

**АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЗБІЛЬШЕННЯ РОЗМІРНОСТІ ЗАДАЧІ НА  
ДОВЖИНУ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ**

**Малієнко О.О.**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

# Постановка задачі

На мові теорії розкладів задача формулюється наступним чином:

- 1) задана скінчена множина робіт та скінчена множина виконавців;
- 2) кожен виконавець може виконувати будь-яку роботу;
- 3) тривалість виконання роботи  $i$  не залежить від виконавця і дорівнює однаковому проміжку часу для всіх робіт;
- 4) можливо паралельне виконання декількох робіт;
- 5) на порядок виконання деяких робіт можуть накладатися технологічні обмеження.

Нехай  $n$  – кількість робіт,  $m$  – кількість виконавців,  $t$  – довжина розкладу.

Задача 1. За заданим значенням  $t$  побудувати допустимий розклад з мінімальним значенням  $m$ .

Задача 2. За заданим значенням  $m$  побудувати допустимий розклад з мінімальним значенням  $t$ .

# Постановка задачі

Сформулюємо ці задачі на мові теорії упорядкувань.

Нехай  $G = \{V, U\}$  – оргграф,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  – множина вершин,  $U$  – множина дуг. Тоді,  $G$  – модель обмежень на порядок виконання робіт,  $V$  – множина робіт,  $U$  – множина технологічних обмежень, а  $(i, j) \in U$  означає, що робота  $i$  повинна бути виконана до початку виконання роботи  $j$ .

Довжиною  $l(S)$  упорядкування  $S$  називається кількість непорожніх місць упорядкування  $S$ .

Шириною  $h(S)$  упорядкування  $S$  називається кількість елементів найбільшої за потужністю множини  $S[p]$ .

Упорядкування  $S$  множини  $V$  вершин оргграфа  $G$  називається паралельним упорядкуванням вершин оргграфа  $G$ , якщо з того, що  $(i, j) \in U$ , випливає, що  $i$  розташовується в  $S$  лівіше  $j$ . Тобто, якщо  $i \in S[p]$  та  $j \in S[q]$ , то  $p < q$ . Паралельне упорядкування називається оптимальним, якщо воно має мінімальну ширину при заданій довжині або мінімальну довжину при заданій ширині.

Тобто, задачі 1 і 2 можна сформулювати наступним чином:

- Задача 1. По заданому графу  $G$  і заданому значенню  $l$  треба побудувати паралельне упорядкування  $S$  мінімальної ширини.
- Задача 2. По заданому графу  $G$  і заданому значенню  $h$  треба побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини  $l$ .

Ці задачі позначають відповідно  $S(G, l, h)$  та  $S(G, h, l)$ .

# Аномальні випадки

Досліджуючи точні та наближені методи розв'язання класичних задач, можна зробити висновок, що послаблення технологічних обмежень, збільшення ширини  $h$  або зменшення часу виконання робіт може призводити до зменшення значення  $I$ . Але, при практичному дослідженні задачі виявляється, що варіювання будь-якого з параметрів, включаючи і список пріоритетів, імовірно призводить до виникнення аномалії, а саме: збільшення довжини упорядкування. Під аномаліями розуміються випадки, коли здається інтуїтивно зрозумілі висновки не підтверджуються. Грехем розглянув задачу, коли задана скінчена множина робіт та скінчена множина виконавців. На порядок виконання робіт задані технологічні обмеження та відомий час виконання кожної роботи. Крім того, він досліджував випадки, коли задані бажані пріоритети виконання робіт. При аналізі цієї задачі такий аномальний ефект може бути виявлений при наступних змінах параметрів:

- 1) зменшенні часу робіт;
- 2) послабленні обмежень на порядок робіт;
- 3) збільшенні кількості виконавців;
- 4) зміні порядку пріоритетів виконання робіт.

У даній роботі досліджується випадок можливого впливу збільшення кількості вершин графа та посилення технологічних обмежень на довжину паралельного упорядкування. Логічно сподіватися, що значення цільової функції у цьому випадку не повинно зменшитися. Але аналіз задачі призводить до іншого результату. Розглянемо його більше детально.

# Приклад 1

Нехай задано граф  $G$  (рис.1),  $h=3$ ,  $L=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$ ,  $T=(2,2,3,2,4,2,2,3,2,1,5)$ . Також задаємо граф  $G'$  (рис.2), для якого  $L'=(12,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$ ,  $T'=(2,2,3,2,4,2,2,3,2,1,5,4)$ . Побудуємо оптимальні упорядкування  $S$  та  $S'$  та знайдемо їх довжини  $l$  та  $l'$  відповідно.

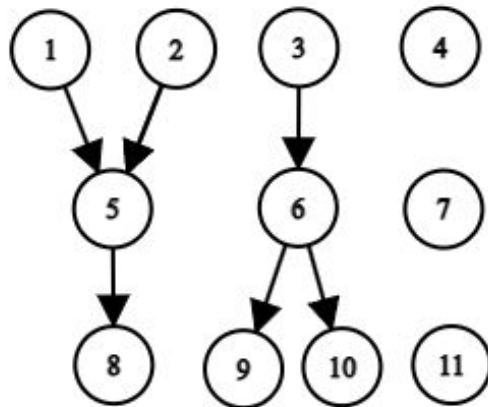


Рис. 1. Граф  $G$

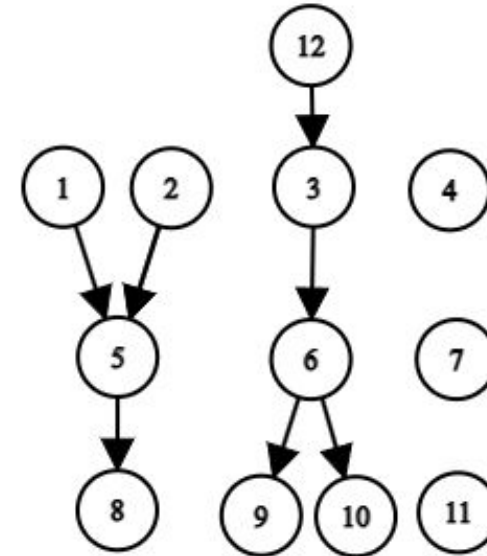


Рис. 2. Граф  $G'$

# Приклад 1

Побудувавши упорядкування  $S$  та  $S'$ , знаходимо, що довжина  $l=12$ , а  $l'=11$ . Тобто, при збільшенні кількості робіт та посиленні технологічних обмежень, отримуємо паралельне упорядкування меншої довжини.

Оптимальне упорядкування для графа  $G$  Таблиця 1

1	1	4	4	7	7	8	8	8			
2	2	5	5	5	5	10	11	11	11	11	11
3	3	3	6	6	9	9					

Оптимальне упорядкування для графа  $G'$  Таблиця 2

12	12	12	12	3	3	3	6	6	9	9
1	1	4	4	7	7	8	8	8	10	
2	2	5	5	5	5	11	11	11	11	11

# Результати дослідження

Аналіз структурних характеристик графів показав, що при збільшенні кількості робіт довжина оптимального упорядкування може зменшуватись, що також певним чином можна вважати аномалією. Дана аномалія виникає за рахунок додавання вершин з більш високими пріоритетами, які можуть бути виконані відразу після початку процесу розподілу, тим самим кардинально змінюючи послідовність виконання наступних завдань. Або додаванні вершин, які змінюють множину технологічних обмежень таким чином, що стає можливим узгодження деяких завдань на виконання, які раніше були розподілені в часі. Результати даного аналізу сформульовані у вигляді відповідних доведених тверджень.

Подальшого дослідження потребує отримання умов, при яких дані аномалії не виникатимуть та виділення підкласів задач, для яких вказані зміни початкових умов не впливатимуть на оптимальність розв'язку.

Дякую за  
увагу!