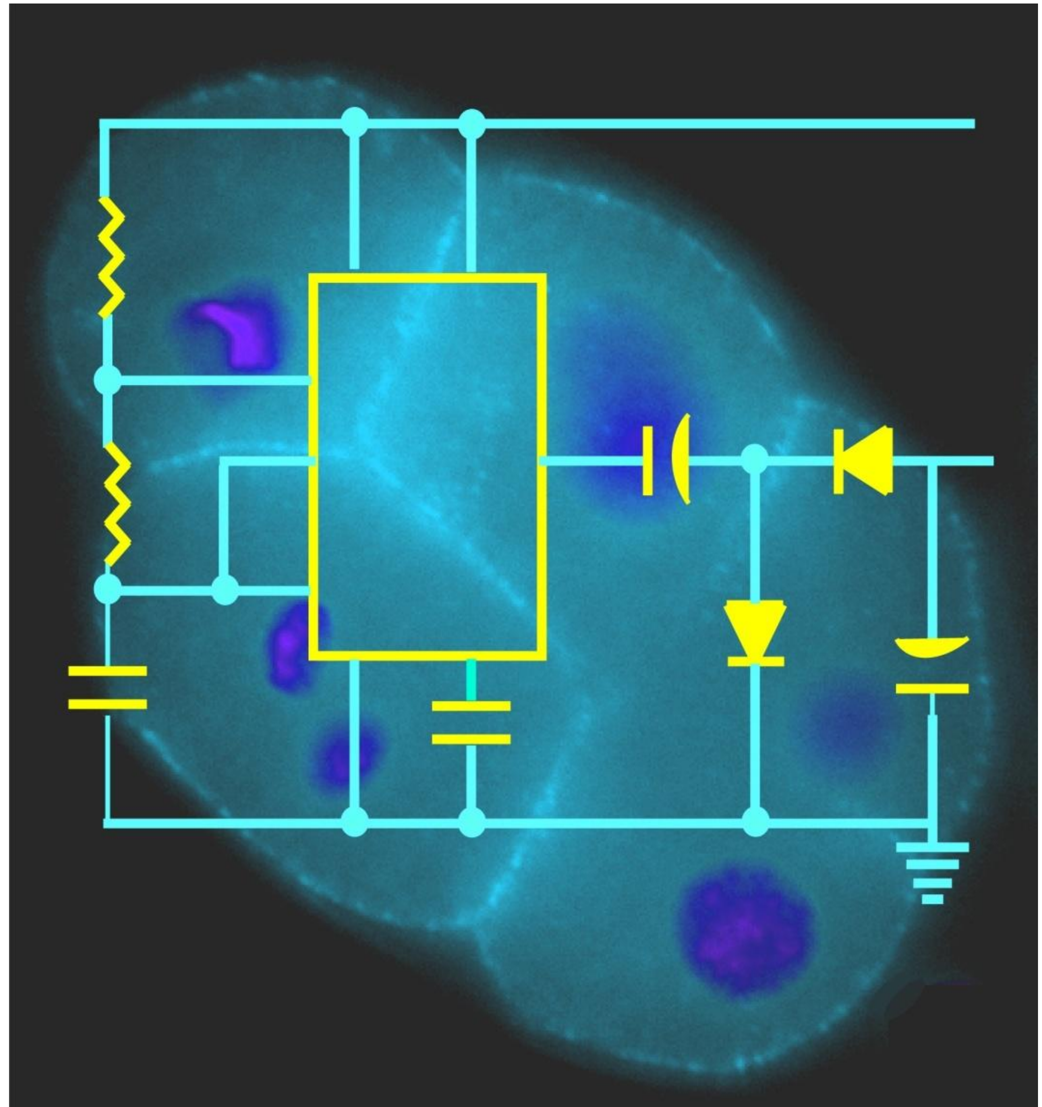
# Информационные технологии в биологических исследованиях

**Лекция 4:** **Принципы построения математических моделей.**

**Примеры:**

– популяционная модель (экспо-ненциальная, логистическая)

- взаимодействие двух популяций



# Базовые модели

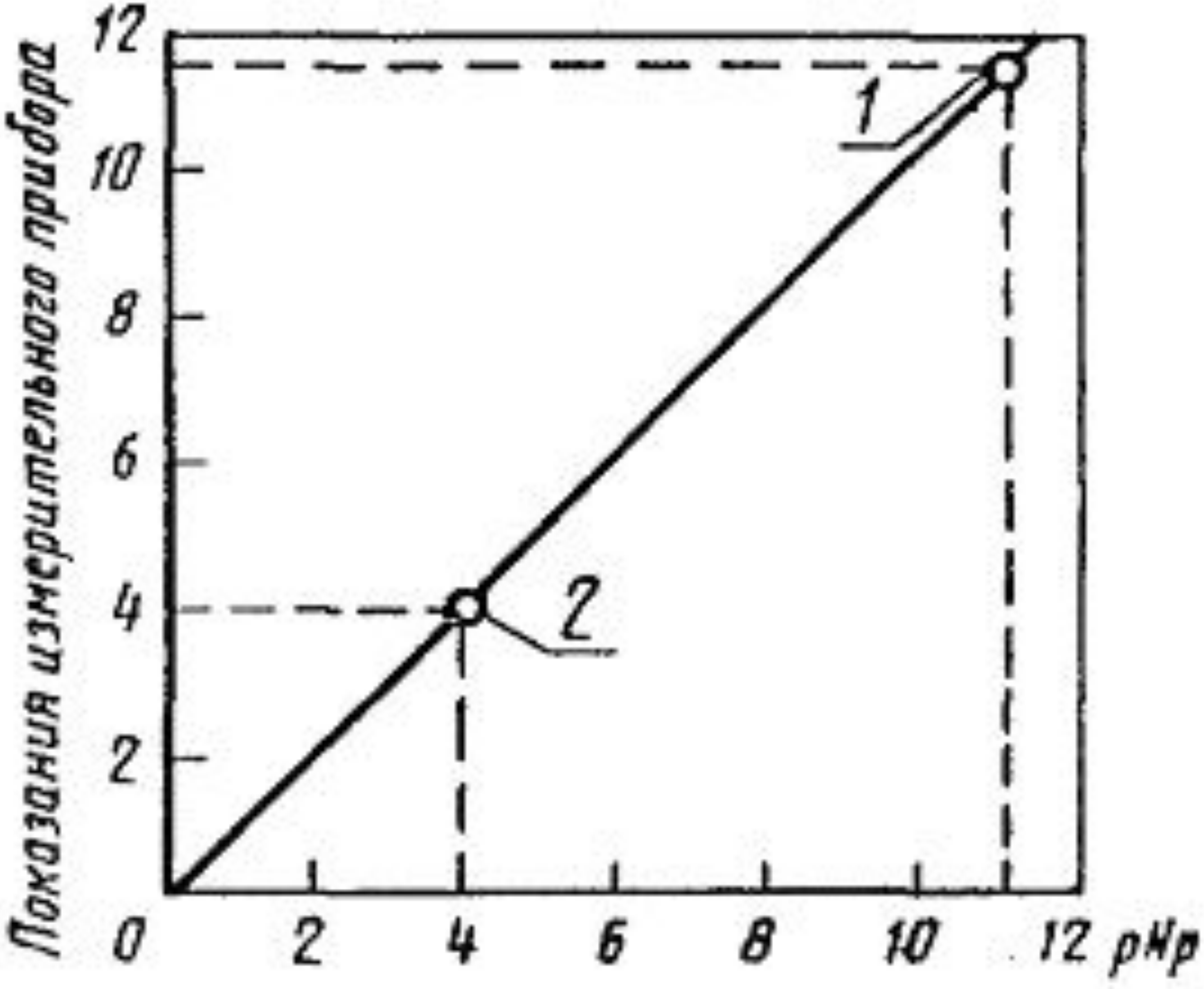
В любой науке существуют простые модели, которые поддаются аналитическому исследованию и обладают свойствами, которые позволяют описывать целый спектр природных явлений

Благодаря простоте и наглядности, базовые модели очень полезны при изучении самых разных систем

# Базовые модели в биологии

- Калибровачная зависимость
- Популяционные модели:
  - В отсутствии ограничений
  - С ограничениями – логистическая кривая
  - Взаимодействие популяций, хищник-жертва

**Самая простая и очень нужная модель в биологии – калибровочная кривая, вернее процесс ее построения и использования.**



**Самая простая и очень нужная модель в биологии – калибровочная кривая, вернее процесс ее построения и использования.**

**Формально, в случае линейной зависимости получается модель, основанная на уравнении регрессии**

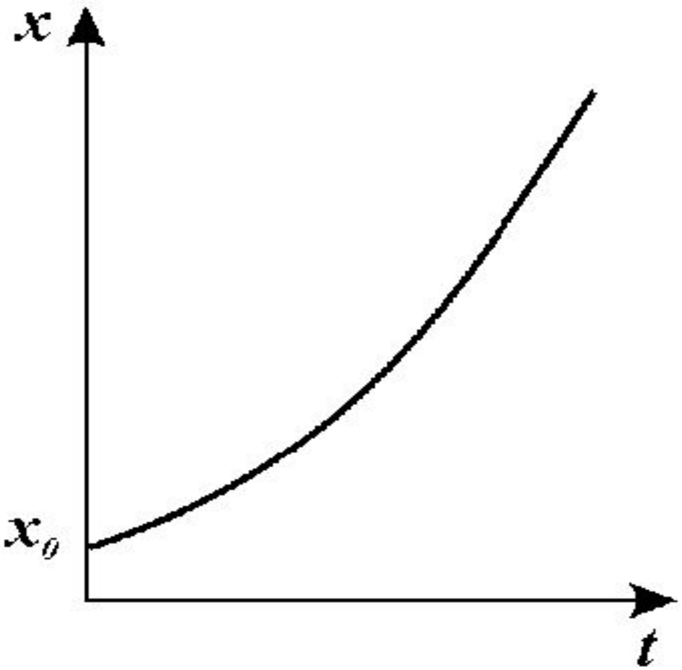
$y = mx + y_0$ **отсюда** $x = (y - y_0) / m$

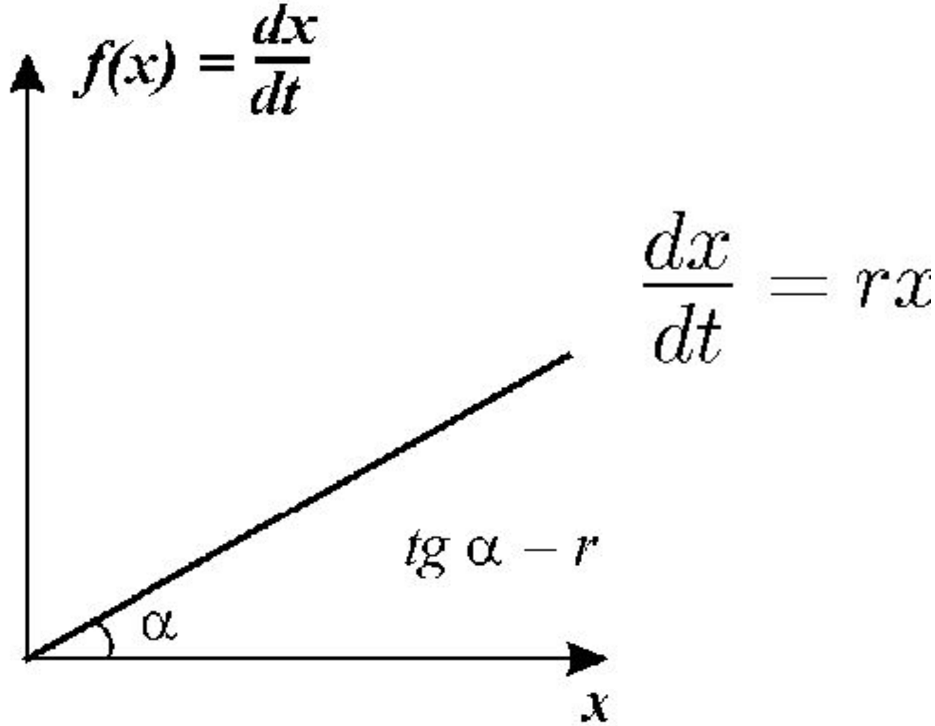
$y$ – **показание измерительного инструмента**
$m$ – **чувствительность системы измерения**
$y_0$ – **фон (шум прибора)**
$x$ – **неизвестная концентрация вещества**

# Модели роста численности популяции

Любой процесс происходит во времени. Скорость – изменение за единицу времени. Скорость может быть постоянной, уменьшаться или возрастать.

# Рост показателя и скорость его изменения




Фундаментальное предположение для модели роста - скорость роста пропорциональна численности популяции, будь то популяция зайцев или популяция клеток

# Рост колонии микроорганизмов

За время $\Delta t$ прирост численности равен:

$\Delta x = R - S,$

где $R$ — число родившихся и S — число умерших за время $\Delta t$ особей.

Положим $R(x)$ и $S(x)$ - скорости рождения и смерти. Тогда

$R = R(x)\,\Delta t, \qquad S = S(x)\,\Delta t.$

Подставляем в первое уравнение и получим:

$\Delta x = [R(x) - S(x)]\,\Delta t$

Разделив на Δt и переходя к пределу при t —> 0, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = R(x) - S(x)$$

# Рост колонии микроорганизмов

В простейшем случае, когда рождаемость и смертность пропорциональны численности:

**α** скорость рождаемости, например, на 100 особей рождается 10 новых в день, **β** скорость смертности, , например, на 100 особей гибнут 5 в день - это рост, или 10 – это стационарное состояние, или 15 – это убыль численности.

Тогда можно записать

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x; \quad \alpha - \beta = r$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$

# Решение уровнения $\dfrac{dx}{dt} = rx$

Разделим переменные и проинтегрируем

Делим обе части равенства (уравнения) на одно и то же число ***rx*** и умножаем на ***dt* -** равенство не изменится.

Равенство **5 = 5:** умножаем на какое угодно число обе части – они остаются равными. То же самое относится к делению, и к другим математическим действиям.

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]\frac{dt}{rx} = \left[rx\right]\frac{dt}{rx}$$ получаем $$\frac{dx}{rx} = dt$$

# Интегрирование – действие, обратное дифференцированию

$$\int \frac{dx}{rx} = \int dt \quad \text{получаем} \quad \ln x = rt + C$$

Интеграл от равен логарифму $x$
Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+\ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

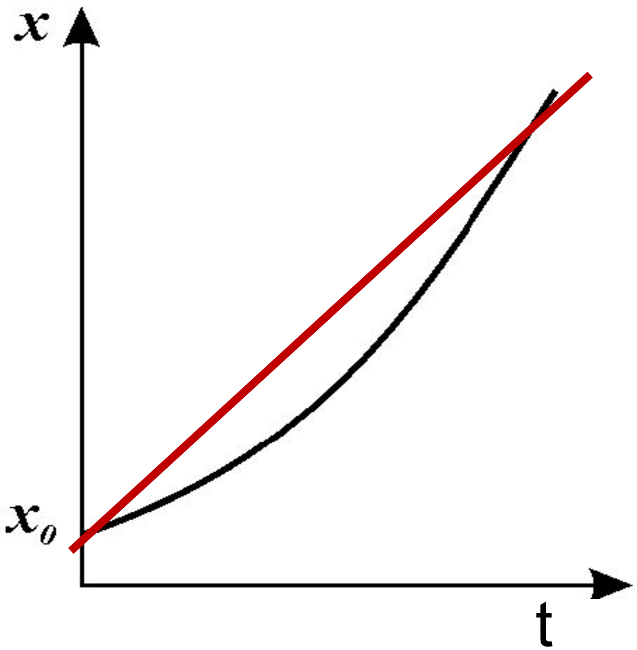
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

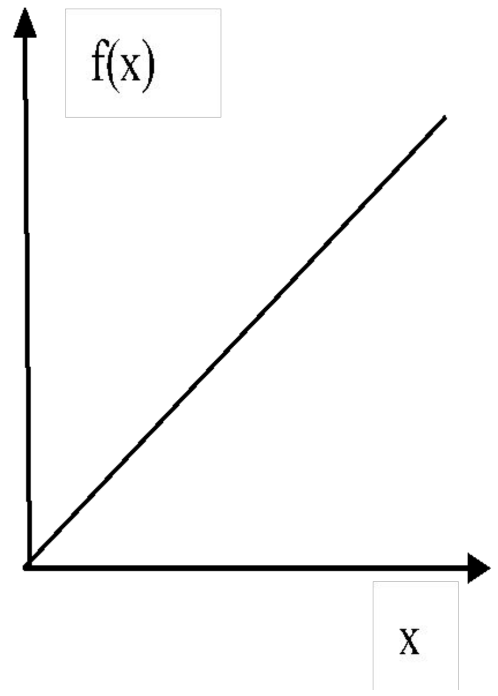
$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

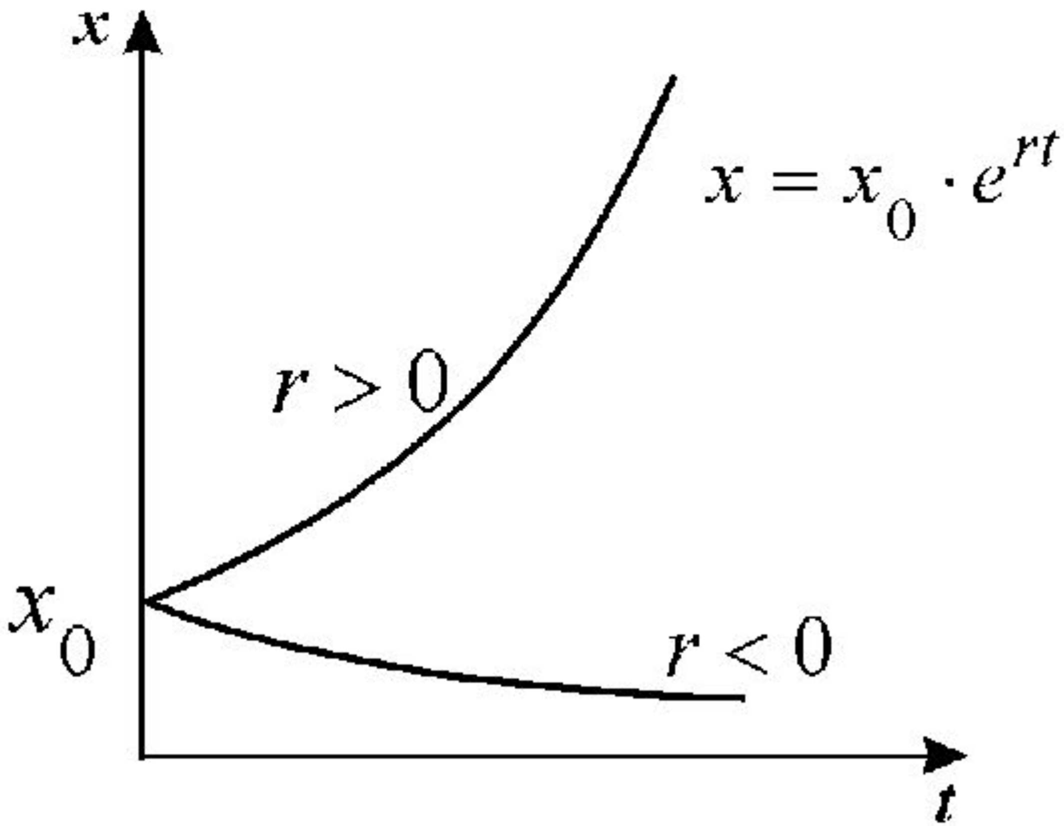
$x = e^{rt+lnx_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

График зависимости численности от времени в соответствии с законом экспоненциального роста (слева), а справа представлена зависимость скорости роста популяции – (правая часть уравнения $\frac{dx}{dt} = rx$) от ее численности, ***x***



# Варианты динамики популяции

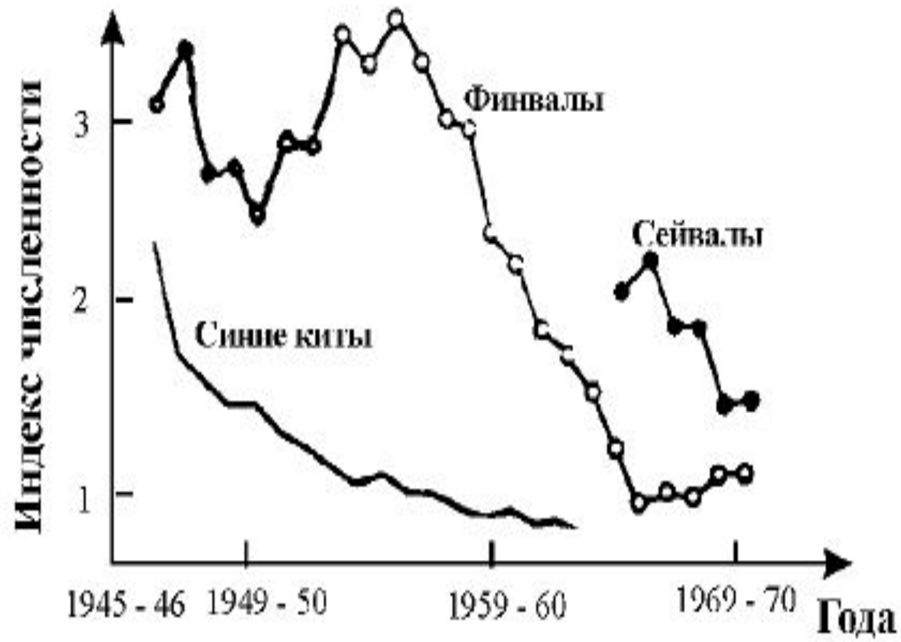


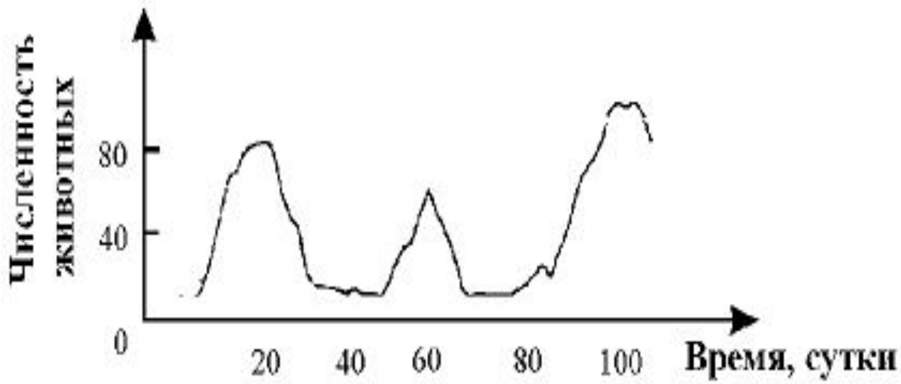
Только в условиях неограниченных ресурсов изолированная популяция развивалась бы в соответствии с экспоненциальным законом

В реальных популяциях такое может иметь место только на начальных стадиях роста, когда численность еще мала, и ограничивающие факторы еще не действуют – напрмер, сразу после начала культивирования микрорганизмов

# Примеры динамики популяций


Численность поголовья овец на острове Тасмания *(Davidson,* **1938)**




Изменение численности *Daphnia magna (Frail,* 1943)

Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов на 1 тыс. судо-тонно-суток, *Gulland,* **1971)**

# Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Уравнение получено эмпирически, из анализа результатов наблюдений и экспериментов

$$\frac{dx}{dt} = rx - \delta x^2$$

$\delta x^2$ , второй член правой части - фактор торможения роста

Если он равен $\delta x$, мы получим рассмотренный только что неограниченный рост: $X$ выносится за скобки, и постоянный множитель в зависимости от знака плюс или минус, будет определять рост численности или ее убывание

# Аналитическое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Произведем разделение переменных:

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+lnx_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Представим левую часть в виде суммы

Интеграл от равен логарифму $x$
Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+lnx_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

После интегрирования получим

Интеграл от равен логарифму $x$
Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+lnx_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму $x$
Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0,$ $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt+lnx_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Перейдем от логарифмов к переменным, помня, что экспонента от логарифма числа равна самому числу:

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + \ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Здесь *C* — произвольная постоянная, которая определяется начальным значением $X_0$:

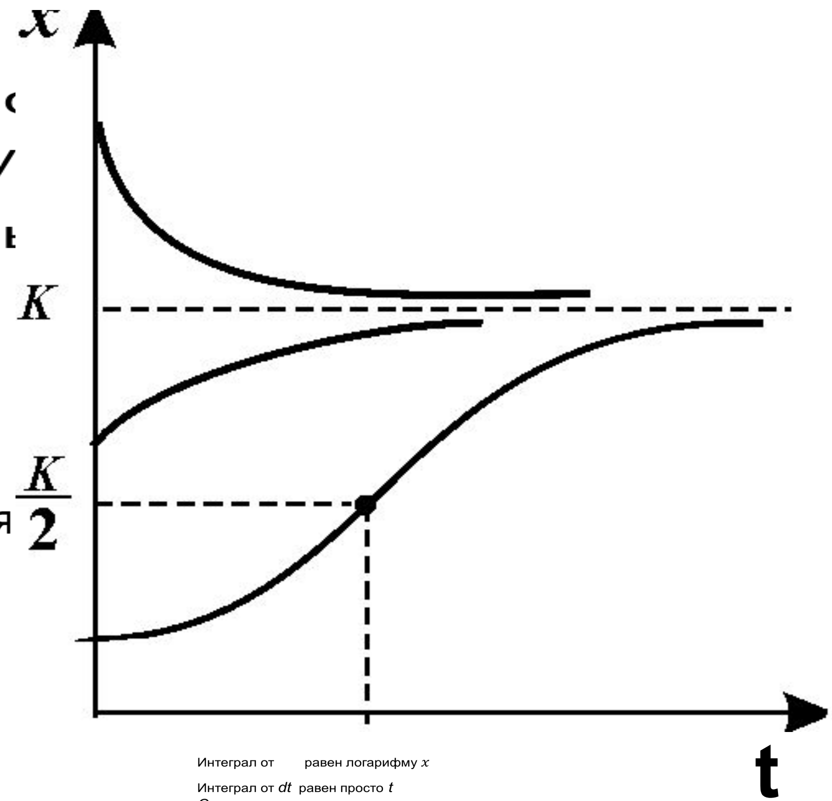
# Находим произвольную постоянную *C*

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда
$C = \ln x_0$ подставляем и по
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенциру
$x = e^{rt + ln x_0}$ окончател




Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

# Критические уровни численности

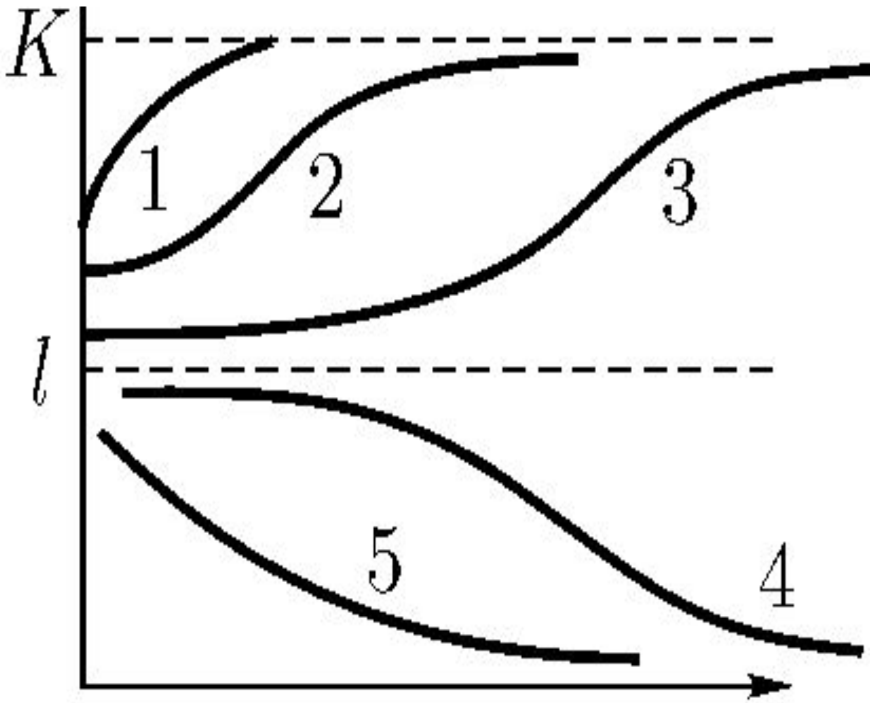
$$\frac{dx}{dt} = \alpha\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2.$$

Первый член в правой части описывает размножение двуполой популяции, скорость которого пропорциональна квадрату численности (вероятности встреч особей разного пола) для малых плотностей и пропорциональна числу самок — для больших плотностей популяции.

Второй член описывает смертность, пропорциональную численности,

Третий — внутривидовую конкуренцию, подобно тому, как это было в логистическом уравнении

# Критические уровни численности

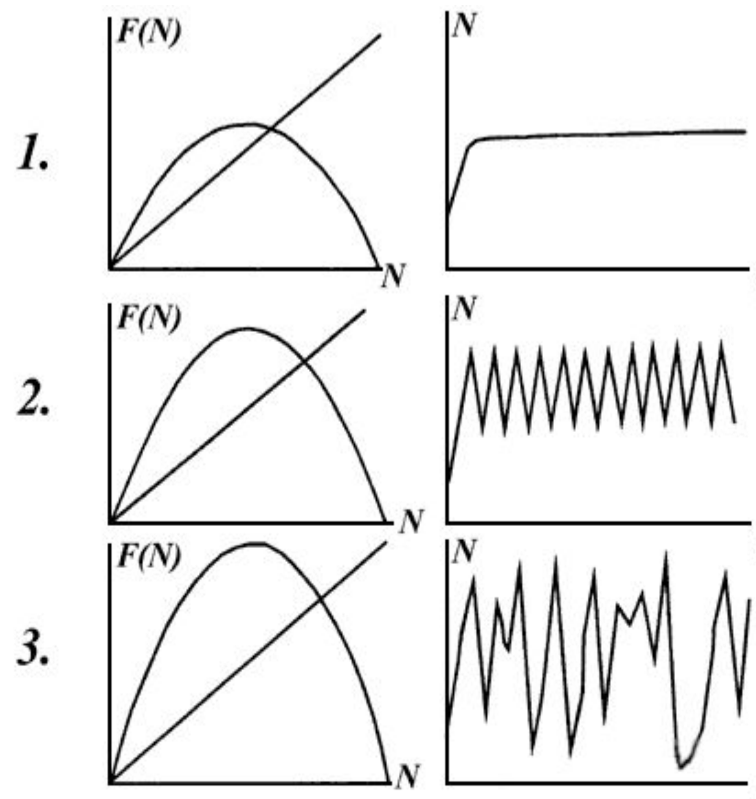



Кривые 1-5 соответствуют различным начальным численностям.
***x = 0*** и ***x = K*** — устойчивые стационарные состояния,
***x = L*** — неустойчивое, разделяющее области влияния устойчивых состояний равновесия

Величины ***L*** и ***K*** различны для разных популяций и могут быть определены из наблюдений и экспериментов.

# Колебания численности популяций

Тип поведения зависит от величины константы собствен-ной скорости роста ***r***. Кривые зависимости значения численности в данный момент времени ***(t+1)*** от значений численности в предыдущий момент ***t*** представлены слева. Справа - кривые динамики численности - зависимости числа особей в популяции от времени. Сверху вниз значение параметра собственной скорости роста ***r*** увеличивается.



# Модели взаимодействия двух популяций

Интеграл от      равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$,   $x = x_0$ тогда   $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = rt + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+\ln x_0}$ окончательно   $x = x_0 e^{rt}$

Интеграл от      равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$

$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

Когда $t = 0$,   $x = x_0$ тогда   $\ln x_0 = r\,0 + C$

$C = \ln x_0$ подставляем и получим

$\ln x = rt + \ln x_0$ Потенцируем

$x = e^{rt+\ln x_0}$ окончательно   $x = x_0 e^{rt}$

*а* — константы собствен-ной скорости роста видов,

*с* — константы внутри-видовой конкуренции,

*b* — константы взаимо-действия видов

| | | | |
|---|---|---|---|
| **СИМБИОЗ** | + | + | $b_{12}, b_{21} > 0$ |
| **КОММЕНСАЛИЗМ** | + | 0 | $b_{12} > 0, b_{21} = 0$ |
| **ХИЩНИК-ЖЕРТВА** | + | - | $b_{12} > 0, b_{21} < 0$ |
| **АМЕНСАЛИЗМ** | 0 | - | $b_{12} = 0, b_{21} < 0$ |
| **КОНКУРЕНЦИЯ** | - | - | $b_{12}, b_{21} < 0$ |
| **НЕЙТРАЛИЗМ** | 0 | 0 | $b_{12}, b_{21} = 0$ |

# Модель хищник-жертва

$X_1$ - численность популяции хищника,
$X_2$ - численность популяции жертвы

Интеграл от равен логарифму $x$

Интеграл от $dt$ равен просто $t$
$C$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.
Когда $t = 0$, $x = x_0$ тогда $\ln x_0 = r\,0 + C$
$C = \ln x_0$ подставляем и получим
$\ln x = r\,t + \ln x_0$ Потенцируем
$x = e^{rt + ln x_0}$ окончательно $x = x_0 e^{rt}$

При различных соотношениях параметров в системе возможно выживание только жертвы, только хищника (если у него имеются и другие источники питания) и сосуществование обоих видов

Если начальное значение $X_0 < K/2$, кривая роста имеет точку перегиба. Если $X_0 > K$, численность со временем убывает.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$