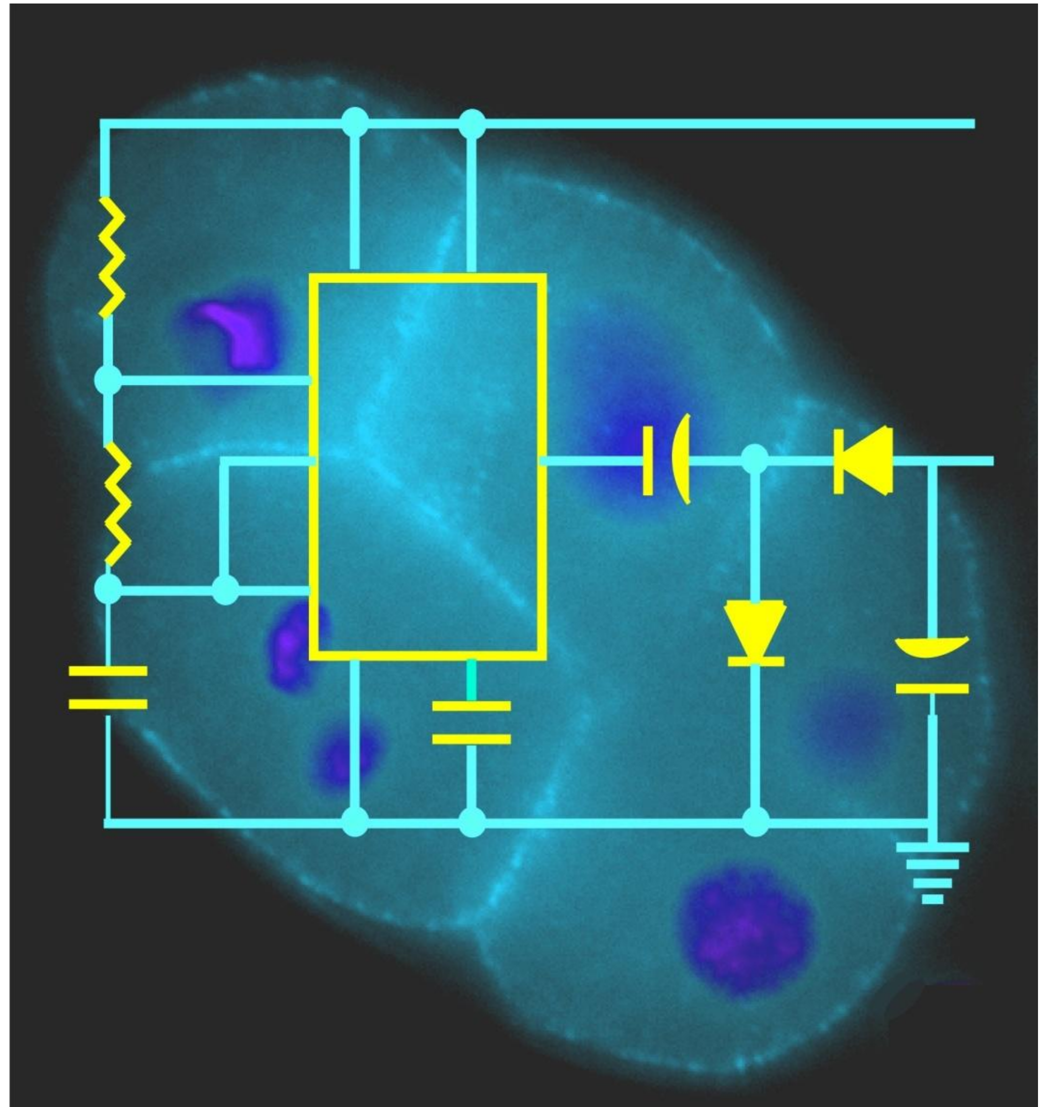
Информационные технологии в биологических исследованиях

Лекция 4: **Принципы построения математических моделей.**

Примеры:

– популяционная модель (экспо-ненциальная, логистическая)

- взаимодействие двух популяций



Базовые модели

В любой науке существуют простые модели, которые поддаются аналитическому исследованию и обладают свойствами, которые позволяют описывать целый спектр природных явлений

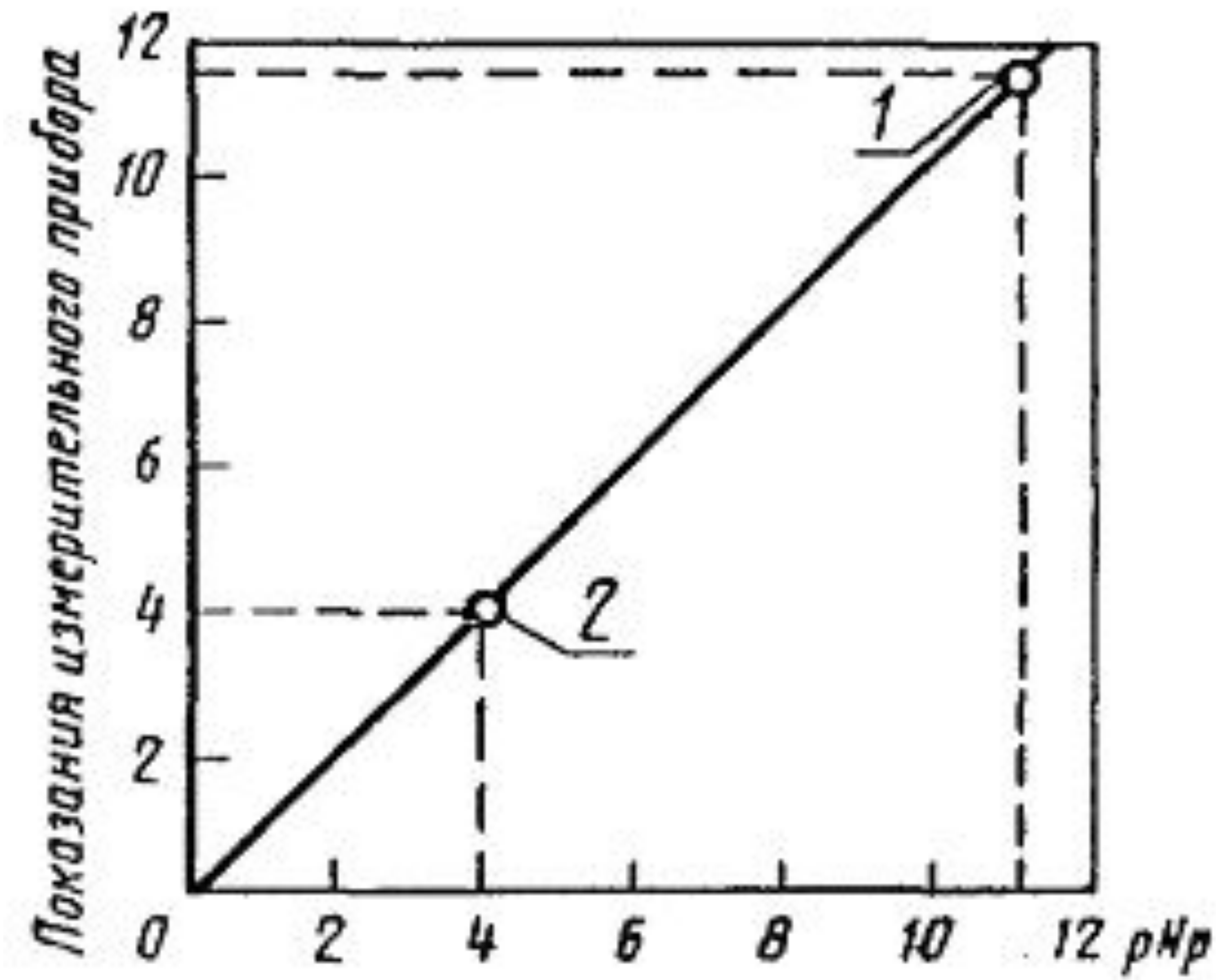
Благодаря простоте и наглядности, базовые модели очень полезны при изучении самых разных систем

Базовые модели в биологии

- Калибровачная зависимость
- Популяционные модели:

  - В отсутствии ограничений
  - С ограничениями – логистическая кривая
  - Взаимодействие популяций, хищник-жертва

Самая простая и очень нужная модель в биологии – калибровочная кривая, вернее процесс ее построения и использования.



Самая простая и очень нужная модель в биологии – калибровочная кривая, вернее процесс ее построения и использования.

Формально, в случае линейной зависимости получается модель, основанная на уравнении регрессии

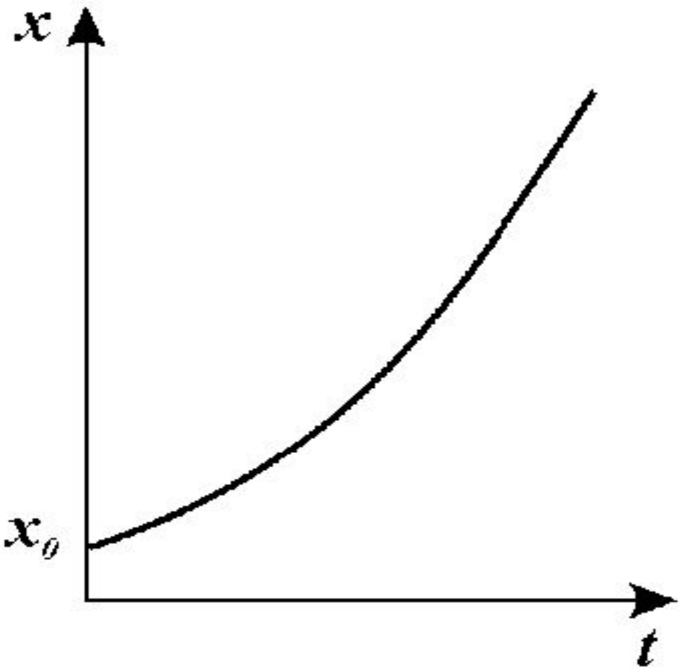
$y = mx + y_0$ **отсюда** $x = (y - y_0) / m$

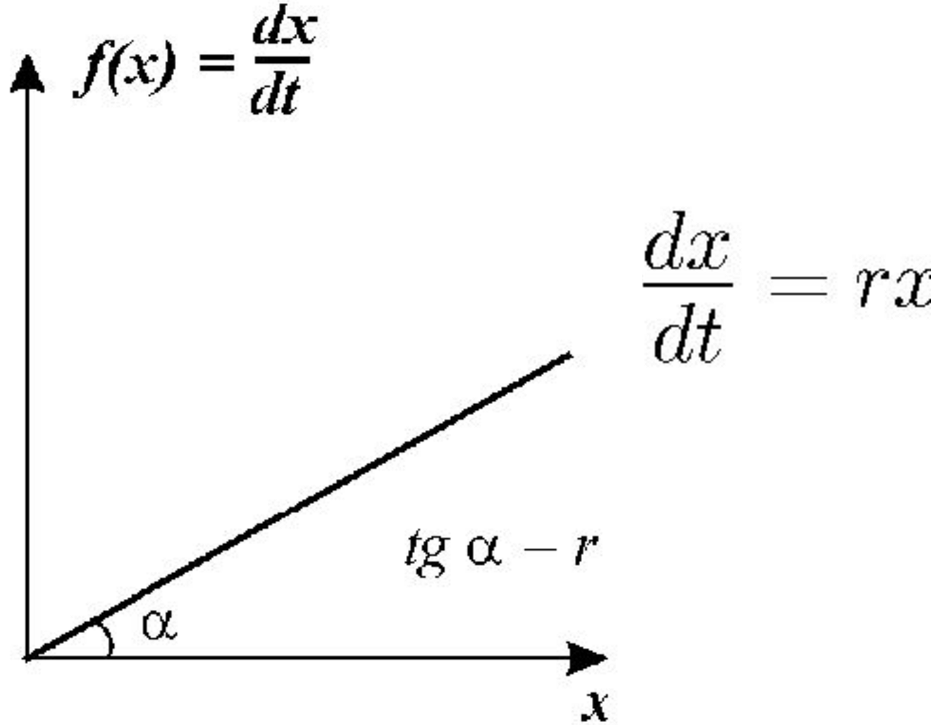
y – **показание измерительного инструмента**
m – **чувствительность системы измерения**
y_0 – **фон (шум прибора)**
x – **неизвестная концентрация вещества**

Модели роста численности популяции

Любой процесс происходит во времени.
Скорость – изменение за единицу времени.
Скорость может быть постоянной, уменьшаться или возрастать.

Рост показателя и скорость его изменения





Фундаментальное предположение для модели роста - скорость роста пропорциональна численности популяции, будь то популяция зайцев или популяция клеток

Рост колонии микроорганизмов

За время Δt прирост численности равен:

$\Delta x = R - S,$

где R — число родившихся и S — число умерших за время Δt особей.

Положим $R(x)$ и $S(x)$ - скорости рождения и смерти. Тогда

$R = R(x)\,\Delta t, \qquad S = S(x)\,\Delta t.$

Подставляем в первое уравнение и получим:

$\Delta x = [R(x) - S(x)]\,\Delta t$

Разделив на Δt и переходя к пределу при t —> 0, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = R(x) - S(x)$$

Рост колонии микроорганизмов

В простейшем случае, когда рождаемость и смертность пропорциональны численности:

α скорость рождаемости, например, на 100 особей рождается 10 новых в день, **β** скорость смертности, , например, на 100 особей гибнут 5 в день - это рост, или 10 – это стационарное состояние, или 15 – это убыль численности.

Тогда можно записать

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x; \quad \alpha - \beta = r$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$

Решение уровнения $\frac{dx}{dt} = rx$

Разделим переменные и проинтегрируем

Делим обе части равенства (уравнения) на одно и то же число ***rx*** и умножаем на ***dt* -** равенство не изменится.

Равенство **5 = 5:** умножаем на какое угодно число обе части – они остаются равными. То же самое относится к делению, и к другим математическим действиям.

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]\frac{dt}{rx} = [rx]\frac{dt}{rx}$$

получаем

$$\frac{dx}{rx} = dt$$

Интегрирование – действие, обратное дифференцированию

$$\int \frac{dx}{rx} = \int dt$$ получаем $$\ln x = rt + C$$

Интеграл от $\frac{dx}{rx}$ равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

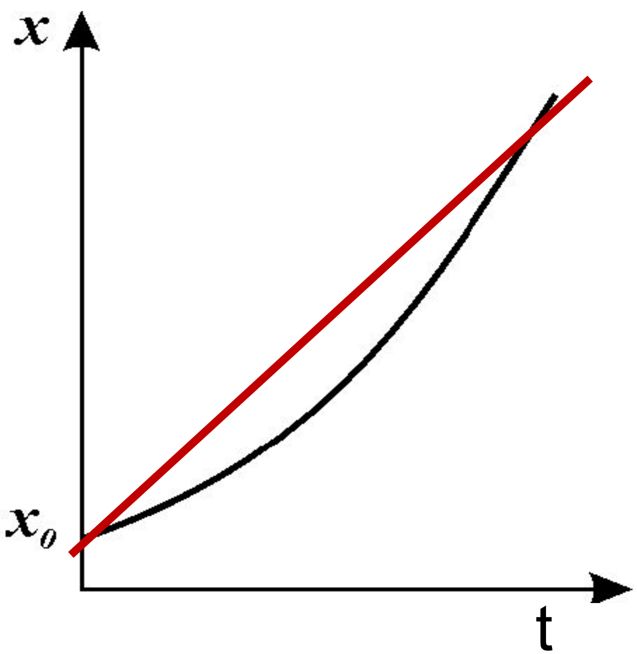
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

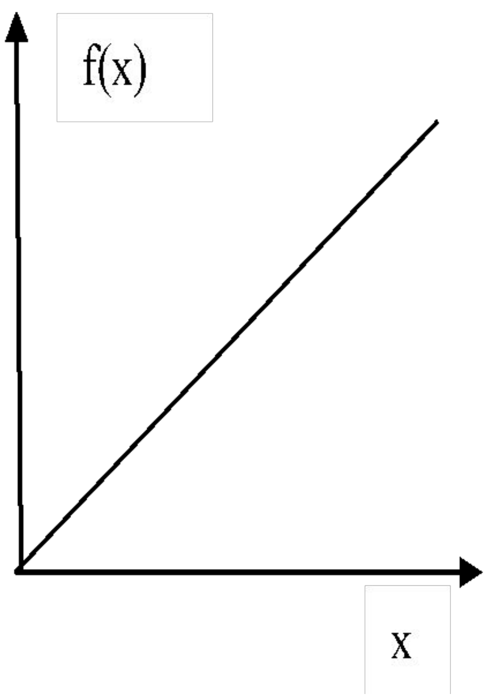
$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt + \ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

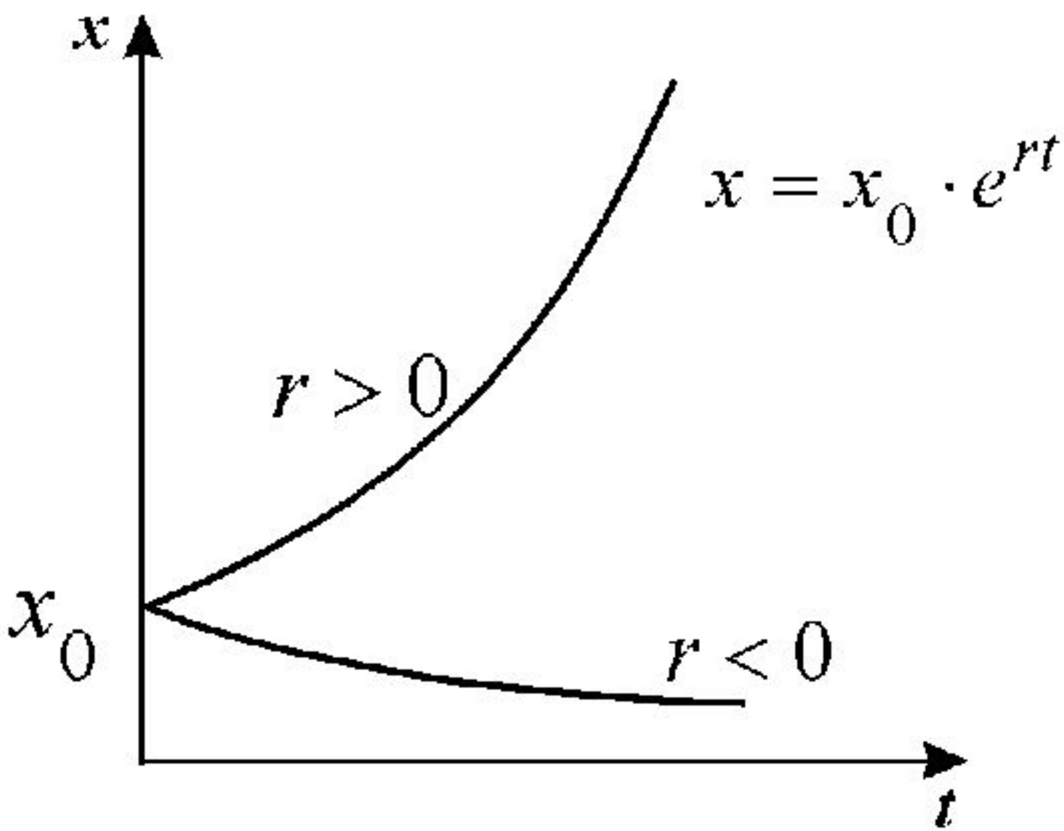
График зависимости численности от времени в соответствии с законом экспоненциального роста (слева), а справа представлена зависимость скорости роста

популяции – (правая часть уравнения $\frac{dx}{dt} = rx$) от ее численности, ***x***





Варианты динамики популяции

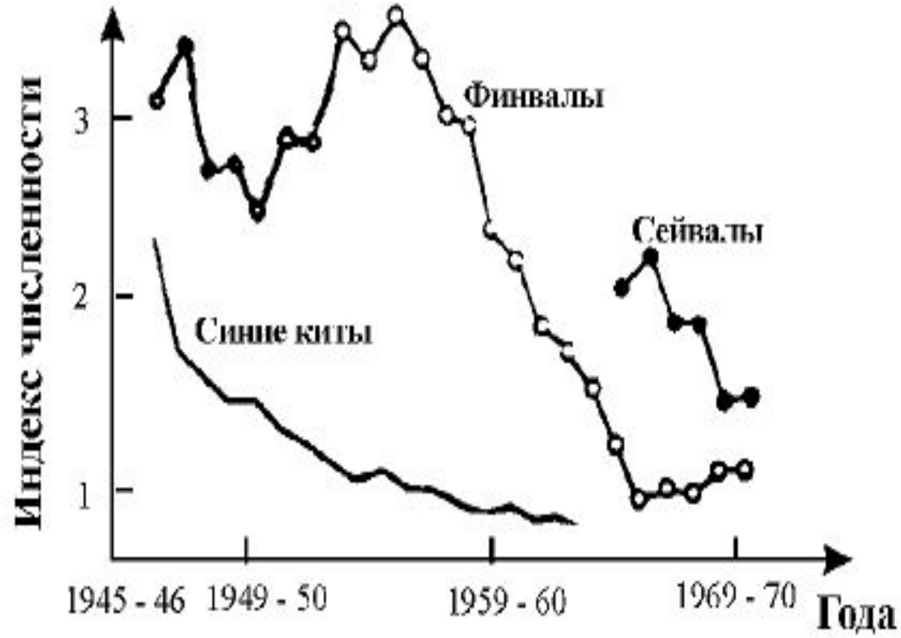


Только в условиях неограниченных ресурсов изолированная популяция развивалась бы в соответствии с экспоненциальным законом

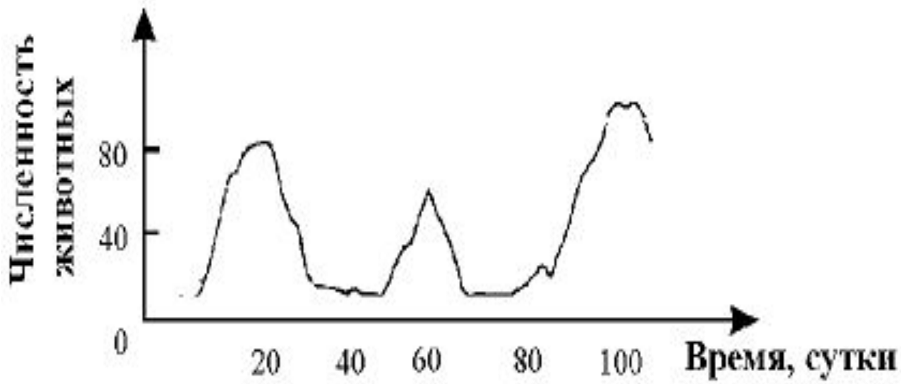
В реальных популяциях такое может иметь место только на начальных стадиях роста, когда численность еще мала, и ограничивающие факторы еще не действуют – напрмер, сразу после начала культивирования микрорганизмов

Примеры динамики популяций

Численность поголовья овец на острове Тасмания *(Davidson,* **1938)**



Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов на 1 тыс. судо-тонно-суток, *Gulland,* **1971)**



Изменение численности *Daphnia magna* *(Frail,* 1943)

Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Уравнение получено эмпирически, из анализа результатов наблюдений и экспериментов

$$\frac{dx}{dt} = rx - \delta x^2$$

δx^2 , второй член правой части - фактор торможения роста

Если он равен δx, мы получим рассмотренный только что неограниченный рост: X выносится за скобки, и постоянный множитель в зависимости от знака плюс или минус, будет определять рост численности или ее убывание

Аналитическое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Произведем разделение переменных:

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Представим левую часть в виде суммы

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

После интегрирования получим

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x
Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Перейдем от логарифмов к переменным, помня, что экспонента от логарифма числа равна самому числу:

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + \ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Здесь *C* — произвольная постоянная, которая определяется начальным значением X_0:

Находим произвольную постоянную *C*

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

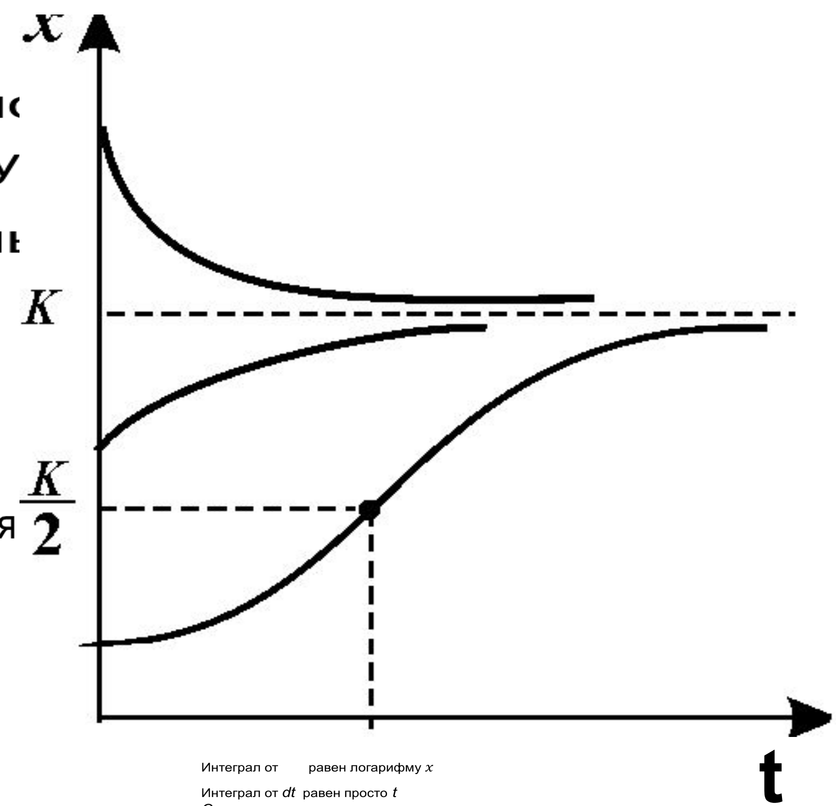
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда

$C = \ln x_0$ подставляем и по

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенциру

$x = e^{rt + ln x_0}$ окончател



Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Критические уровни численности

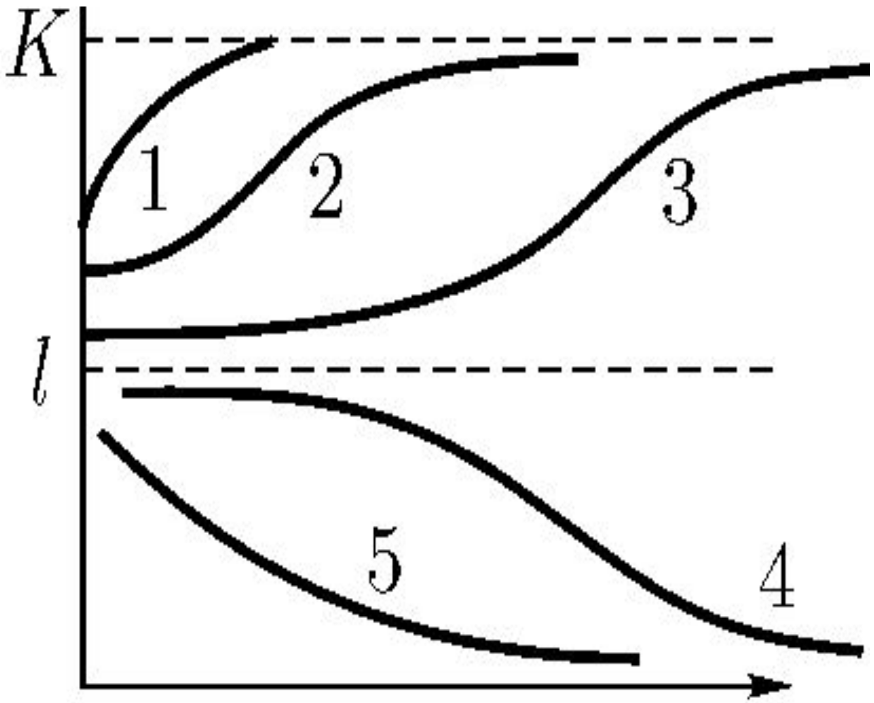
$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2.$$

Первый член в правой части описывает размножение двуполой популяции, скорость которого пропорциональна квадрату численности (вероятности встреч особей разного пола) для малых плотностей и пропорциональна числу самок — для больших плотностей популяции.

Второй член описывает смертность, пропорциональную численности,

Третий — внутривидовую конкуренцию, подобно тому, как это было в логистическом уравнении

Критические уровни численности



Кривые 1-5 соответствуют различным начальным численностям.

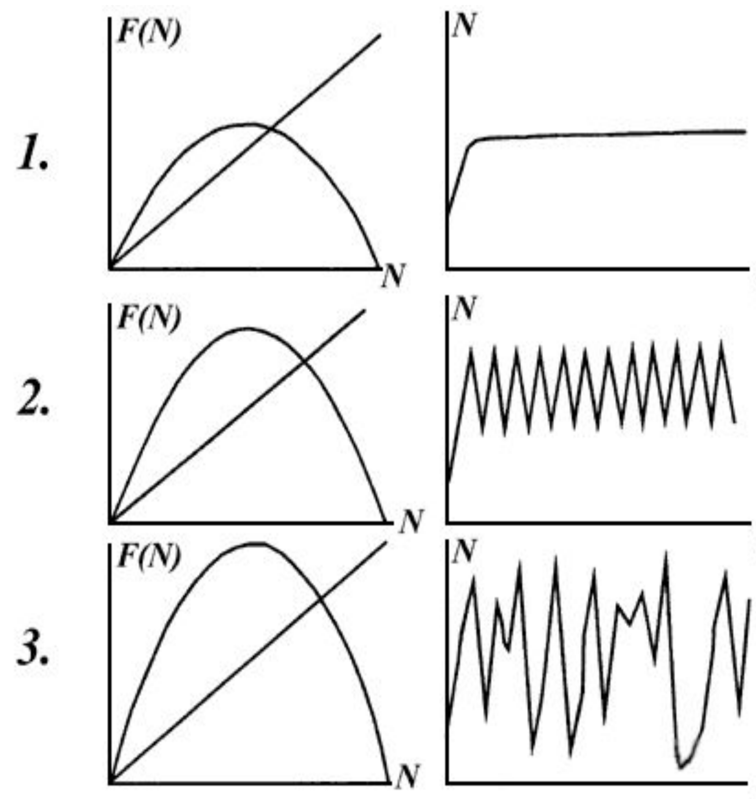
x = 0 и ***x = K*** — устойчивые стационарные состояния,

x = L — неустойчивое, разделяющее области влияния устойчивых состояний равновесия

Величины ***L*** и ***K*** различны для разных популяций и могут быть определены из наблюдений и экспериментов.

Колебания численности популяций

Тип поведения зависит от величины константы собственной скорости роста ***r***. Кривые зависимости значения численности в данный момент времени ***(t+1)*** от значений численности в предыдущий момент ***t*** представлены слева. Справа - кривые динамики численности - зависимости числа особей в популяции от времени. Сверху вниз значение параметра собственной скорости роста ***r*** увеличивается.



Модели взаимодействия двух популяций

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = rt + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+\ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t

C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = rt + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+\ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

a — константы собствен-ной скорости роста видов,

c — константы внутри-видовой конкуренции,

b — константы взаимо-действия видов

СИМБИОЗ	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
КОММЕНСАЛИЗМ	+	0	$b_{12} > 0, b_{21} = 0$
ХИЩНИК-ЖЕРТВА	+	-	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
АМЕНСАЛИЗМ	0	-	$b_{12} = 0, b_{21} < 0$
КОНКУРЕНЦИЯ	-	-	$b_{12}, b_{21} < 0$
НЕЙТРАЛИЗМ	0	0	$b_{12}, b_{21} = 0$

Модель хищник-жертва

X_1 - численность популяции хищника,
X_2 - численность популяции жертвы

Интеграл от равен логарифму x

Интеграл от dt равен просто t
C – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

При различных соотношениях параметров в системе возможно выживание только жертвы, только хищника (если у него имеются и другие источники питания) и сосуществование обоих видов

Если начальное значение $X_0 < K/2$, кривая роста имеет точку перегиба. Если $X_0 > K$, численность со временем убывает.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$