинные» числа

Ключи для шифрования: **≥ 256** битов.

Целочисленные типы данных *обычно* ≤ 64 битов.

Как хранить?

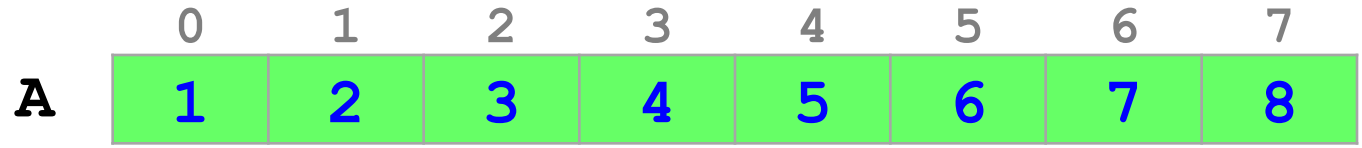
Длинное число – это число, которое не помещается в переменную одного из стандартных типов данных языка программирования.

«**Длинная арифметика**» – алгоритмы для работы с длинными числами.

В Python длинная арифметика встроенная!

«Длинные» числа

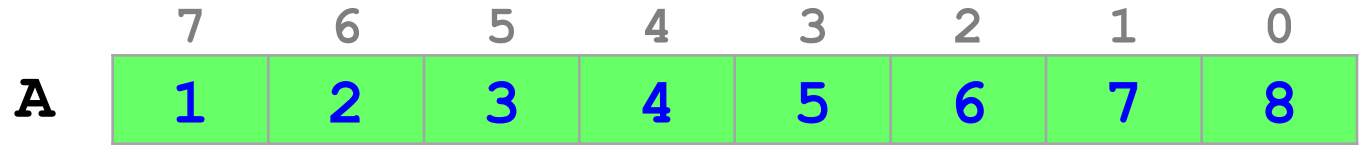
A = 12345678



? Что плохо?

- неудобно вычислять (с младшего разряда!)
- неэкономное расходование памяти (одна цифра в ячейке)

Обратный порядок элементов:



«Длинные» числа

Упаковка элементов: `A = 12345678`

	2	1	0
A	12	345	678

$$12345678 = 12 \cdot 1000^2 + 345 \cdot 1000^1 + 678 \cdot 1000^0$$

? На что похоже?

система счисления с основанием 1000!

Если 4 байтовая ячейка:

от $-2^{31} = -2\,147\,483\,648$ до $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$.

? Какие основания можно использовать?

должны помещаться все промежуточные результаты!

Вычисление факториала

Задача 1. Вычислить точно значение факториала

100! = 1·2·3·…·99·100

? Как оценить количество цифр?

1·2·3·…·99·100 <

201 цифра

основание 1000000

6 цифр в ячейке ⇒ 34 ячейки

Основной алгоритм:

длинное число

```
{A} = 1
for k in range(2,101):
    {A} *= k
```

Вычисление факториала

основание d = 1 000 000

`[A] = 1234567890173456 7`

	3	2	1	0
A	0	12345	678901	734567

*3

734 567 ·3 = 2 203 701

остаётся в A[0]

r = перенос в A[1]

? Как найти перенос?

```
s = A[0]*k
A[0] = s % d
r = s // d
```

? Что изменится для A[1]?

```
s = A[1]*k + r
```

Вычисление факториала

Умножение «длинного» числа на k:

```
r = 0
for i in range(len(A)):
    s = A[i]*k + r
    A[i] = s % d
    r = s // d
if r > 0:
    A.append( r )
```

все разряды

число удлиняется

Вычисление 100!:

```
for k in range(2,101):
    {A} *= k
```

Вывод длинного числа

	3	2	1	0
A	0	1	2	3

A = 1000002000003

? Какое число?

- вывести старший ненулевой разряд

```
h = len ( A ) - 1
print ( A[h], end = "" )
```

- вывести все следующие разряды, добавляя лидирующие нули до 6 цифр

```
for i in range(h-1,-1,-1):
  print ( "{:06d}".format(A[i]), end = "" )
```

дополнить нулями

в 6 позициях

Квадратный корень

Задача. Извлечь квадратный корень из «длинного» целого числа; если это не целое число, найти корень с округлением «вниз» (к меньшему значению).

Метод Герона: $x^* = \sqrt{a}$

$$x_0 = a \longrightarrow x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}}\right)$$

Начальное приближение – любое > 0!

$$a = 16$$

$$x_0 = 16 \longrightarrow x_1 = 0{,}5 \cdot (16 + 16/16) = 8{,}5$$

$$x_2 = 0{,}5 \cdot (8{,}5 + 16/8{,}5) \approx 5{,}19$$

$$x_3 = 0{,}5 \cdot (5{,}19 + 16/5{,}19) \approx 4{,}14$$

$$\ldots$$

Квадратный корень

Метод Герона в целых числах:

```
x = (x + a // x) // 2
```

$$x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}} \right)$$

или так:

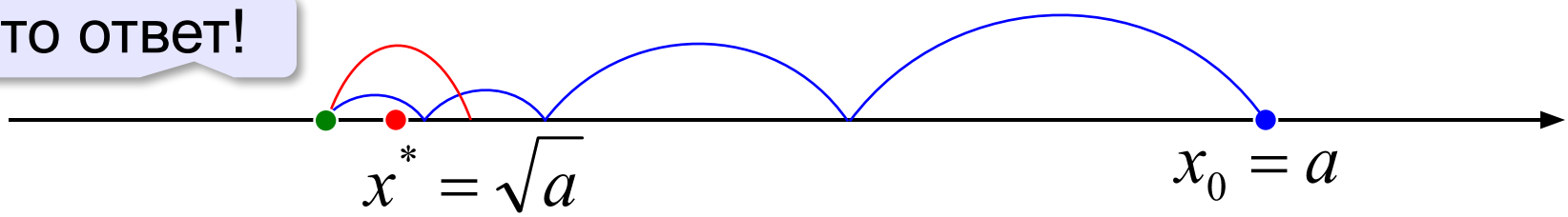
```
x = (x*x + a) // (2*x)
```

$$x_i = \frac{x_{i-1}^2 + a}{2 \cdot x_{i-1}}$$

только целые числа!

? Когда остановиться?

это ответ!



! Если следующее приближение больше предыдущего, то стоп!

Квадратный корень

Метод Герона в целых числах:

```
def isqrt(a):
    x = a  # начальное приближение
    while True:
        x1 = (x*x + a)//(2*x)
        if x1 >= x:
            return x
        x = x1
```

следующее приближение

вернуть результат

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 39. Структуры

Зачем нужны структуры?

Книги в библиотеках:

- **автор**
- **название**
- **количество экземпляров**

символьные строки

целое число

Как хранить данные?

Несколько массивов:

```
N = 100
authors = [""]*N
titles = [""]*N
count = [0]*N
...
```

неудобно работать (сортировать и т.д.), ошибки

Задача: объединить разнотипные данные в один блок.

Структуры

Структура – это тип данных, который может включать в себя несколько **полей** – элементов разных типов (в том числе и другие структуры).

новый тип (класс) данных

название типа данных

```
class TBook:
  pass
```

«пустой» оператор

```
class TBook:
  author = ""
  title = ""
  count = 0
```

эти поля будут у всех структур класса **TBook**

Работа со структурами

Создание:

```
B = TBook()
```

Заполнение:

```
B.author = "Пушкин А.С."
B.title = "Полтава"
B.count = 1
```

создание полей

точечная запись

В Python не нужно заранее объявлять поля!

Ввод с клавиатуры:

```
B.author = input()
B.title = input()
B.count = int( input() )
```

Работа со структурами

Обработка:

```
B.author = "Пушкин А.С."
fam = B.author.split()[0]   # фамилия
print ( fam )
B.count -= 1      # одну книгу взяли
if B.count == 0:
  print ( "Этих книг больше нет!" )
```

Вывод на экран:

```
print ( B.author, B.title + ".",
        B.count, "шт." )
```

Массив структур

Создание:

```
Books = [TBook()]*100
```

Что плохо?

```
Books = []
for i in range(100):
    Books.append ( TBook() )
```

Изменение полей:

```
Books[5].author = "Пушкин А.С."
Books[5].title = "Полтава"
Books[5].count = 1
```

Запись структур в файлы

Текстовые файлы:

```
"Пушкин А.С.";"Полтава";12
"Лермонтов М.Ю.";"Мцыри";8
```

разделитель

Сложно читать, ошибки!

Двоичные файлы:

```
B = TBook()
B.author = "Тургенев И.С. "
B.title = "Муму"
B.count = 2

F = open ( "books.dat", "wb" )
import pickle
pickle.dump ( B, F );
F.close()
```

binary, двоичный

"wb" – запись
"rb" – чтение
"ab" – добавление

Запись массива структур в файлы

```
Books = []
for i in range(10):
  Books.append ( TBook() )
```

Сразу все:

```
pickle.dump ( Books, F );
```

По одной структуре:

```
for B in Books:
  pickle.dump ( B, F )
```

файл, открытый на запись

Чтение структур из файла

Одна структура:

```
F = open ( "books.dat", "rb" )
B = pickle.load ( F )
print ( B.author, B.title,
                  B.count, sep = ", " )
F.close()
```

Массив структур целиком:

```
Books = pickle.load ( F )
```

Массив из N структур по одной:

```
for i in range(N):
  Books[i] = pickle.load ( F )
```

Чтение структур из файла

Число структур неизвестно:

```
Books = []
while True:
  try:
    B = pickle.load( F )
    Books.append( B )
  except:
    break
```

try – попытаться выполнить следующие операторы

except – что делать в случае ошибки (*исключения*, аварийной ситуации)

Сортировка структур

Ключ – фамилия автора:

```
# B - массив структур TBook
N = len(B)
for i in range(0,N-1):
  for j in range(N-2,i-1,-1):
    if B[j].author > B[j+1].author:
      B[j], B[j+1] = B[j+1], B[j]
```

? Какой метод?

Сортировка структур (в стиле Python)

Ключ – фамилия автора:

```
def getAuthor ( B ):
    return B.author

Books.sort ( key=getAuthor )
```

или так:

```
Books.sort ( key=
            lambda x: x.author )
```

лямбда-функция

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 40. Словари

Что такое словарь?

Задача. В файле находится список слов, среди которых есть повторяющиеся. Каждое слово записано в отдельной строке. Построить **алфавитно-частотный словарь**: список слов в алфавитном порядке, справа от каждого слова должно быть указано, сколько раз оно встречается в исходном файле.

? Какая структура данных нужна?

```
print ( D["бегемот"] )
```

поиск не по индексу, а по слову (*ключу*)

ключ → значение
(отображение, *map*)

Словарь – это неупорядоченный набор элементов, в котором доступ к элементу выполняется по ключу.

Алгоритм (псевдокод)

ключ → значение

слово

счётчик

Как выбрать ключ и значение?

```
создать пустой словарь
while есть слова в файле:
  прочитать очередное слово
  if слово есть в словаре:
    увеличить на 1 счётчик
                   для этого слова
  else:
    добавить слово в словарь
    записать 1 в счетчик слова
```

Работа со словарями в Python

Создание:

```
D = {}   # пустой словарь
```

```
D = { "бегемот": 0, "пароход": 2 }
```

Добавление (изменение) элемента:

```
D["самолёт"] = 1
```

Создаётся новый элемент!

```
D["самолёт"] += 1
```

ошибка, если ключа нет

Нужно проверить, есть ли элемент!

Работа со словарями в Python

Изменение с проверкой:

```
if "самолёт" in D:
  D["самолёт"] += 1
else:
  D["самолёт"] = 1
```

или так:

```
D["самолёт"] = D.get ( "самолёт", 0 ) + 1
```

получить значение по ключу

значение по умолчанию (если ключа нет)

Основной цикл

создать пустой словарь

```
D = {}
F = open ( "input.txt" )
while True:
   word = F.readline().strip()
   if not word:
      break
   D[word] = D.get ( word, 0 ) + 1
F.close()
```

прочитать строку, убрать "\n" в конце

кончились данные – выход

увеличить счётчик слова

Вывод результата

Получить массив всех ключей:

```
allKeys = D.keys()
```

отсортировать ключи:

```
sortKeys = sorted(D.keys())
```

или так:

```
sortKeys = sorted(D)
```

Вывод результата:

```
F = open ( "output.txt", "w" )
for k in sorted(D):
  F.write ( "{}: {}\n".format(k, D[k]) )
F.close()
```

```
пароход: 12
самолёт: 20
```

Ещё о словарях

Перебор значений:

```
for i in D.values():
  print( i )
```

Перебор ключей и значений:

```
for k, v in D.items():
  print( k, "->", v )
```

список пар
(ключ, значение)

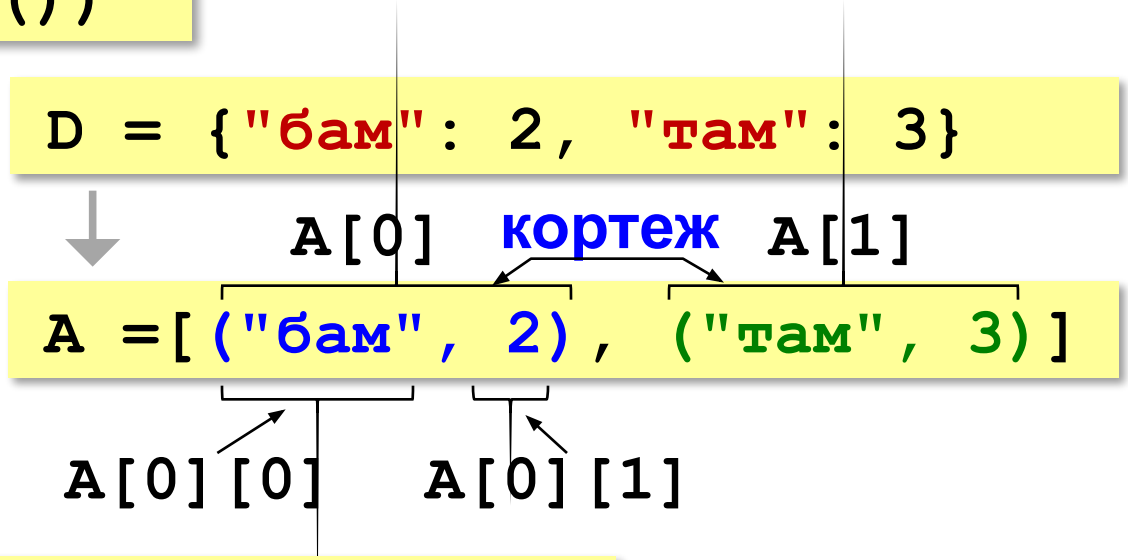
Словарь и массив пар

Массив (список) пар «ключ-значение»:

```
A = list(D.items())
```

список пар (ключ, значение)

```
D = {"бам": 2, "там": 3}
```



Сортировка:

```
for i in range(N-1):
  for j in range(N-2,i-1,-1):
    if A[j][1]<A[j+1][1]:
      A[j],A[j+1]=A[j+1],A[j]
```

по значению!

Словарь и массив пар

Сортировка:

```
A.sort()
```

по ключам, если ключи равны – по значениям

```
A.sort( key = lambda x: x[0])
```

по ключам

по значениям

```
A.sort( key = lambda x: x[1])
```

```
A.sort( key = lambda x: (x[1], x[0]))
```

по значениям, если они равны – по ключам

```
A.sort( key = lambda x: (-x[1], x[0]))
```

Словарь и массив пар

Вывод массива пар

```
for x in A:
  print( x[0], ": ", x[1], sep="" )
```

или так

```
for x in A:
  print( "{}: {}".format(x[0], x[1]) )
```

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 41. Стек, дек, очередь

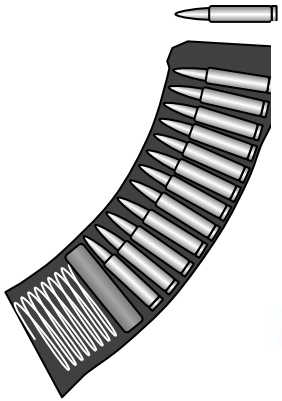
Что такое стек?

Стек (англ. *stack* – стопка) – это линейный список, в котором элементы добавляются и удаляются только с одного конца («последним пришел – первым ушел»).

LIFO = *Last In – First Out*.







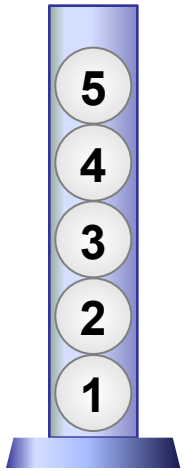

Системный стек:

- адреса возврата из подпрограмм
- передача аргументов подпрограмм
- хранение локальных переменных

Реверс массива

Задача. В файле записаны целые числа. Нужно вывести их в другой файл в обратном порядке.

```
while файл не пуст:
   прочитать x
   добавить x в стек
```




```
while стек не пуст:
   вытолкнуть число из стека в x
   записать x в файл
```

Использование списка

Конец списка – вершина стека!

Создать стек:

```
stack = []
```

«Втолкнуть» x в стек:

```
stack.append ( x )
```

Снять элемент с вершины стек в x:

```
x = stack.pop()
```

- удалить последний элемент
- вернуть удалённый элемент как результат функции

Инверсия массива неизвестной длины

Чтение из файла:

```
F = open ( "input.txt" )
stack = []
while True:
   s = F.readline()
   if not s: break
   stack.append( int(s) )
F.close()
```

или так:

```
stack = []
for s in open( "input_arr.dat" ):
   stack.append ( int(s) )
```

Инверсия массива неизвестной длины

Запись в файл (в обратном порядке):

```
F = open ( "output.txt", "w" )
while len(stack) > 0:
   x = stack.pop()
   F.write ( str(x) + "\n" )
F.close()
```

Вычисление арифметических выражений

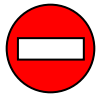
Как компьютер вычисляет арифметические выражения?

`(5+15)/(4+7-1)` **инфиксная форма** (знак операции между данными)

1920 (*Я. Лукашевич*): **префиксная форма** (знак операции перед данными)

```
/ + 5 15 - + 4 7 1
/ 20 - + 4 7 1
/ 20 - 11 1
/ 20 10
2
```

не нужны скобки



первой стоит последняя операция (вычисляем с конца)

Вычисление арифметических выражений

```
(5+15)/(4+7-1)
```

1950-е: **постфиксная форма**
(знак операции после данных)

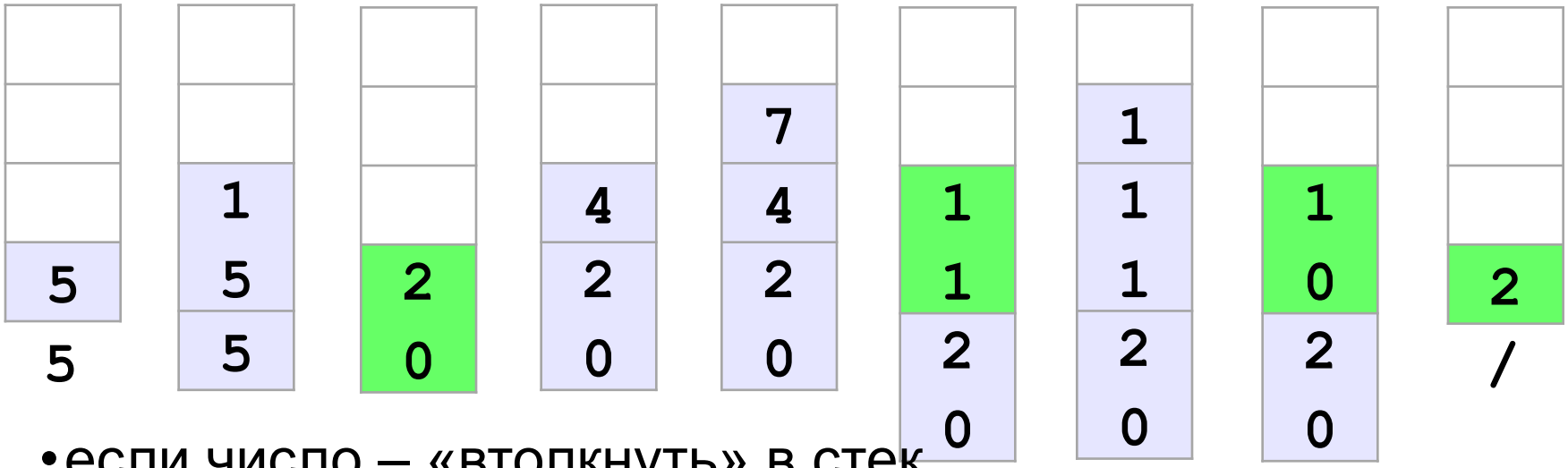
```
5 15 + 4 7 + 1 - /
20 4 7 + 1 - /
20 11 1 - /
20 10 /
2
```

- не нужны скобки
- вычисляем с начала

Вычисляем с помощью стека!

Использование стека

```
5 15 + 4 7 + 1 - /
```



- если число – «втолкнуть» в стек
- если операция – выполнить с верхними элементами стека

В стеке остается результат!

Вычисление постфиксной формы

```
data = input().split()
stack = []
for x in data:
    if x in "+-*/":# если операция
        op2 = int(stack.pop())
        op1 = int(stack.pop())
        if   x == "+": res = op1 + op2
        elif x == "-": res = op1 - op2
        elif x == "*": res = op1 * op2
        else:          res = op1 // op2
        stack.append( res )
    else:
        stack.append( x )
print ( stack[0] )          # результат
```

разбить строку на элементы

взять 2 значения со стека

выполнить операцию

результат в стек

данные в стек

Скобочные выражения

Задача. Вводится символьная строка, в которой записано некоторое (арифметическое) выражение, использующее скобки трёх типов: **( )**, **[ ]** и **{ }**. Проверить, правильное ли расставлены скобки.

( ) [{ ( ) [ ] }] ✓ **[( )]** ✗ **[( ) }** ✗ **) (** ✗ **([ )]** ✗

Для одного типа скобок:

		(	)	(	(	)	(	(	)	)	)
счётчик	0	1	0	1	2	1	2	3	2	1	0

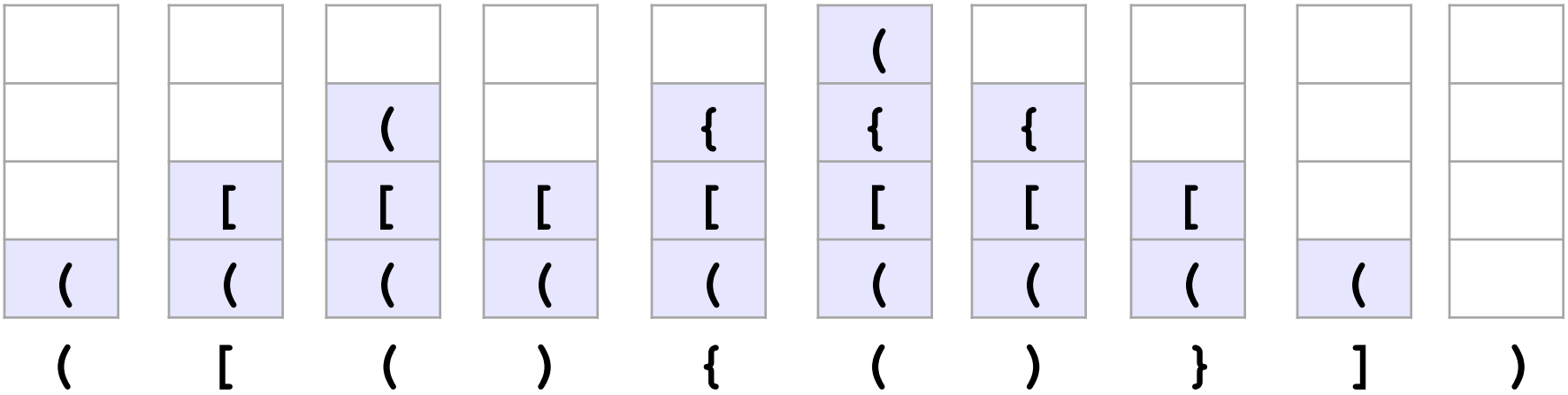
? Когда выражение правильное?

- счётчик всегда ≥ 0
- в конце счётчик = 0

({ [ ) }]

! Для разных скобок не работает!

Скобочные выражения (стек)



- если открывающая скобка – «втолкнуть» в стек
- если закрывающая скобка – снять парную со стека

? Когда выражение правильное?

- когда встретили закрывающую скобку, на вершине стека лежит соответствующая открывающая
- в конце работы стек пуст

Скобочные выражения (стек)

Подготовка:

```
L = "([{"       # открывающие скобки
R = ")]}"       # парные закрывающие
stack = []      # пустой стек
err = False     # признак ошибки
```

Вывод результата:

```
if not err:
  print ( "Выражение правильное." )
else:
  print ( "Выражение неправильное." )
```

Скобочные выражения (стек)

```
for c in s:
  p = L.find(c)
  if p >= 0:
    stack.append(c)
  p = R.find(c)
  if p >= 0:
    if len(stack) == 0: err = True
    else:
      top = stack.pop()
      if p != L.find(top):
        err = True
  if err: break
```

открывающую скобку в стек

если закрывающая скобка…

если не та скобка…

? Что ещё?

Что такое очередь?

Очередь – это линейный список, для которого введены две операции:

- добавление элемента в конец
- удаление первого элемента

FIFO = *Fist In – First Out*.

Применение:

- очереди сообщений в операционных системах
- очереди запросов ввода и вывода
- очереди пакетов данных в маршрутизаторах
- …

Заливка области

Задача. Рисунок задан в виде матрицы **A**, в которой элемент **A[y][x]** определяет цвет пикселя на пересечении строки **y** и столбца **x**. Перекрасить в цвет **2** одноцветную область, начиная с пикселя (x_0, y_0).

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	2	2
2	0	1	0	2	2
3	3	3	1	2	2
4	0	1	1	0	0

(1,2)

	0	1	2	3	4
0	0	2	0	1	1
1	2	2	2	2	2
2	0	2	0	2	2
3	3	3	1	2	2
4	0	1	1	0	0

Заливка: использование очереди

```
добавить в очередь точку (x0,y0)
color = цвет начальной точки

while очередь не пуста:
  взять из очереди точку (x,y)
  if A[y][x] == color:
    A[y][x] = новый цвет
    добавить в очередь точку (x-1,y)
    добавить в очередь точку (x+1,y)
    добавить в очередь точку (x,y-1)
    добавить в очередь точку (x,y+1)
```

Заливка

Подготовка:

```
YMAX = len(A)
XMAX = len(A[0])
NEW_COLOR = 2
```

```
y0 = 0
x0 = 1        # начать заливку отсюда
color = A[y0][x0]   # цвет начальной точки
```

Элементы очереди – координаты:

(x, y)
кортеж

```
Q = []
Q.append ( (x0,y0) )
```

добавить начальную точку

Кортеж – неизменяемая последовательность элементов (как список, но нельзя изменять)!

Заливка (основной цикл)

пока очередь не пуста

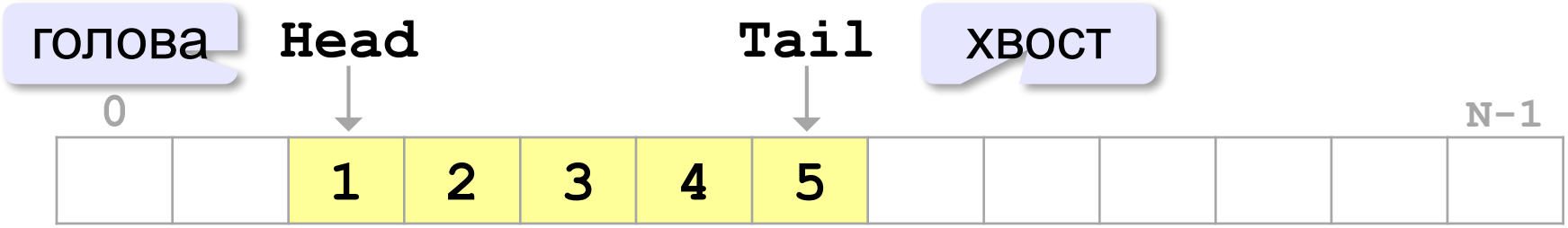
```
while len(Q) > 0:
    x, y = Q.pop(0)
    if A[y][x] == color:
        A[y][x] = NEW_COLOR
        if x > 0:        Q.append( (x-1,y) )
        if x < XMAX-1:   Q.append( (x+1,y) )
        if y > 0:        Q.append( (x,y-1) )
        if y < YMAX-1:   Q.append( (x,y+1) )
```

перекрасить

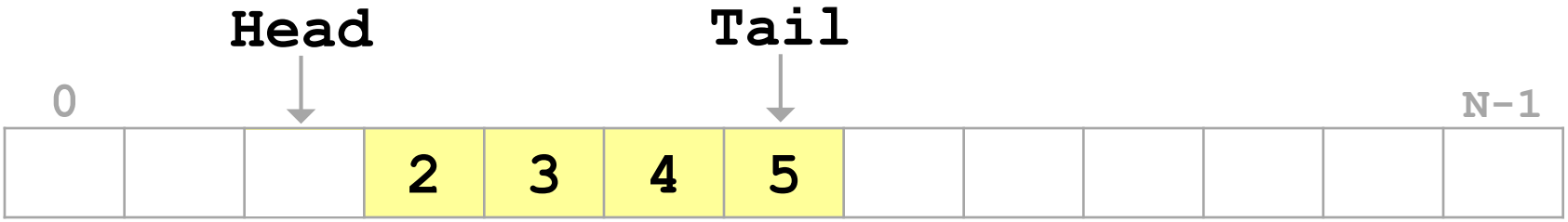
с проверкой выхода за границы

? Что можно улучшить?

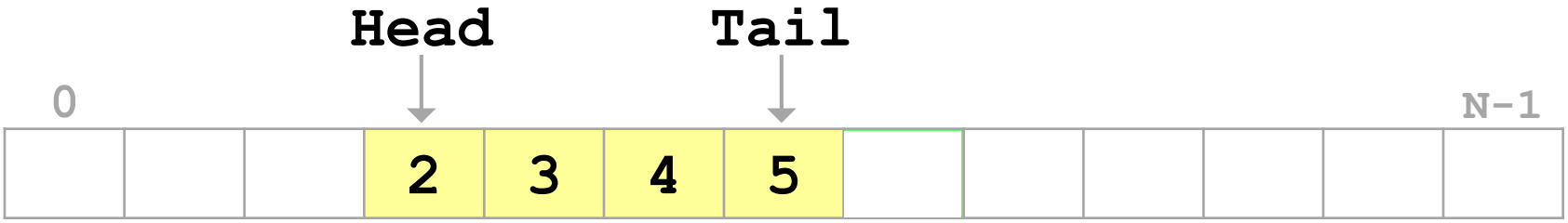
Очередь: статический массив



Удаление элемента:



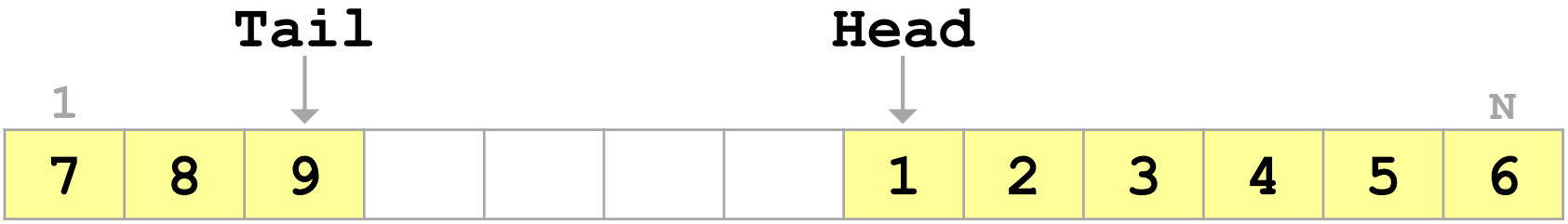
Добавление элемента:



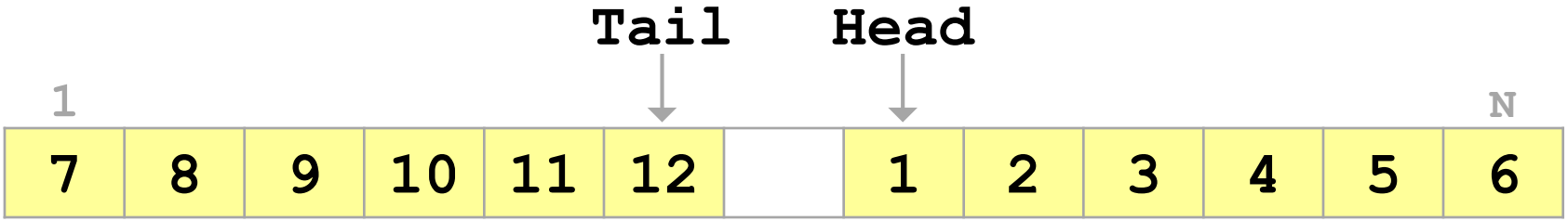
- не двигаем элементы
- нужно знать размер

Очередь: статический массив

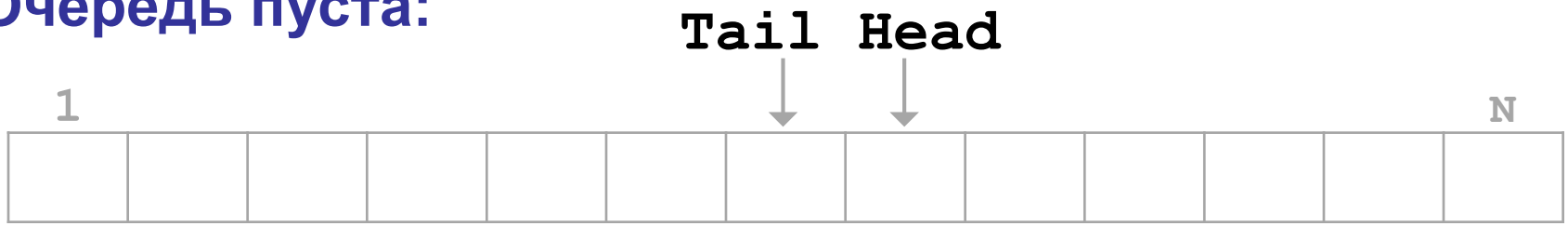
Замыкание в кольцо:



Очередь заполнена:



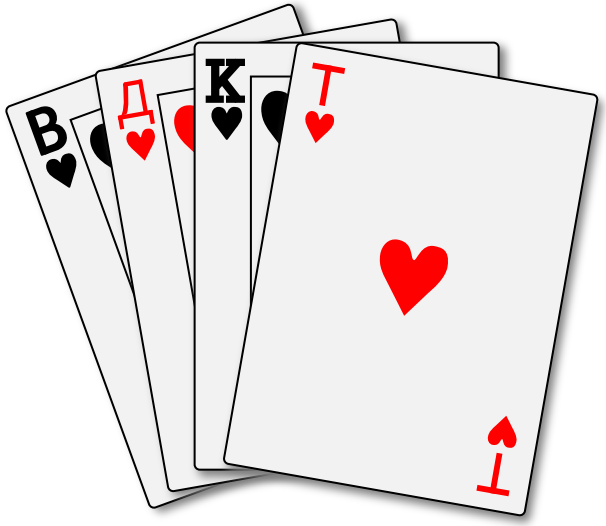
Очередь пуста:



Вариант: хранить размер очереди в переменной!

Что такое дек?

Дек – это линейный список, в котором можно добавлять и удалять элементы как с одного, так и с другого конца.



добавить в начало

удалить с начала

Моделирование:

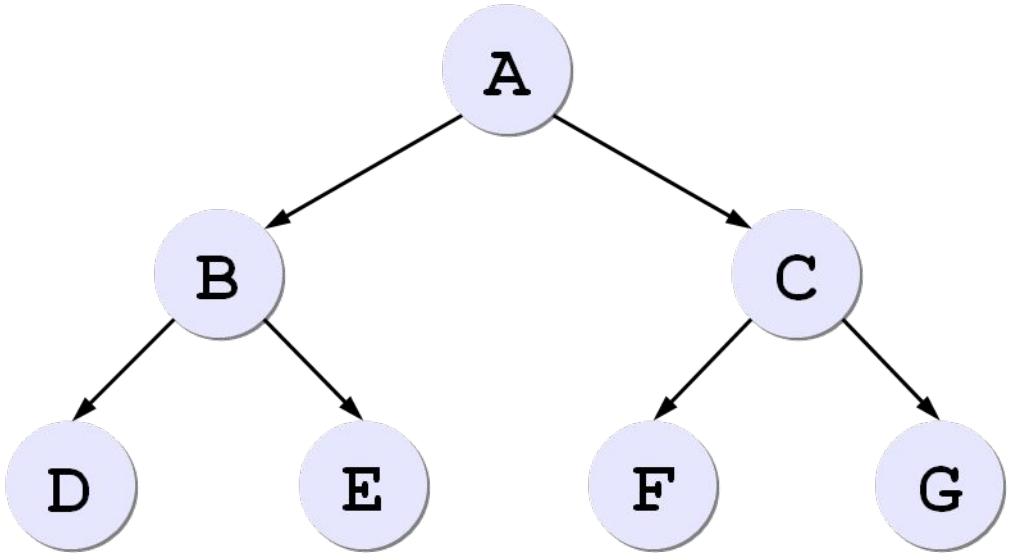
- массив (список) изменяющегося размера
- **collections.deque**

```
import collections
d = collections.deque()
d.append(1)
d.appendleft(0)
d.pop()
d.popleft()
```

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 42. Деревья

Что такое дерево?



«Сыновья» A: B, C. **«Родитель» B**: A.

«Потомки» A: B, C, D, E, F, G. **«Предки» F**: A, C.

Корень – узел, не имеющий предков (A).

Лист – узел, не имеющий потомков (D, E, F, G).

Рекурсивные определения

1) пустая структура – это **дерево**
2) дерево – это корень и несколько связанных с ним отдельных (не связанных между собой) деревьев

Двоичное (бинарное) дерево:

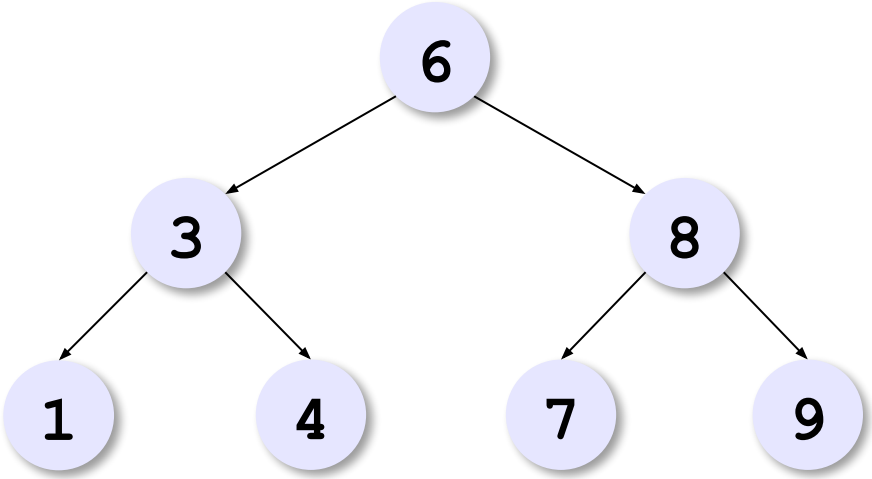
1) пустая структура – это **двоичное дерево**
2) двоичное дерево – это корень и **два** связанных с ним отдельных двоичных дерева («левое» и «правое» поддеревья)

Применение:

- поиск в большом массиве неменяющихся данных
- сортировка данных
- вычисление арифметических выражений
- оптимальное сжатие данных (метод Хаффмана)

Деревья поиска

Ключ – это значение, связанное с узлом дерева, по которому выполняется поиск.



- слева от узла – узлы с *меньшими* или равными ключами
- справа от узла – узлы с *большими* или равными ключами

$O(\log N)$

? Сложность поиска?

Двоичный поиск $O(\log N)$

Линейный поиск $O(N)$

Обход дерева

Обойти дерево ⇔ «посетить» все узлы по одному разу.

⇒ список узлов

КЛП – «корень-левый-правый» (в прямом порядке):

```
посетить корень
обойти левое поддерево
обойти правое поддерево
```

ЛКП – «левый-корень-правый» (симметричный):

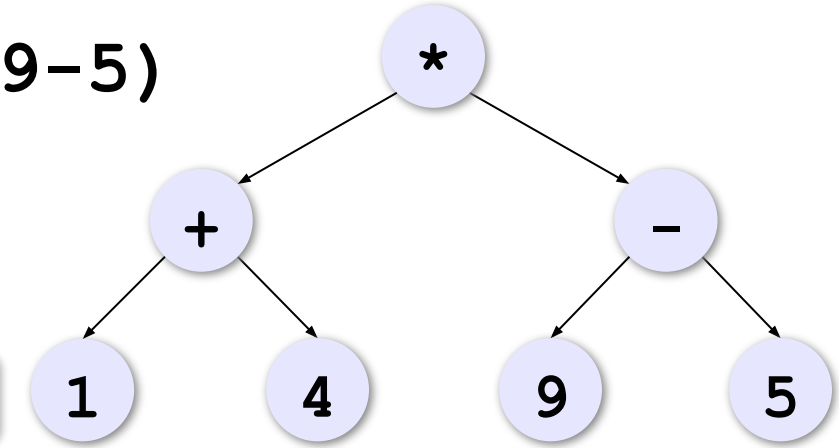
```
посетить корень
обойти левое поддерево
обойти правое поддерево
```

ЛПК – «левый-правый-корень» (в обратном порядке):

```
посетить корень
обойти левое поддерево
обойти правое поддерево
```

Обход дерева

(1+4)*(9-5)



«в глубину»

КЛП: * + 1 4 – 9 5 **префиксная форма**

ЛКП: 1 + 4 * 9 – 5 **инфиксная форма**

ЛПК: 1 4 + 9 5 – * **постфиксная форма**

Обход «в ширину»: «сыновья», потом «внуки», …

* + – 1 4 9 5

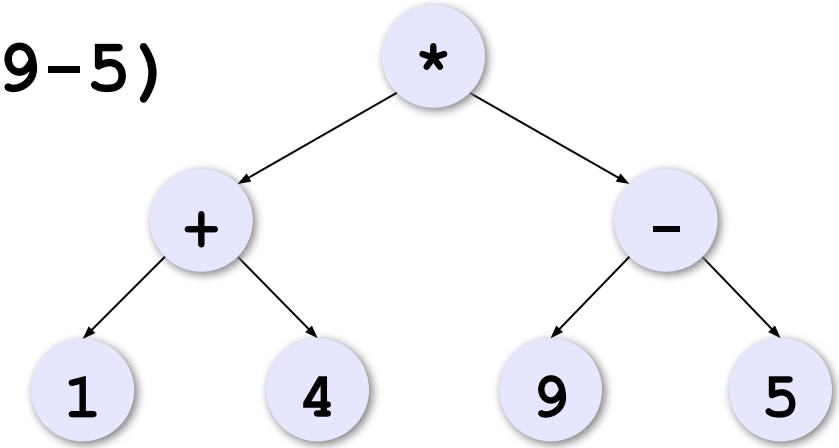
Обход КЛП – обход «в глубину»

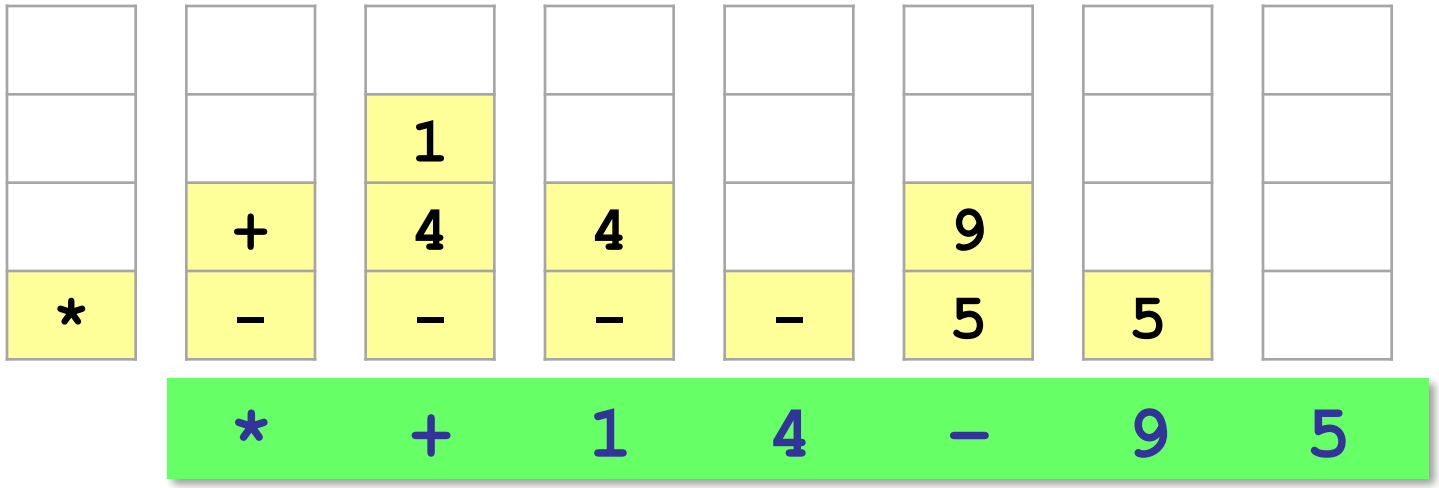
```
записать в стек корень дерева
while стек не пуст:
  выбрать узел V с вершины стека
  посетить узел V
  если у узла V есть правый сын то
    добавить в стек правого сына V
  если у узла V есть левый сын то
    добавить в стек левого сына V
```

? Почему сначала добавить правого сына?

Обход КЛП – обход «в глубину»

(1+4)*(9-5)





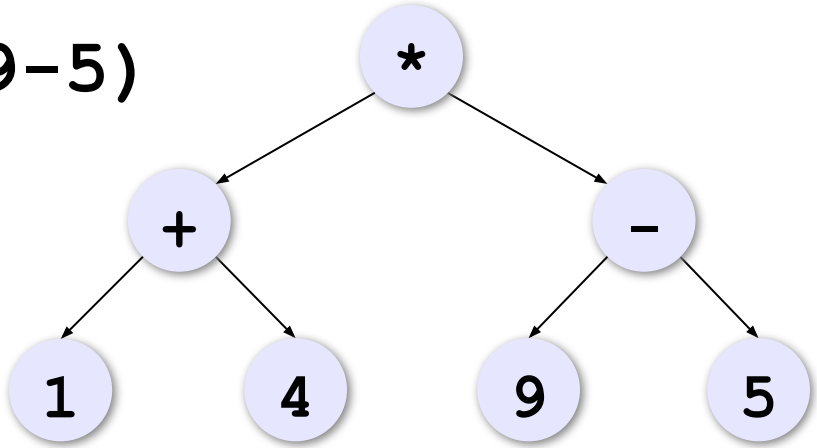
Обход «в ширину»

```
записать в очередь корень дерева
пока очередь не пуста:
  выбрать узел V из очереди
  посетить узел V
  если у узла V есть левый сын то
    добавить в очередь левого сына V
  если у узла V есть правый сын то
    добавить в очередь правого сына V
```

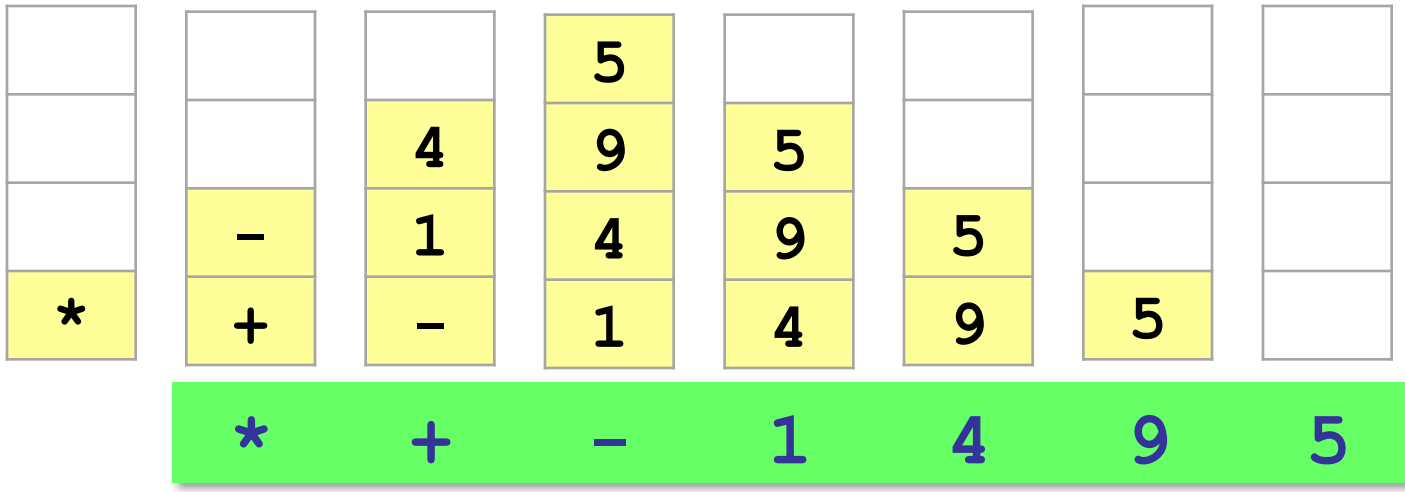
? Почему сначала добавить левого сына?

Обход «в ширину»

(1+4)*(9-5)



голова очереди

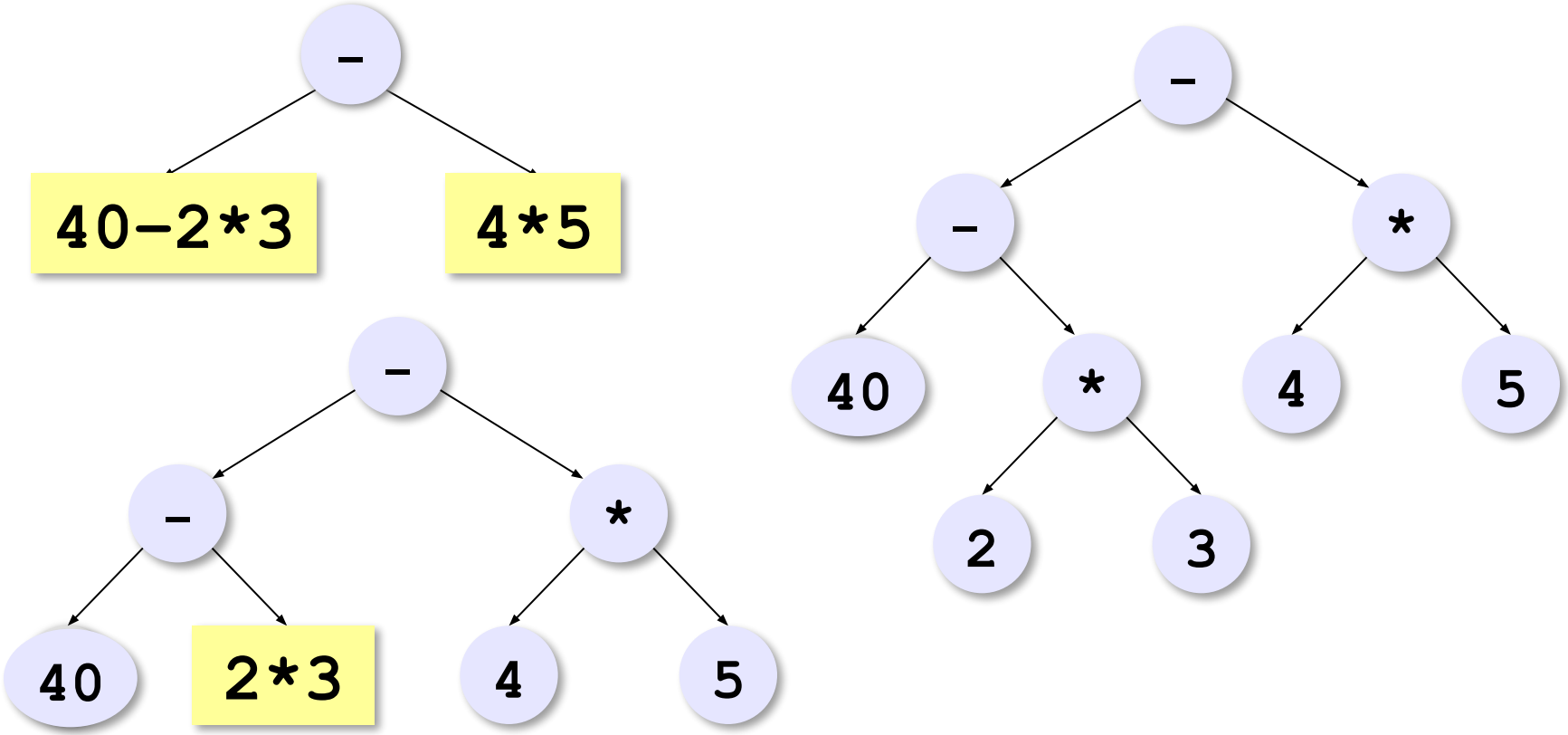


Вычисление арифметических выражений

`40-2*3-4*5`

? Что будет в корне дерева?

В корень дерева нужно поместить последнюю из операций с наименьшим приоритетом.



Вычисление арифметических выражений

Построение дерева:

```
найти последнюю выполняемую операцию
if операций нет:
   создать узел-лист
   return
поместить операцию в корень дерева
построить левое поддерево
построить правое поддерево
```

Рекурсия!

Вычисление арифметических выражений

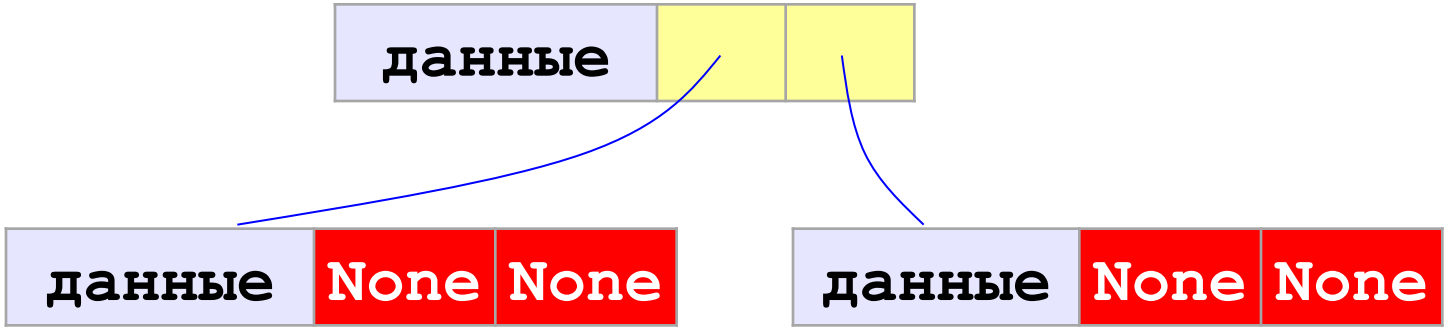
Вычисление по дереву:

```
n1 = значение левого поддерева
n2 = значение правого поддерева
результат = операция(n1, n2)
```

Рекурсия!

Использование связанных структур

Дерево – **нелинейная** структура ⇒ динамический массив неудобен!




```
class TNode:
   data = ""
   left = None
   right = None
```

новый тип: узел

Создание узла:

```
def newNode( d ):
   node = TNode()
   node.data = d
   node.left = None
   node.right = None
   return node
```

Основная программа

```
s = input ( "Введите выражение: " )
T = makeTree ( s )
print ( "Результат: ", calcTree(T) )
```

Нужно построить **makeTree** и **calcTree**!

Построение дерева

```
def makeTree ( s ):
  k = lastOp(s) # номер последней операции
  if k < 0:   # создать лист
    Tree = newNode ( s )
  else:# создать узел-операцию
    Tree = newNode ( s[k] )
    Tree.left = makeTree ( s[:k] )
    Tree.right = makeTree ( s[k+1:] )
  return Tree
```

вернёт ссылку на корень нового дерева

Рекурсия!

Вычисление по дереву

```
def calcTree ( Tree ):
    if Tree.left == None:
        return int(Tree.data)
    else:
        n1 = calcTree ( Tree.left )
        n2 = calcTree ( Tree.right )
        if Tree.data == "+":   res = n1 + n2
        elif Tree.data == "-": res = n1 - n2
        elif Tree.data == "*": res = n1 * n2
        else: res = n1 // n2
        return res
```

это число (лист)

! Рекурсия!

Вспомогательные функции

Приоритет операции:

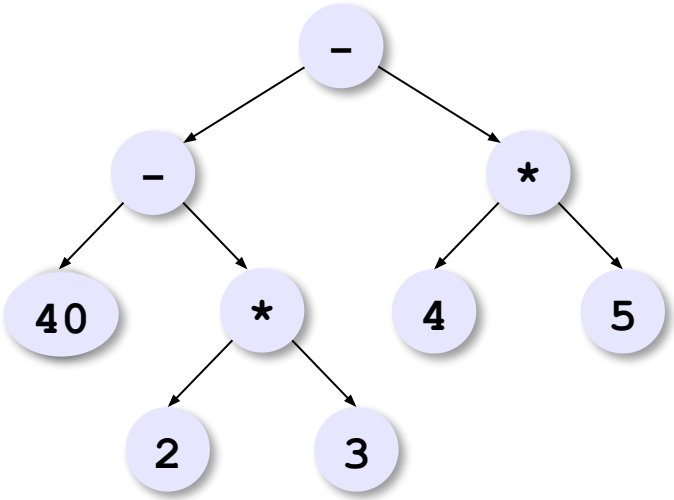
```
def priority ( op ):
  if op in "+-": return 1
  if op in "*/": return 2
  return 100
```

Номер последней операции:

```
def lastOp ( s ):
  minPrt = 50    # любое между 2 и 100
  k = -1
  for i in range(len(s)):
    if priority(s[i]) <= minPrt:
      minPrt = priority(s[i])
      k = i
  return k
```

? Почему <=?

Двоичное дерево в массиве



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–	–	*								
–	–	*	40	*						
–	–	*	40	*	4	5				
–	–	*	40	*	4	5			2	3

A[0] → A[1], A[2]

A[1] → A[3], A[4]

A[2] → A[5], A[6]

A[4] → A[9], A[10]

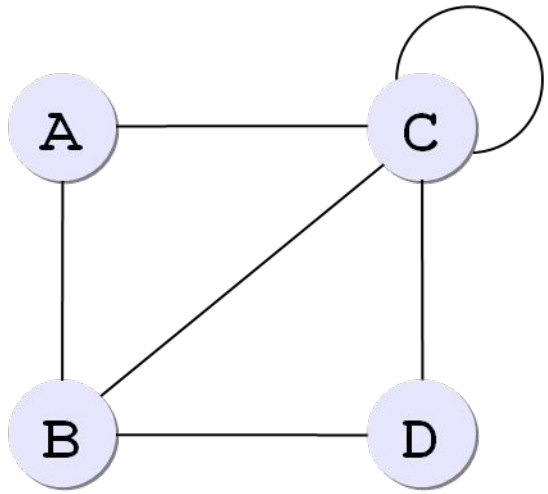
A[i] → A[?], A[?]

Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 43. Графы

Что такое граф?

Граф – это набор вершин и связей между ними (рёбер).



Матрица смежности:

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	1	1
D	0	1	1	0

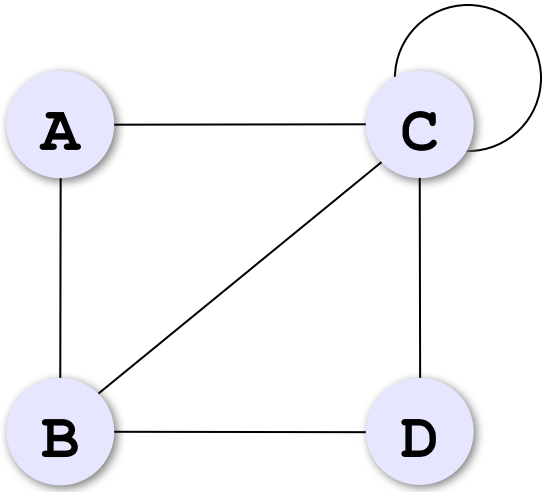
петля

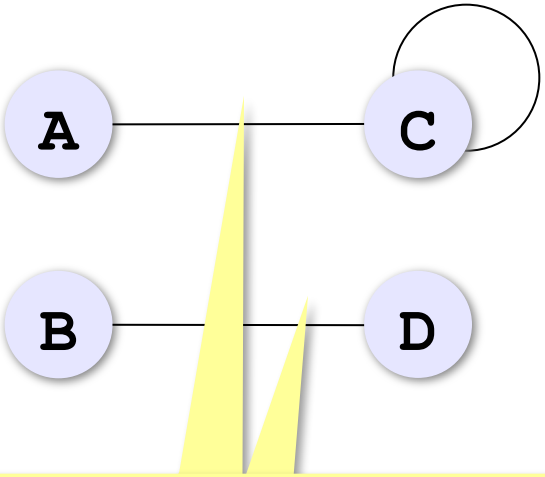
Список смежности:

```
( A(B, C),
  B(A, C, D),
  C(A, B, C, D),
  D(B, C) )
```

Связность графа

Связный граф – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.

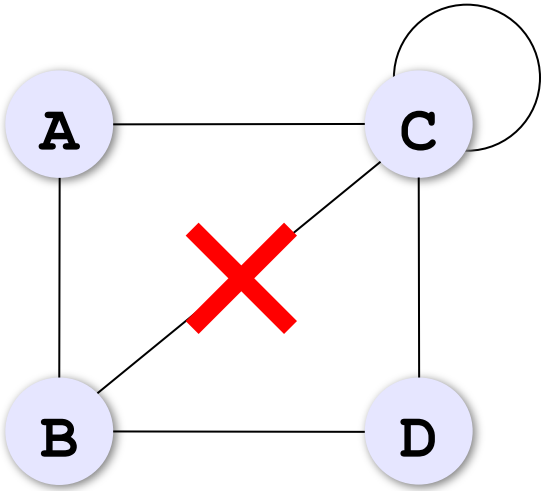




компоненты связности

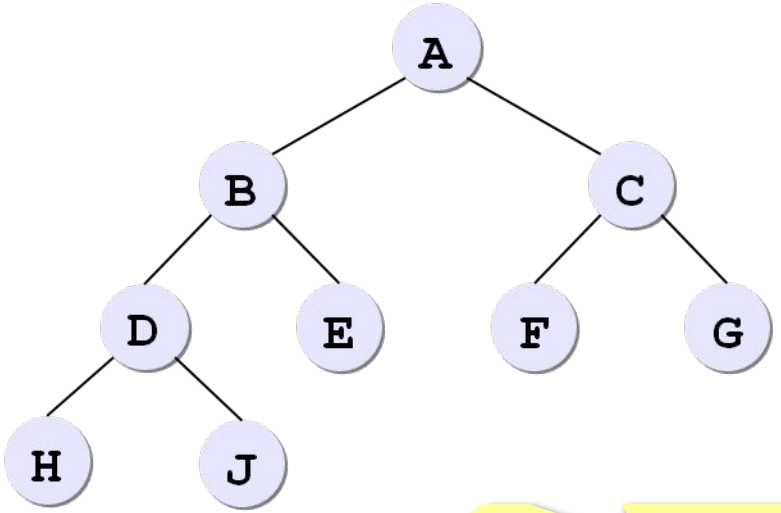
Дерево – это граф?

Дерево – это связный граф без циклов (замкнутых путей).



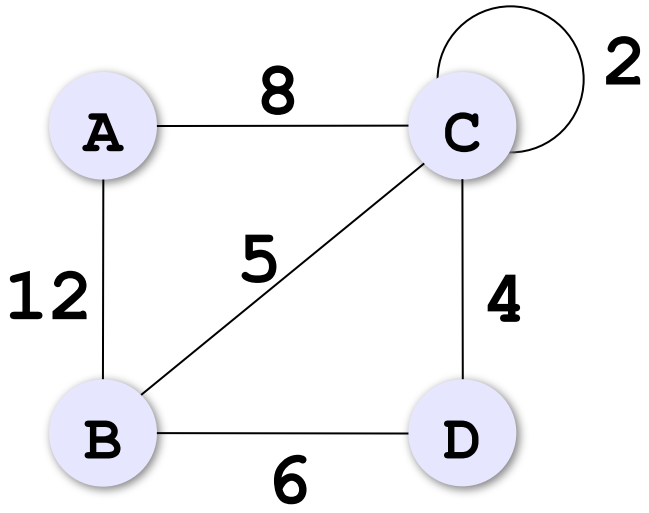
ABC ABDC

BCD CCC…



дерево

Взвешенные графы



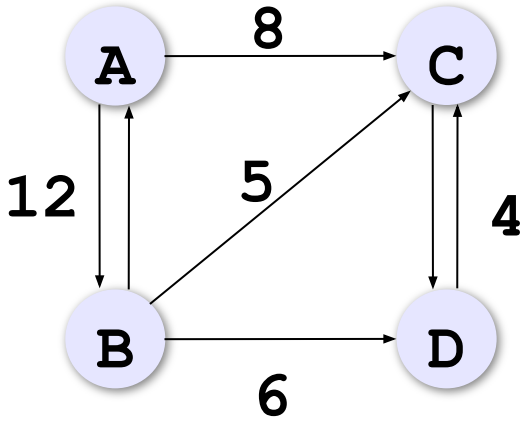
вес ребра

Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

Ориентированные графы (орграфы)

Рёбра имеют направление (начало и конец), рёбра называю **дугами**.



	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C				4
D			4	

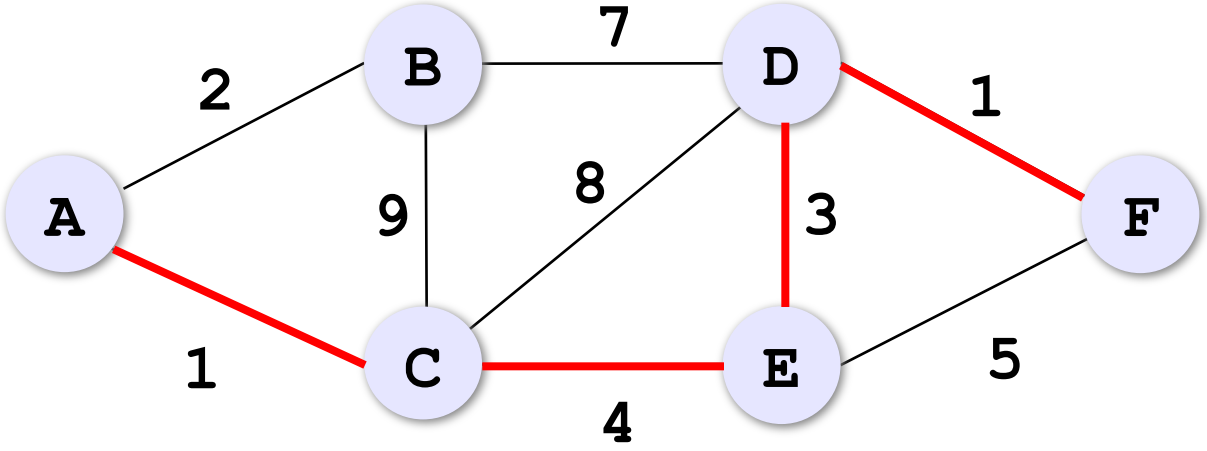
! Весовая матрица может быть несимметрична!

Жадные алгоритмы



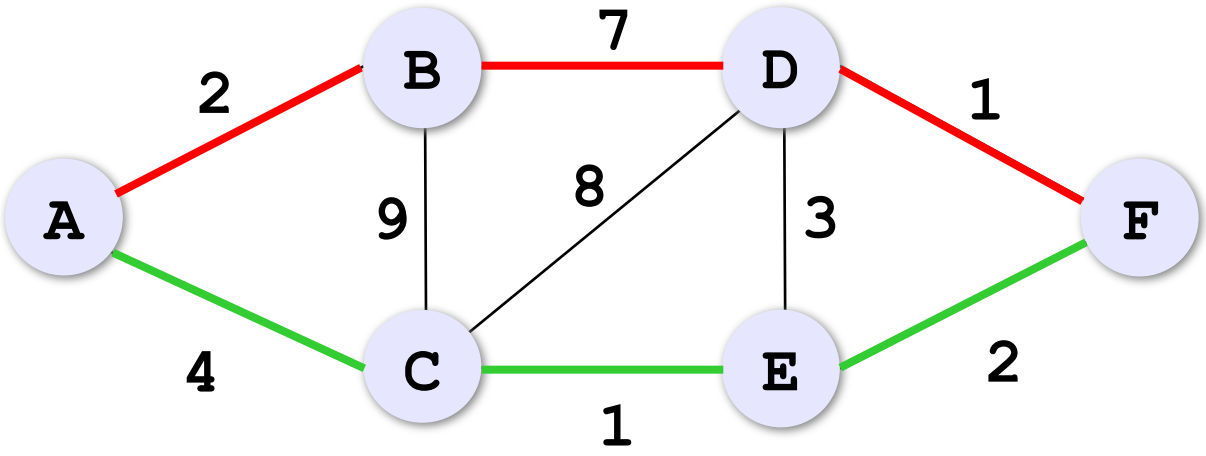
Жадный алгоритм – это многошаговый алгоритм, в котором на каждом шаге принимается решение, лучшее в данный момент.

Задача. Найти кратчайший маршрут из **A** в **F**.



Жадные алгоритмы

Задача. Найти кратчайший маршрут из **A** в **F**.

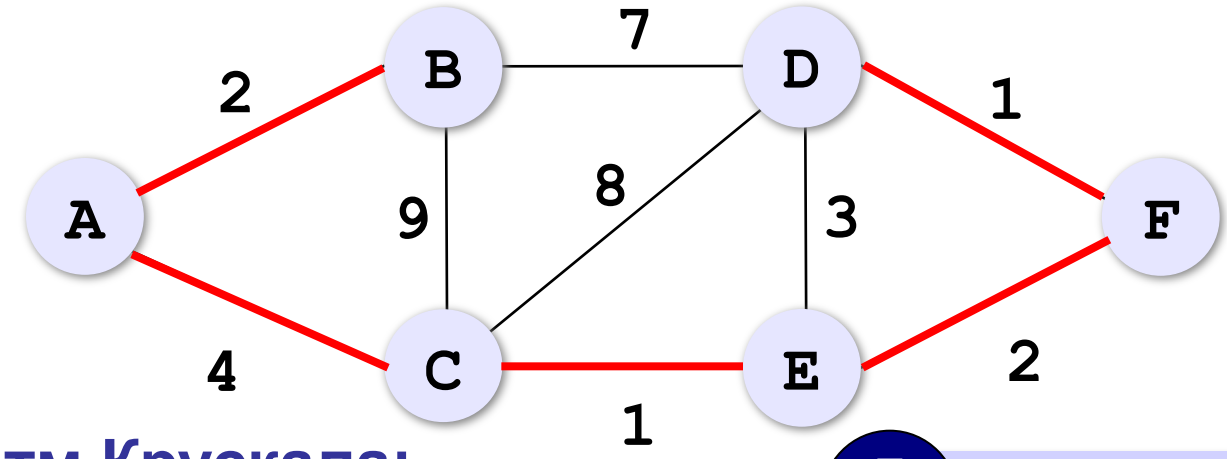


? Это лучший маршрут?

! Жадный алгоритм не всегда даёт наилучшее решение!

Задача Прима-Крускала

Задача. Между какими городами нужно проложить линии связи, чтобы все города были связаны в одну систему и общая длина линий связи была наименьшей? (**минимальное остовное дерево**)

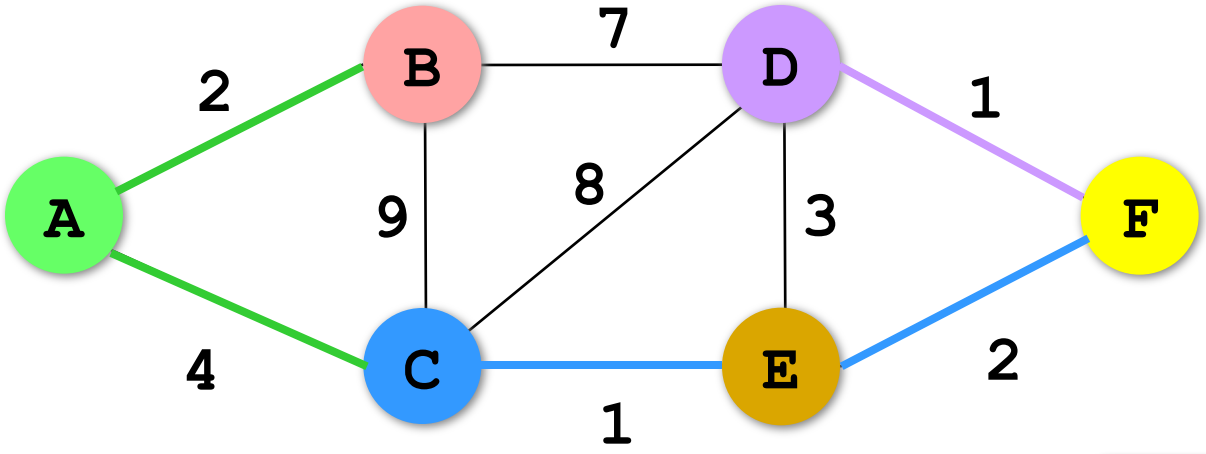


Алгоритм Крускала:

- начальное дерево – пустое
- на каждом шаге добавляется ребро минимального веса, которое ещё не входит в дерево и не приводит к появлению цикла

! Лучшее решение!

Раскраска вершин




```
col = [i for i in range(N)]
```

каждой вершине свой цвет

Сделать `N-1` раз:

- ищем ребро минимальной длины среди всех рёбер, ***концы которых окрашены в разные цвета***;
- найденное ребро `(iMin,jMin)` добавляется в список выбранных, и все вершины, имеющие цвет `col[jMin]`, перекрашиваются в цвет `col[iMin]`.

Раскраска вершин

Весовая матрица:

```
N = 6
W = []
for i in range(N):
  W.append ( [0]*N )
# заполнить матрицу
```

Вывод результата:

```
for edge in ostov:
  print ( "(", edge[0], ",",
                edge[1], ")" )
```

Раскраска вершин

```
ostov = []  # список выбранных рёбер
for k in range(N-1):
  minDist = 1e10  # очень большое число
  for i in range(N):
    for j in range(N):
      if col[i] != col[j] \
         and W[i][j] < minDist:
        iMin = i
        jMin = j
        minDist = W[i][j]
  ostov.append( (iMin, jMin) )
  c = col[jMin]
  for i in range(N):
    if col[i] == c:
      col[i] = col[iMin]
```

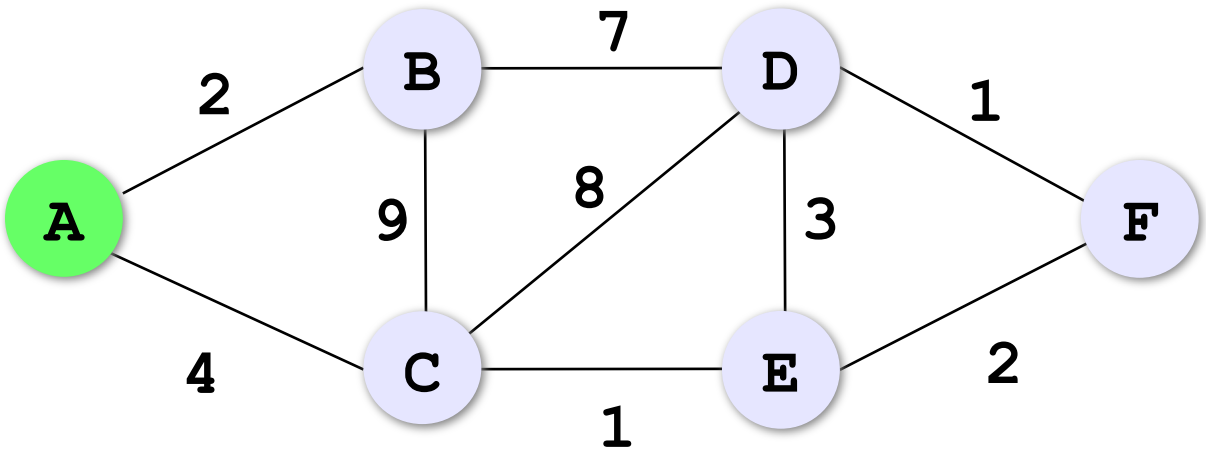
ищем ребро с минимальным весом

добавить новое ребро

перекраска вершин

Кратчайший маршрут

Алгоритм Дейкстры (1960):



Э.В. Дейкстра

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	∞	∞	∞
P	×	A	A	A	A	A

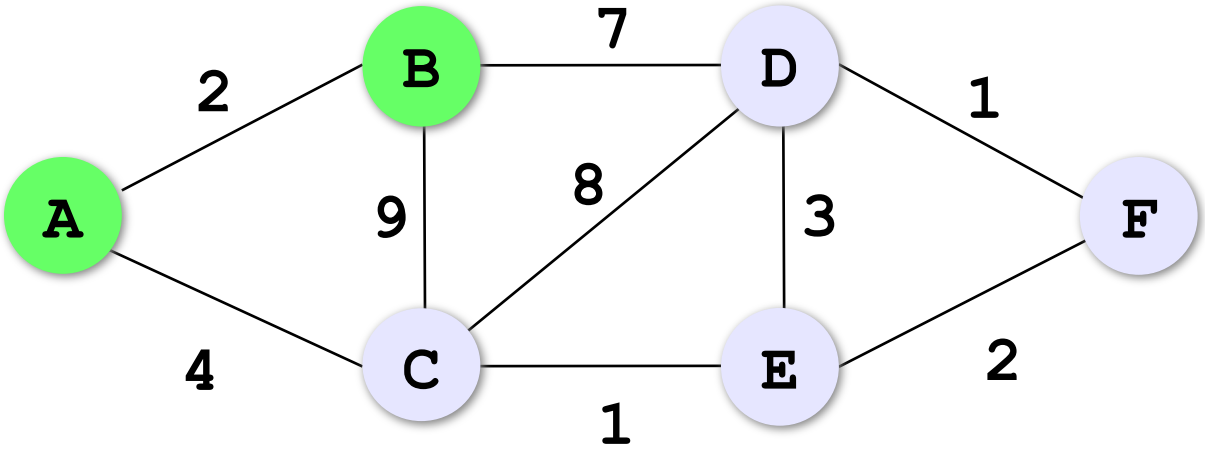
кратчайшее расстояние

откуда ехать

ближайшая от A невыбранная вершина

Кратчайший маршрут

Алгоритм Дейкстры (1960):

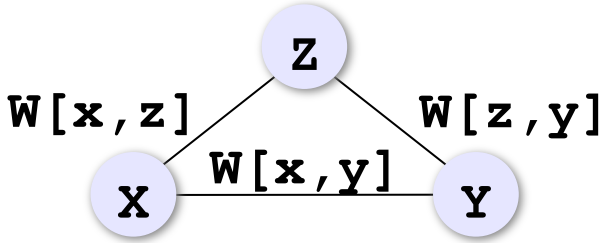


Э.В. Дейкстра

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	9	∞	∞
P	x	A	A	B	A	A

кратчайшее расстояние

откуда ехать

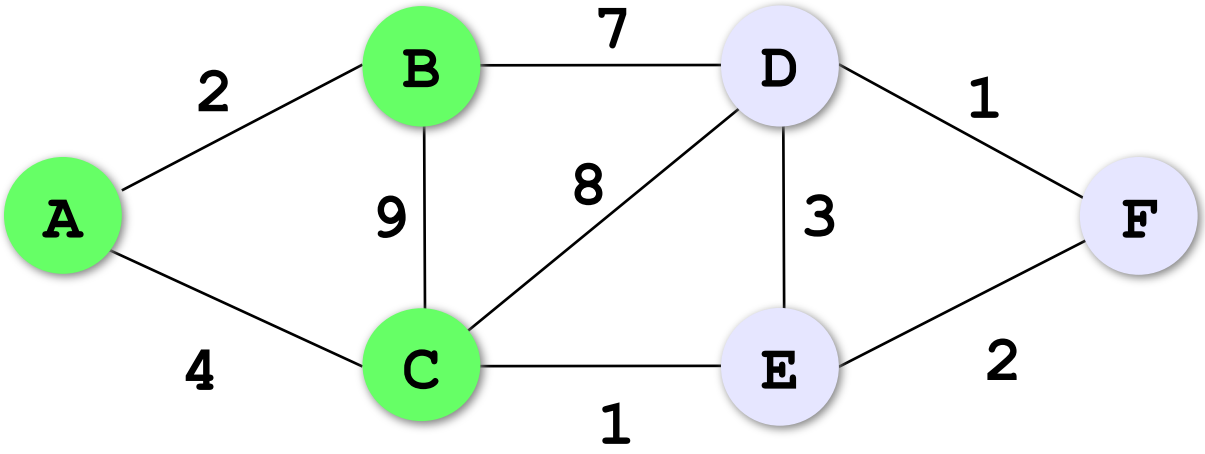


может быть так, что

$$W[x,z] + W[z,y] < W[x,y]$$

Кратчайший маршрут

Алгоритм Дейкстры (1960):

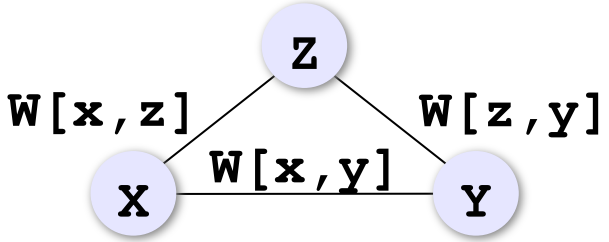


Э.В. Дейкстра

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	9	5	∞
P	x	A	A	B	C	A

кратчайшее расстояние

откуда ехать

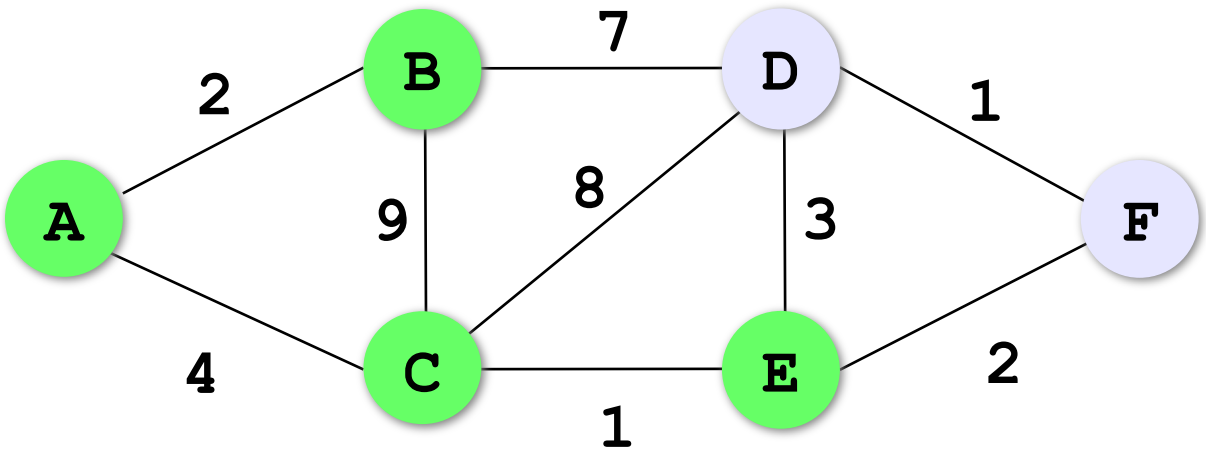


может быть так, что

$$W[x,z] + W[z,y] < W[x,y]$$

Кратчайший маршрут

Алгоритм Дейкстры (1960):



Э.В. Дейкстра

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	8	5	7
P	×	A	A	E	C	E

кратчайшее расстояние

откуда ехать

При рассмотрении вершин **F** и **D** таблица не меняется!

Кратчайший маршрут

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	8	5	7
P	×	A	A	E	C	E

длины кратчайших маршрутов из A в другие вершины

? Как найти сам маршрут?

	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	8	5	7
P	×	A	A	E	C	E

A → C → E → F

Алгоритм Дейкстры

Весовая матрица:

```
N = 6
W = []
for i in range(N):
  W.append ( [0]*N )
# заполнить матрицу
```

Вспомогательные массивы:

```
active = [True]*N # все не просмотрены
R = W[0][:] # скопировать в R строку W[0]
P = [0]*N   # только прямые маршруты
            # из вершины 0
active[0] = False
P[0] = -1
```

вершина A просмотрена

Алгоритм Дейкстры

Основной цикл:

```
for i in range(N-1):
    minDist = 1e10
    for j in range(N):
        if active[j] and R[j] < minDist:
            minDist = R[j]
            kMin = j
    active[kMin] = False
    for j in range(N):
        if R[kMin] + W[kMin][j] < R[j]:
            R[j] = R[kMin] + W[kMin][j]
            P[j] = kMin
```

выбор следующей вершины, ближайшей к **A**

проверка маршрутов через вершину **kMin**

Алгоритм Дейкстры

Вывод результата (маршрут 0 → N-1):

```
i = N-1
while i >= 0:
   print( i, end="" )
   i = P[i]
```

для начальной вершины `P[i]=-1`

переход к следующей вершине

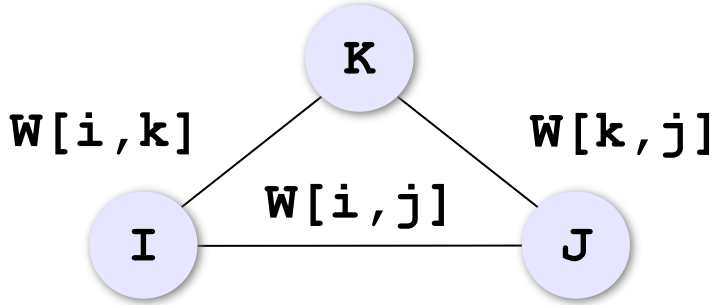
	A	B	C	D	E	F
R	0	2	4	8	5	7
P	x	A	A	E	C	E

A → C → E → F

Алгоритм Флойда

Все кратчайшие пути (из любой вершины в любую):

```
for k in range(N):
  for i in range(N):
    for j in range(N):
      if W[i][k]+W[k][j]<W[i][j]:
        W[i][j]=W[i][k]+W[k][j]
```



? Как найти сам маршрут?

Алгоритм Флойда + маршруты

Дополнительная матрица:

```
P = []
for i in range(N):
    P.append ( [i]*N )
    P[i][i] = -1
```

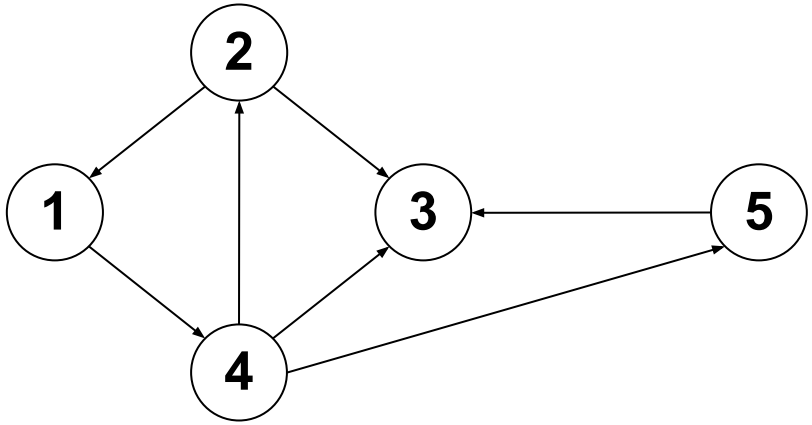
Кратчайшие длины путей и маршруты:

```
for k in range(N):
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            if W[i][k] + W[k][j] < W[i][j]:
                W[i][j] = W[i][k] + W[k][j]
                P[i][j] = P[k][j]
```

Списки смежности

Список смежности:

вершина 1: (**4**)
вершина 2: (**1**, **3**)
вершина 3: ( )
вершина 4: (**2**, **3**, **5**)
вершина 5: (**3**)




```
Graph = [ [],          # фиктивный элемент
          [4],    # для вершины 1
          [1,3], # ... для вершины 2
          [],          # ... для вершины 3
          [2,3,5],   # ... для вершины 4
          [3] ]      # ... для вершины 5
```

Списки смежности

Задача. Составить функцию, которая находит число путей из одной вершины в другую.

Основная программа:

```
Graph = [[], [4], [1,3], [],
         [2,3,5], [3]]
print ( pathCount (Graph, 1, 3, []) )
```

список посещённых вершин

откуда

куда

? Зачем список посещенных вершин?

Число путей: функция

списки смежности

список посещённых вершин

```
def pathCount ( graph, vStart, vEnd,
                                visited ):
  if vStart == vEnd:
    return 1
  visited.append ( vStart )
  count = 0
  for v in graph[vStart]:
    if not v in visited:
      count += pathCount ( graph, v, vEnd,
                           visited )
  visited.pop()
  return count
```

если уже пришли, выход

суммируем пути через соседние

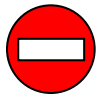
Задача коммивояжера

Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из города **1** и, посетив по разу в неизвестном порядке города **2,3,...N**, вернуться обратно в город **1**. В каком порядке надо обходить города, чтобы путь коммивояжера был кратчайшим?

Это NP-полная задача, которая строго решается только перебором вариантов (пока)!

Точные методы:

1) простой перебор;
2) метод ветвей и границ;
3) метод Литтла;
4) …

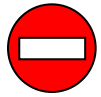


большое время счета для больших **N**

O(N!)

Приближенные методы:

5) метод случайных перестановок (*Matlab*)
6) генетические алгоритмы
7) метод муравьиных колоний
8) …



не гарантируется оптимальное решение

Некоторые задачи

Задача на минимум суммы. Имеется **N** населенных пунктов, в каждом из которых живет p_i школьников **(i=1,...,N)**. Надо разместить школу в одном из них так, чтобы общее расстояние, проходимое всеми учениками по дороге в школу, было минимальным.

Задача о наибольшем потоке. Есть система труб, которые имеют соединения в **N** узлах. Один узел **S** является источником, еще один – стоком **T**. Известны пропускные способности каждой трубы. Надо найти наибольший поток от источника к стоку.

Задача о наибольшем паросочетании. Есть **M** мужчин и **N** женщин. Каждый мужчина указывает несколько (от **0** до **N**) женщин, на которых он согласен жениться. Каждая женщина указывает несколько мужчин (от **0** до **M**), за которых она согласна выйти замуж. Требуется заключить наибольшее количество моногамных браков.

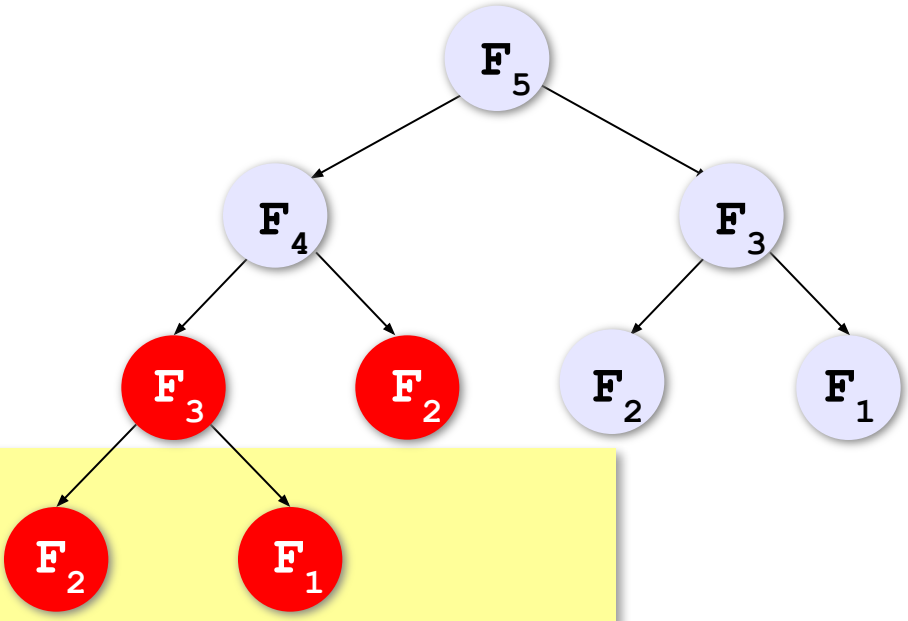
Алгоритмизация и программирование. Язык Python

§ 43. Динамическое программирование

Что такое динамическое программирование?

Числа Фибоначчи:

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ при } n > 2$$



Рекурсия!

```
def Fib ( n ):
    if n<3:
        return 1
    return Fib(n-1) + Fib(n-2)
```

повторное вычисление тех же значений

Запоминать то, что вычислено!

Динамическое программирование

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	1			

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ при } n > 2$$

Создание массива:

```
F = [1]*(N+1) # чтобы начать с 1
```

Заполнение массива:

```
for i in range(3,N+1):
    F[i] = F[i-1] + F[i-2]
```

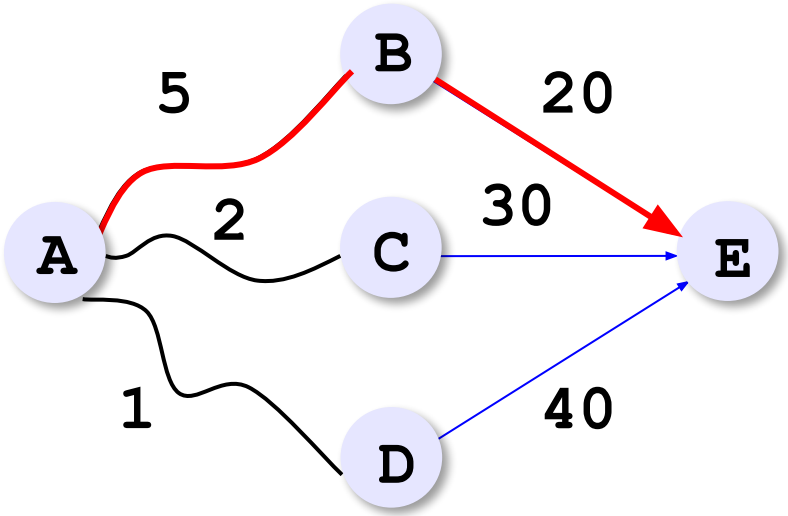
F_{35}: рекурсия: **58 с**
дин. программирование: **< 0,001 с**

? Можно ли обойтись без массива?

нужны только два последних!

Динамическое программирование

Динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем сведения их к более простым задачам того же типа.




```
ABE:  5 + 20 = 25
ACE:  2 + 30 = 32
ADE:  1 + 40 = 41
```

увеличение скорости

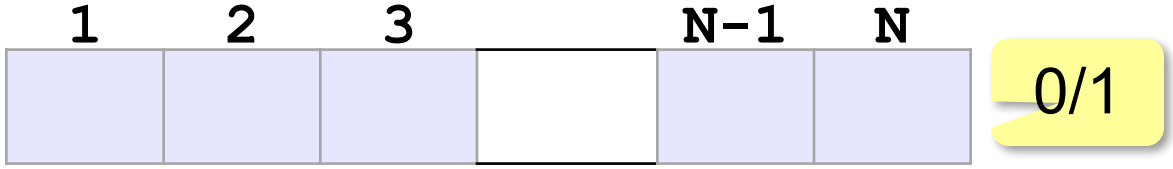
дополнительный расход памяти

Количество вариантов

Задача. Найти количество K_N цепочек, состоящих из N нулей и единиц, в которых нет двух стоящих подряд единиц.

Решение «в лоб»:

битовые цепочки



- построить все возможные цепочки
- проверить каждую на «правильность»

? Сколько возможных цепочек? 2^N

Сложность алгоритма $O(2^N)$

Количество вариантов

Задача. Найти количество K_N цепочек, состоящих из N нулей и единиц, в которых нет двух стоящих подряд единиц.

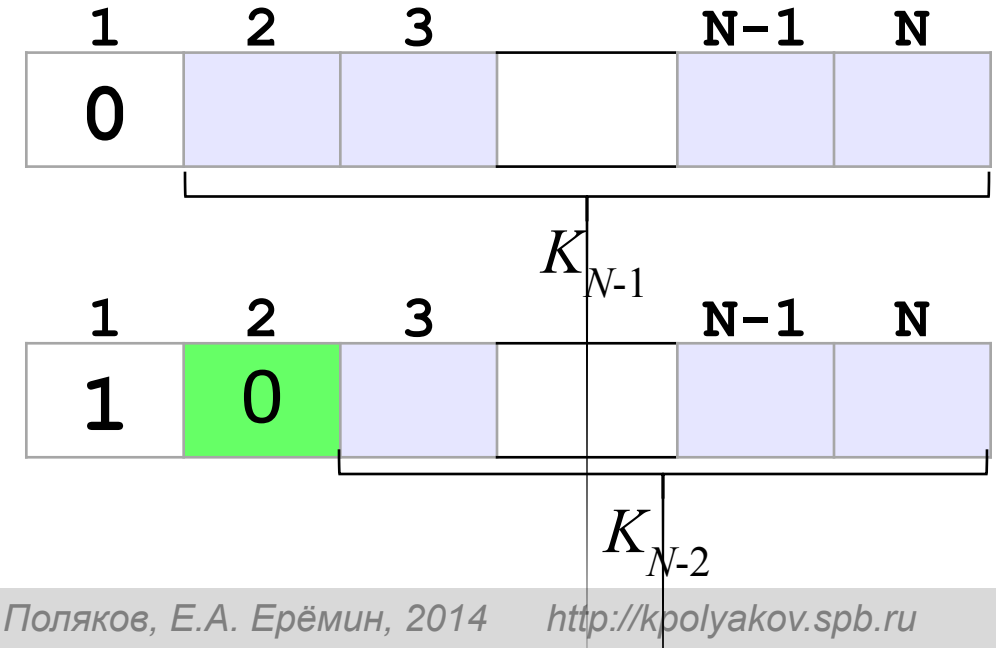
Простые случаи:

$N = 1$: **0** **1** $K_1 = 2$

$N = 2$: **00** **01** **10** $K_2 = 3$

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} = F_{N+2}$$

Общий случай:



K_{N-1} «правильных» цепочек начинаются с нуля!

K_{N-2} «правильных» цепочек начинаются с единицы!

Оптимальное решение

Задача. В цистерне N литров молока. Есть бидоны объемом 1, 5 и 6 литров. Нужно разлить молоко в бидоны так, чтобы все бидоны были заполнены и количество используемых бидонов было **минимальным**.

Перебор?

при больших N – очень долго!

«Жадный алгоритм»?

$N = 10$: 10 = 6 + 1 + 1 + 1 + 1 $K = 5$

10 = 5 + 5 $K = 2$

! Не даёт оптимального решения!

Оптимальное решение

K_N – минимальное число бидонов для N литров

Сначала выбрали бидон…

1 л: $K_N = 1 + K_{N-1}$

5 л: $K_N = 1 + K_{N-5}$

6 л: $K_N = 1 + K_{N-6}$

} min

Рекуррентная формула:

$$K_N = 1 + \min(K_{N-1}, K_{N-5}, K_{N-6}) \quad \text{при } N \geq 6$$

$$K_N = 1 + \min(K_{N-1}, K_{N-5}) \quad \text{при } N = 5$$

$$K_N = 1 + K_{N-1} \quad \text{при } N < 5$$

Оптимальное решение (бидоны)

$$K_N = 1 + \min(K_{N-1}, K_{N-5}, K_{N-6})$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4	2
P	0	1	1	1	1	5	6	1	1	1	5

объём бидона, взятого последним

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4	2
P	0	1	1	1	1	5	6	1	1	1	5

2 бидона 5 + 5

! Похоже на алгоритм Дейкстры!

Задача о куче

Задача. Из камней весом p_i (i=1, …, N) набрать кучу весом ровно W или, если это невозможно, максимально близкую к W (но меньшую, чем W).

Решение «в лоб»:

1	2	3		N-1	N
1	0	0		1	0

камень взят

камень не взят

! Выбрать лучшую цепочку!

? Сколько возможных цепочек? 2^N

Сложность алгоритма $O(2^N)$

Задача о куче

Задача. Из камней весом p_i (i=1, …, N) набрать кучу весом ровно W или, если это невозможно, максимально близкую к W (но меньшую, чем W).

Идея: сохранять в массиве решения всех более простых задач этого типа (при меньшем количестве камней N и меньшем весе W).

Пример: W = 8, камни 2, 4, 5 и 7

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
2	4	0								
3	5	0								
4	7	0								

w

базовые случаи

i

p_i

`T[i][w]` – оптимальный вес, полученный для кучи весом `w` из `i` первых по счёту камней.

Задача о куче

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
2	4	0	0	2	2	4	4	6	6	6
3	5	0								
4	7	0								

Добавляем камень с весом 4:

для `w < 4` ничего не меняется!

для `w ≥ 4`:

если его не брать: `T[2][w] = T[1][w]`

если его взять: `T[2][w] = 4 + T[1][w-4]`

? Какой вариант выбрать?

`max`

Задача о куче

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
2	4	0	0	2	2	4	4	6	6	6
3	5	0	0	2	2	4	5	6	7	7
4	7	0								

Добавляем камень с весом 5:

для `w < 5` ничего не меняется!

для `w ≥ 5`:

если его не брать: `T[3][w] = T[2][w]`

если его взять: `T[3][w] = 5 + T[2][w-5]`

`max`

Задача о куче

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
2	4	0	0	2	2	4	4	6	6	6
3	5	0	0	2	2	4	5	6	7	7
4	7	0	0	2	2	4	5	6	7	7

Добавляем камень с весом 7:

для `w < 7` ничего не меняется!

для `w ≥ 7`:

если его не брать: `T[4][w] = T[3][w]`

если его взять: `T[4][w] = 7 + T[3][w-7]`

max

Задача о куче

Добавляем камень с весом p_i:

для $w < p_i$ ничего не меняется!

для $w \geq p_i$:

если его не брать: `T[i][w] = T[i-1][w]`

если его взять: `T[i][w] = p_i + T[i-1][w-p_i]`

max

Рекуррентная формула:

при $w < p_i$: `T[i][w] = T[i-1][w]`

при $w \geq p_i$:
```
T[i][w] = max( T[i-1][w],
               p_i+T[i-1][w-p_i])
```

Задача о куче

? Какие камни нужно взять?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
4	0	0	2	2	4	4	6	6	6
5	0	0	2	2	4	5	6	7	7
7	0	0	2	2	4	5	6	7	7

Оптимальный вес 7 5 + 2

Задача о куче

? Какова сложность алгоритма?

Заполнение таблицы:

W+1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	0	2	2	2	2	2	2	2
4	0	0	2	2	4	4	6	6	6
5	0	0	2	2	4	5	6	7	7
7	0	0	2	2	4	5	6	7	7

! Сложность $O(N \cdot W)$!

псевдополиномиальный

Количество программ

Задача. У исполнителя Утроитель есть команды:

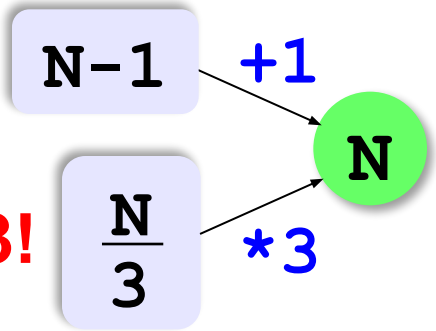
1. **прибавь 1**
2. **умножь на 3**

Сколько есть разных программ, с помощью которых можно из числа **1** получить число **20**?

Как решать, не выписывая все программы?

Количество программ

Как получить число N:



последняя команда

если делится на 3!

Рекуррентная формула:

$K_N = K_{N-1}$ если N не делится на 3

$K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$ если N делится на 3

Количество программ

Рекуррентная формула:

$K_N = K_{N-1}$ если N не делится на 3

$K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$ если N делится на 3

Заполнение таблицы:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5

одна пустая!

K_2+K_1

K_5+K_2

K_8+K_3

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K_N	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

Количество программ

20

Только точки изменения:

N	1	3	6	9	12	15	18	21
K_N	1	2	3	5	7	9	12	15

Программа:

```
K = [0]*(N+1)
K[1] = 1
for i in range(2,N+1):
  K[i] = K[i-1]
  if i % 3 == 0:
    K[i] += K[i//3]
```

? Где ответ?

Размен монет

Задача. Сколькими различными способами можно выдать сдачу размером W рублей, если есть монеты достоинством p_i (i=1, …, N)? В наборе есть монета достоинством 1 рубль ($p_1 = 1$).

Перебор?

при больших N и W – очень долго!

Динамическое программирование:

запоминаем решения всех задач меньшей размерности: для меньших значений W и меньшего числа монет N.

Размен монет

Пример: W = 10, монеты 1, 2, 5 и 10

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1										
3	5	1										
4	10	1										

w

базовые случаи

i

p_i

`T[i][w]` – количество вариантов для суммы `w` с использованием `i` первых по счёту монет.

Рекуррентная формула (добавили монету p_i):

при $w < p_i$: `T[i][w] = T[i-1][w]`

при $w \geq p_i$: `T[i][w] = T[i-1][w] + T[i][w-p_i]`

без этой монеты

все варианты размена остатка

Размен монет

Пример: W = 10, монеты 1, 2, 5 и 10

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3	5	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10
4	10	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	11

Рекуррентная формула (добавили монету p_i):

при $w < p_i$: `T[i,w] = T[i-1][w]`

при $w \geq p_i$: `T[i,w] = T[i-1][w] + T[i][w-`p_i`]`

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. wallpaperscraft.com
2. www.mujerhoy.com
3. www.pinterest.com
4. www.wayfair.com
5. www.zchocolat.com
6. www.russiantable.com
7. www.kursachworks.ru
8. ebay.com
9. centrgk.ru
10. www.riverstonellc.com
11. 53news.ru
12. 10hobby.ru
13. ru.wikipedia.org
14. иллюстрации художников издательства «Бином»
15. авторские материалы