

Теория графов

- История теории графов
- Основные понятия
- Представление графов в компьютере
- Виды графов
- Связность
- Планарность
- Род и толщина графа
- Независимость и покрытия
- Раскраска графа

История теории графов

Задача о Кенигсбергских мостах

- На рисунке представлен схематический план центральной части города Кенигсберг, включающий два берега реки Перголя, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы найти маршрут, проходящий по всем четырем участкам суши по одному разу. При этом через каждый из мостов можно проходить только по одному разу, а конец и начало пути должны совпадать. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) в 1736 году математиком Леонардом Эйлером.

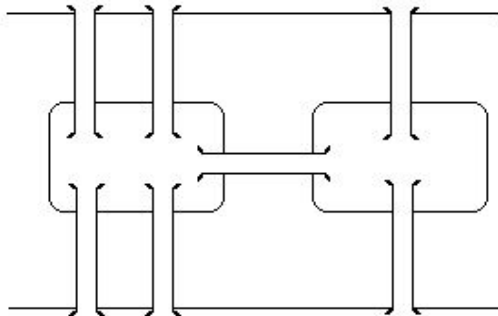
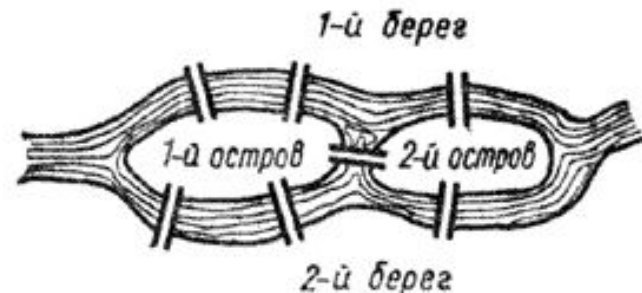


Рис.1. Задача о Кенигсбергских мостах



История теории графов

Задача о трех домах и трех колодцах

- Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Куратовским в 1930 году.

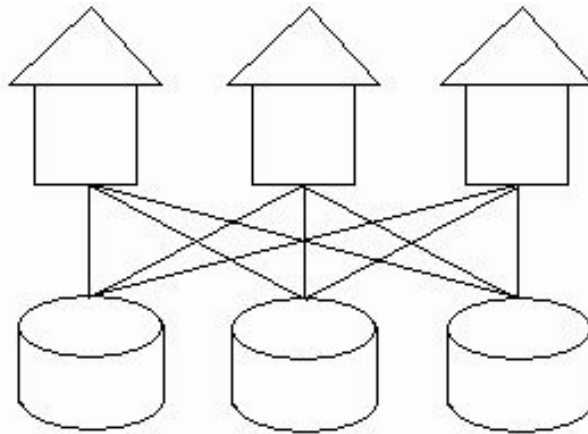


Рис.2. Задача о трех домах и колодцах

История теории графов

Задача о четырех красках

- Разбиение плоскости на непересекающиеся плоскости называется *картой*. Области на карте называются соседними, если они имеют общую границу. Задача состоит в раскрашивании карты таким образом, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом. С конца позапрошлого века известна гипотеза, что для этого достаточно четырех красок. В 1976 году Appel и Хейкен опубликовали решение этой задачи, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.

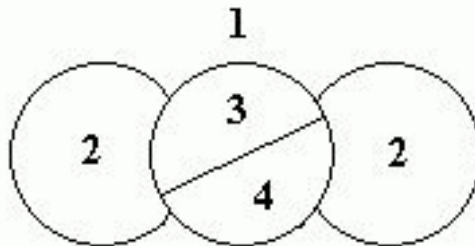
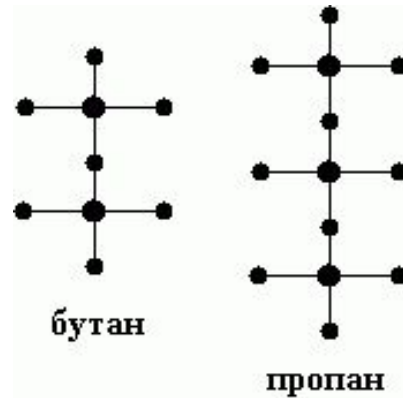
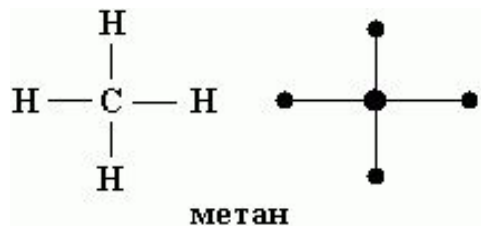


Рис. 3. Задача о четырех красках

История теории графов

- В 1847 году Кирхгоф разработал **теорию деревьев** для решения систем линейных алгебраических уравнений, которая позволила ему найти ток в каждом проводнике в каждом контуре. От цепей он перешел к графам. Кирхгоф показал, что не надо рассматривать весь граф, а рассматривать простые циклы графа, которые образуются остовным графом.
- В 1957 году ученый Келли разработал теорию перечисления деревьев в попытке найти изомер углеводорода.



Граф (от греч. γράφω - пишу)

Графом $G(V, E)$ называется

совокупность двух множеств –

- непустого множества V (множества вершин) и
- множества E - двухэлементных подмножеств множества V , состоящих из различных элементов множества V , - (множества ребер).

$$G(V, E) = \langle V; E \rangle, \quad V \neq \emptyset,$$

$$E = \{ e = \{a, b\} \mid a, b \in V \ \& \ a \neq b \ \& \ e \neq \emptyset \ \& \ \forall e \in E \ |e| = 2 \}$$

Множество двухэлементных подмножеств определяет симметричное бинарное отношение на множестве вершин:

$$E \subset V \times V, \quad E = E^{-1}.$$

Граф

□ Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру называются ***изолированными***.

□ Ребро можно обозначить не только как множество $\{v_1, v_2\}$, но и как пару (v_1, v_2) .

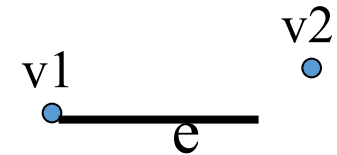
Число вершин графа G обозначим p , а *число ребер* - q :

$$p = p(G) = |V|, \quad q = q(G) = |E|.$$

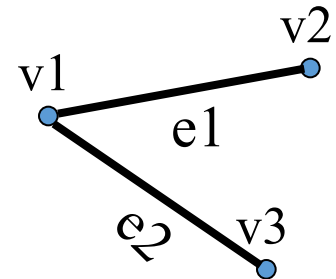
□ Если хотят явно упомянуть числовые характеристики графа, то говорят p, q - граф.

Смежность

□ Пусть v_1, v_2 - вершины,
 $e = \{v_1, v_2\}$ - соединяющее их ребро, тогда
вершина v_1 и ребро e **инцидентны**,
ребро e и вершина v_2 также **инцидентны**.



□ Два ребра, инцидентные одной вершине,
называются **смежными** (ребро e_1 и e_2).



□ Две вершины, инцидентные одному
ребру, также называются **смежными**
(вершины v_1 и v_2 , v_1 и v_3).



Смежность

- Множество вершин, смежных с вершиной v , называется **множеством смежности** вершины v и обозначается $\Gamma^+(v)$: $\Gamma^+(v) = \{ u \in V \mid (u, v) \in E \}$,
 $\Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + \{ v \}$.

Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^+ и обозначается просто Γ .

Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$.

- Если $A \subset V$ (A - некоторое подмножество вершин графа), то $\Gamma(A)$ - множество всех вершин, смежных с вершинами из множества A : $\Gamma(A) = \{ u \in V \mid \exists v \in A \ u \in \Gamma(v) \}$.

Диаграммы

□ Граф изображают **диаграммой**:

вершины - точками (или кружками), ребра - линиями.

На рис.4 диаграмма графа, имеющего 4 вершины и 5 ребер.

Вершины v_1 и v_2 , v_2 и v_3 , v_3 и v_4 , v_4 и v_1 , v_1 и v_2 смежные, а вершины v_1 и v_3 не смежные.

Смежные ребра: e_1 и e_2 , e_2 и e_3 , e_3 и e_4 , e_4 и e_1 , e_1 и e_5 , e_3 и e_5 , e_4 и e_5 .

Несмежные ребра: e_1 и e_3 , e_2 и e_4 .

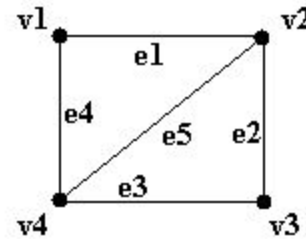


Рис. 4. Диаграмма графа

Множества смежности вершины v_1 :

$$\Gamma^+(v_1) = \{v_2, v_4\}$$

$$\Gamma^*(v_1) = \{v_1, v_2, v_4\}$$

Множество смежности множества вершин $A = \{v_1, v_2\}$:

$$\Gamma(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

Способы представления графов

Способы представления графов в памяти компьютера различаются *объемом* занимаемой памяти и *скоростью* выполнения операций над графами.

Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи.

□ Четыре наиболее часто используемых представления с указанием характеристики $n(p, q)$ - объема памяти для каждого представления.

1. **матрица смежности**, $n(p, q) = O(p^2)$.
2. **матрица инциденций**, $n(p, q) = O(p * q)$.
3. **списки смежности**, $n(p, q) = O(p + 2q)$ [$n(p, q) = O(p + q)$].
4. **массив ребер (или дуг)**, $n(p, q) = O(2q)$.

Представление иллюстрируются на примерах графа G и орграфа D , диаграммы которых представлены на рис.10:

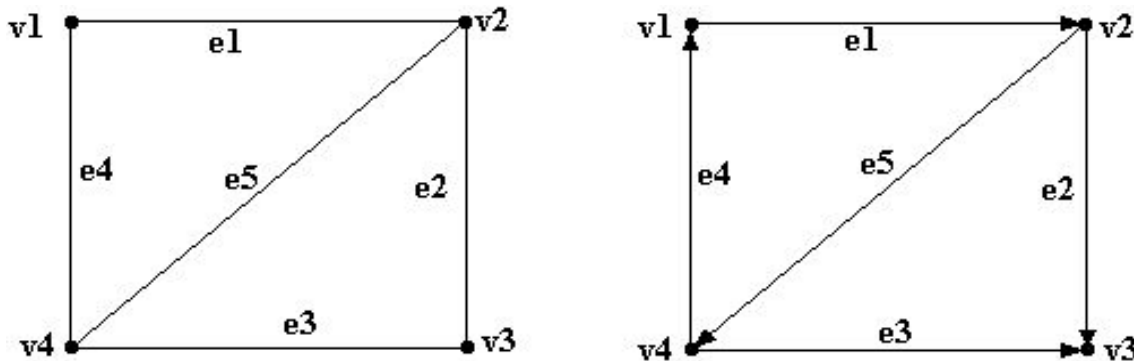


Рис.10. Диаграммы графа (слева) и орграфа (справа) используемых в качестве примеров в данной главе

Матрица смежности

- Представление графа с помощью квадратной булевой матрицы $M : \text{array}[1..p, 1..p] \text{ of } 0..1$, отражающей смежность вершин, называется **матрицей смежности**, где

$$M[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j, \\ 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

- Для матрицы смежности $n(p, q) = O(p^2)$.

Пример:

$$G : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Матрица смежности графа симметрична относительно главной диагонали, поэтому достаточно хранить только верхнюю (или нижнюю) треугольную матрицу.

Матрица инциденций

□ Представление графа с помощью матрицы

$H : \text{array}[1..p, 1..q] \text{ of } 0..1$ (для орграфов $H : \text{array}[1..p, 1..q] \text{ of } -1..1$), отражающей инцидентность вершин и ребер, называется **матрицей инциденций**, где

для неориентированного графа $H[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

для ориентированного графа

$$H[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и является его концом,} \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ и ребро } e_j \text{ не инцидентны,} \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и является его началом.} \end{cases}$$

□ Для матрицы инциденций $n(p, q) = O(p * q)$.

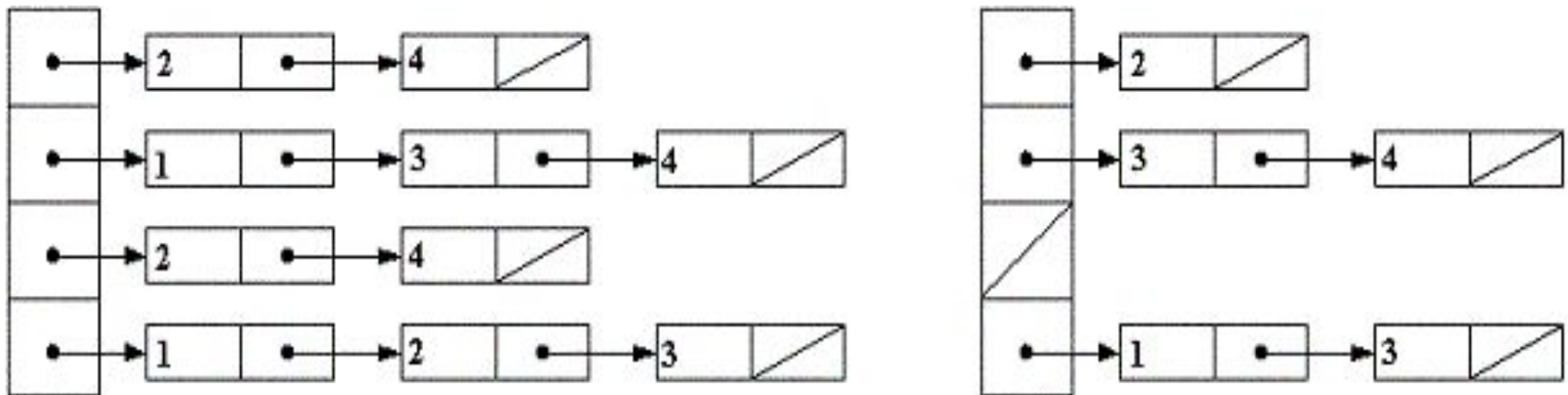
Пример:

$$G : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D : \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Списки смежности

- Представление графа с помощью списочной структуры, отражающей *смежность вершин* и состоящей из массива указателей $\Gamma : \mathbf{array} [1..p] \text{ of } \uparrow N$ на списки смежных вершин, где элемент списка представлен структурой $N : \mathbf{record } v : 1..p; n : \uparrow N \text{ end record}$, называется *списком смежности*.
- В случае представления неориентированных графов списками смежности $n(p, q) = O(p + 2q)$, а в случае ориентированных графов $n(p, q) = O(p + q)$.

Пример:



Списки смежности для графа G (слева) и орграфа D (справа)

Массив дуг (ребер)

- Представление графа с помощью массива структур E
: *array [1..q] of record b, e : 1..p end record*, отражающего список пар смежных вершин, называется *массивом ребер* (или, для орграфов, *массивом дуг*).
- Для массива ребер (или дуг) $n(p, q) = O(2q)$.

Пример:

b	e	b	e
1	2	1	2
1	4	2	3
2	3	2	4
2	4	4	1
3	4	4	3

Представление графа и орграфа с помощью массива ребер (дуг)

Виды графов

- Граф, состоящий из *одной* вершины, называется **тривиальным**.
 - Граф, состоящий из одних *изолированных* вершин, называется **нуль-графом** (O_p).
 - Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется **полным** (K_p).
- Полный граф с p вершинами имеет максимально возможное число ребер: $q(K_p) = p(p - 1) / 2$
- Если элементами множества E являются *упорядоченные* пары (на ребрах задано направление или порядок), то граф $G(V, E)$ называют **ориентированным (орграфом)**, где V -множество **узлов** графа, а E - множество его **дуг**.

Виды графов

- Если элементом множества E может быть пара *одинаковых* элементов V , то такой элемент множества E называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями (псевдографом)*.
- Если E является не множеством, а *набором*, содержащим несколько *одинаковых* элементов, то эти элементы называются *кратными ребрами*, а граф называется *мультиграфом*.
- Если элементами множества E являются не обязательно 2-элементные, а любые подмножества множества V , то такие элементы множества E называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.

Виды графов

□ Если задана функция $f: V \rightarrow M$ и/или $f: E \rightarrow M$, то множество M называется множеством *пометок*, а граф, называется **помеченным** (или *нагруженным*)

В качестве множества пометок используются *буквы* или *целые числа*.

□ Если функция f инъективна, то есть разные вершины (ребра) имеют разные пометки, то граф называют **нумерованным**.

□ Если у графа помечены ребра - это **реберно-помеченный** граф.

Выражение "граф $G(V, E)$ " означает неориентированный непомеченный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E .

Изоморфизм графов

□ Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ **изоморфны** (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая смежность $e_1 = (u, v) \in E_1 \iff e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2$

ТЕОРЕМА. *Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.*

Доказательство:

Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

[*Рефлексивность.*] $G \sim G$, где требуемая биекция суть тождественная функция;

[*Симметричность.*] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h , то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1} ;

[*Транзитивность.*] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g , то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$.

Изоморфизм графов

Графы рассматриваются с *точностью до изоморфизма*, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

Пример:

Три внешне различные диаграммы, приведенные на рисунке снизу, являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.

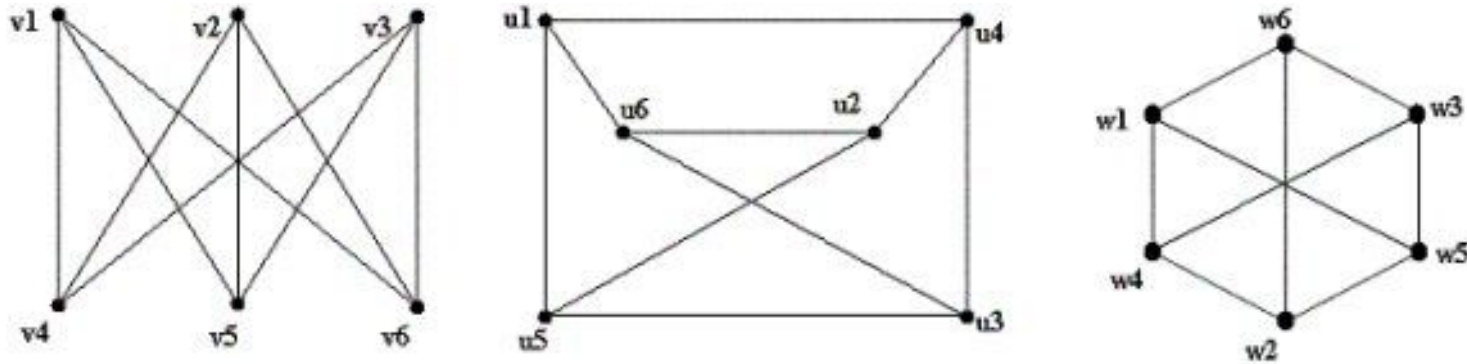


Рис. 5. Диаграммы изоморфных графов

□ Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется *инвариантом* графа.

Так, $p(G)$ и $q(G)$ - инварианты графа G . Не известно никакого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Изоморфизм графов

Пример:

Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. На рисунке представлены диаграммы графов, у которых указанные инварианты совпадают, но графы при этом не изоморфны.

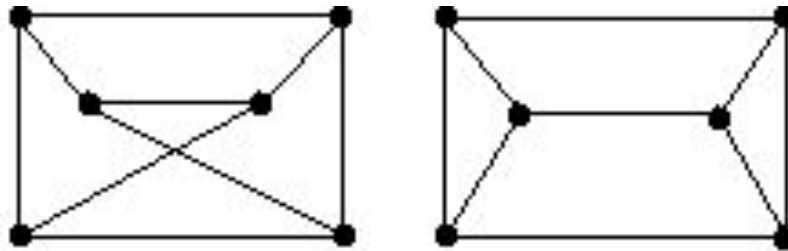


Рис. 6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

Частичные графы. Подграфы

□ **Подграфом** графа $G(V, E)$ называется граф $G_X(X, E_X)$, в который входит лишь

- часть вершин (узлов) графа G , образующих множество $X = V' \subset V$,
- вместе с ребрами (дугами) $E_X = E' \subset E$, соединяющими эти вершины.

□ Граф $G_X(X, E_X)$ называется **собственным** подграфом графа G , если $X \subset V$ & $E_X \subset E$ & $(V' \neq V \vee E' \neq E)$.

❖ Подграф $G_X(X, E_X)$ называется **остовным** подграфом графа $G(V, E)$, если G_X содержит все вершины графа G : $X = V$.

Остовной подграф (или **фактор**) $G'(V, E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством ребер E' .

❖ Подграф $G_X(X, E_X)$ называется **правильным** подграфом графа $G(V, E)$, если G_X содержит все ребра G :

$$\forall u, v \in X \quad \{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \in E_X$$

Правильный подграф $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ определяется подмножеством вершин V' .

□ **Частичным графом** графа $G(V, E)$ называется граф G_Y , содержащий только часть ребер (дуг) графа G : $G_Y(V_Y, Y)$, где $Y \subseteq E$.

Валентность (степень)

- Количество ребер, инцидентных вершине v , называется **степенью (валентностью)** вершины v и обозначается $d(v)$ ¹ :

$$\forall v \in V \quad 0 \leq d(v) \leq p - 1, \quad d(v) = |\Gamma^+(v)|$$

(Если не оговаривается особо, то петля учитывается дважды при подсчете $d(v)$)

- Степень $d(v)$ вершины v - это количество смежных с ней вершин.
- Количество вершин, не смежных с v , обозначим $\square d(v)$.

Ясно, что $\forall v \in V \quad d(v) + \square d(v) = p$.

Степень **изолированной** вершины равна нулю (то есть $d(v) = 0$).

- Если степень вершины равна единице (то есть $d(v) = 1$), то вершина называется **концевой** или **висячей**.
- Обозначим **минимальную** степень вершины графа G – $\delta(G)$, а **максимальную** – через $\Delta(G)$:
- $$\delta(G(V, E)) = \min d(v), \quad \Delta(G(V, E)) = \max d(v).$$

¹ Используют также обозначение $\deg v$.

Валентность (степень)

- Если степени всех вершин графа равны k , то граф называется *регулярным* графом степени k : $\delta(G) = \Delta(G) = k$.
- **Степень регулярности** является *инвариантом* графа и обозначается $r(G)$.

Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.

Пример:

На рис.6. приведены диаграммы двух регулярных, но неизоморфных графов степени 3.

На рис.7. приведена диаграмма регулярного графа степени 3.

Рис. 6. Диаграммы неизоморфных графов с совпадающими инвариантами

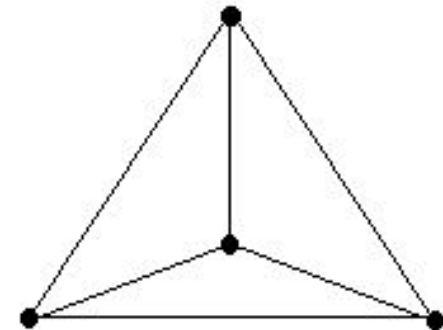


Рис. 7. Диаграмма регулярного графа степени 3

Теорема Эйлера

ТЕОРЕМА (Эйлера). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер: $\sum d(v) = 2q$.

Доказательство:

При подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

СЛЕДСТВИЕ 1. Число вершин нечетной степени четно.

Доказательство:

По теореме Эйлера сумма степеней всех вершин - четное число. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, следовательно, их четной число.

СЛЕДСТВИЕ 2. Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг: $\sum d^+(v) + \sum d^-(v) = 2q$.

Доказательство:

Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа, полученного из орграфа забыванием ориентации дуг.

Маршруты и цепи

- **Маршрутом** $M(v_0, v_k)$ в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.
 - Если $v_0 = v_k$, то маршрут **замкнут**, иначе **открыт**.
- Если все ребра различны, то маршрут называется **цепью**.
 - Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется **простой цепью**.
 - В цепи $v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называют **концами** цепи. Говорят, что цепь с концами u, v **соединяет** вершины v и u . **Цепь**, соединяющая вершины u и v , обозначается $\langle u, v \rangle$.

Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v , то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

Циклы

□ *Замкнутая цепь* называется **циклом**.

Число циклов в графе G обозначается $z(G)$.

- *Замкнутая простая цепь* называется **простым циклом**.

□ Граф без циклов называется **ациклическим**.

□ Для ориентированных графов *цепь* называется **путем**, а *цикл* - **контуром**.

□ Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается C_k .

Пример: C_3 - треугольник.

Маршруты, цепи, циклы

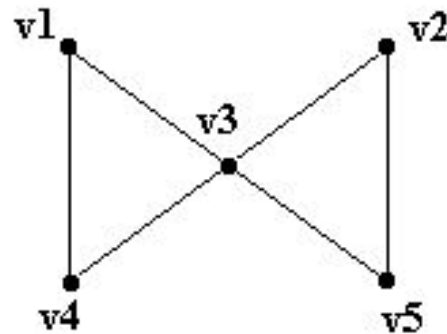


Рис. 8. Маршруты, цепи, циклы

Пример:

v_1, v_3, v_1, v_4

- маршрут, но не цепь;

$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$

- цепь, но не простая цепь;

v_1, v_4, v_3, v_2, v_5

- простая цепь;

$v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$

- цикл, но не простой цикл;

v_1, v_3, v_4, v_1

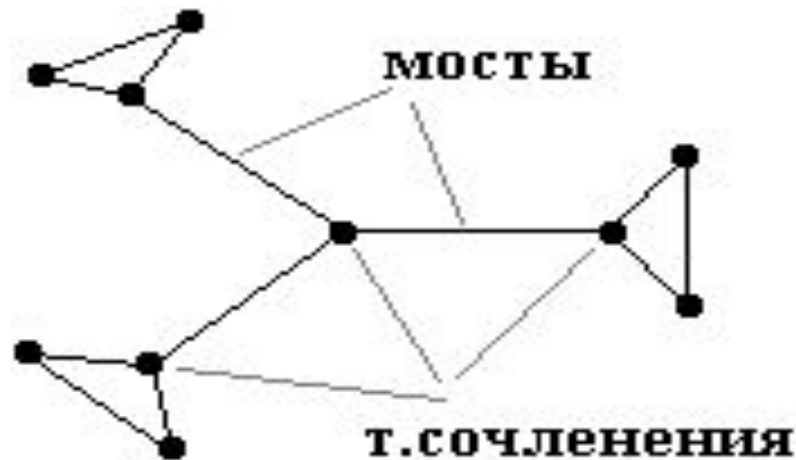
- простой цикл.

СВЯЗНОСТЬ

- Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющая их (простая) цепь.
- Граф, в котором *все вершины связаны*, называется *связным*.
- Отношение связанности вершин является эквивалентностью.
- Классы эквивалентности по отношению связанности называются *компонентами связности* графа. Число компонент связности графа G обозначается $k(G)$.
- Граф G является связным тогда и только тогда, когда $k(G) = 1$.

СВЯЗНОСТЬ

- Если $k(G) > 1$, то G - **несвязный** граф.
- Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G)=p(G)$ и $r(G) = 0$), называется **вполне несвязным**.
- **Точка сочленения / мост** – это вершина / ребро, удаление которой / которого приводит к нарушению связности компонент данного графа.



СВЯЗНОСТЬ

ТЕОРЕМА. Если граф G имеет p -вершин и k -компонент связности, то максимально возможное количество ребер в нем $N(p, k) = \frac{1}{2}(p - k + 1)(p - k)$

Связность характеризуется:

- 1. Числом вершинной связности** (числом связности) $\chi(G)$ - наименьшим количеством вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Так, $\chi(K_1) = 0$; $\chi(K_p) = p - 1$; $\chi(C_p) = 2$.
- 2. Числом реберной связности** $\lambda(G)$ - минимальным количеством ребер, удаление которых приведет к несвязному графу.

СВЯЗНОСТЬ

В общем случае $\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \deg_{\min}(G)$,
где $\deg_{\min}(G)$ - минимальная степень вершин в графе.

□ **Рассмотрим случай $\lambda(G) \leq \deg_{\min}(G)$:**

- Если граф тривиален, следовательно, в нем нет ребер, а значит: $\lambda(G) = \deg(G) = 0$.
- Если G - связный граф, то превратить его в несвязный граф можно следующим образом: найти вершины с минимальной степенью и удалить инцидентные им ребра.

□ **Рассмотрим случай $\chi(G) \leq \lambda(G)$:**

- Для несвязных графов $\chi = \lambda = 0$;
- Для графа с мостом $\chi = \lambda = 1$.
- В общем случае $\chi \leq \lambda$, так как удаление вершины ведет за собой удаление всех инцидентных ребер.

Расстояния между вершинами, ярусы и диаметр графа

- *Длиной маршрута* называется количество ребер в нем (с повторениями). Если маршрут $M = v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$ то длина M равна k (обозначается $|M| = k$).
- *Расстоянием* между вершинами u и v (обозначается $d(u, v)$) называется длина кратчайшей цепи $\langle u, v \rangle$, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*.
- Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии n от вершины v (обозначение $D(v, n)$), называется *ярусом*:
$$D(v, n) = \{u \in V \mid d(v, u) = n\}$$
Ясно, что всякий граф однозначно разбивается на ярусы относительно данной вершины.
- *Диаметром* графа G (обозначается $D(G)$) называется длина длиннейшей геодезической цепи.
- *Обхват* графа - это длина кратчайшего простого цикла.
- *Окружение* графа - длина максимального простого цикла.

Эксцентриситет и центр

□ *Эксцентриситетом* $e(v)$ вершины v в связном графе $G(V, E)$ называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G : $e(v) = \max d(v, u)$.

Наиболее эксцентричные вершины - это концы диаметра.

□ *Радиусом* $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин: $R(G) = \min e(v)$.

□ Вершина v называется *центральной*, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, $e(v) = R(G)$.

□ Множество центральных вершин называется *центром* и обозначается $C(G)$: $C(G) = \{v \in V \mid e(v) = R(G)\}$.

Эксцентриситет и центр

Пример:

На рис.9. указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов. Вершины, составляющие центр, выделены.

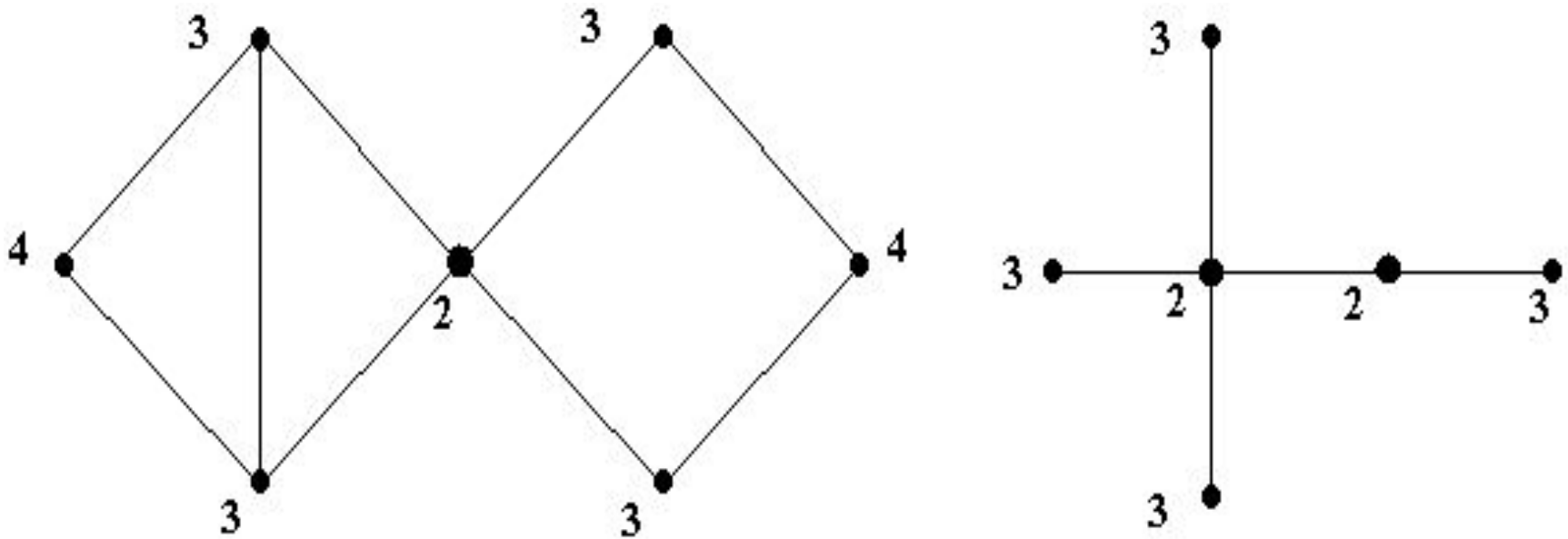
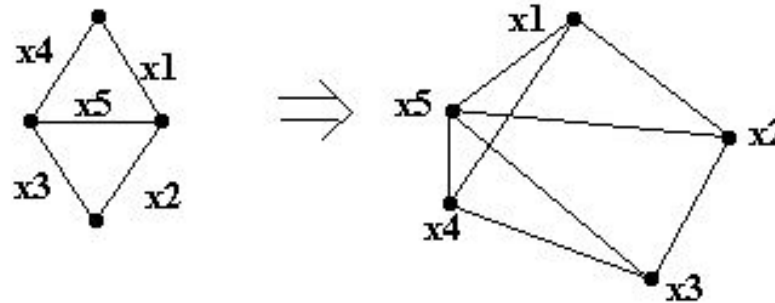


Рис. 9. Эксцентриситеты вершин и центры графов

Смежностные графы



Построение смежностного графа

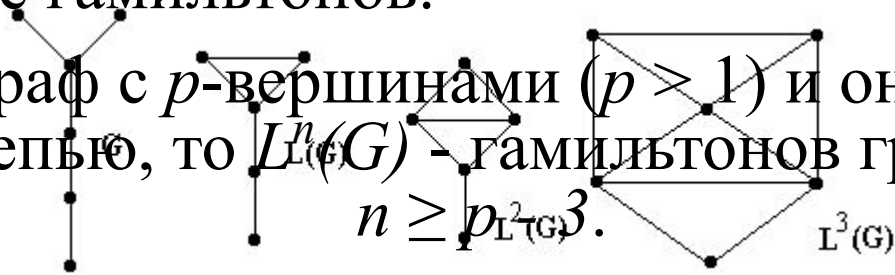
- Смежностный граф обозначается $L(G)$.
- В смежностном графе количество вершин равно количеству ребер в исходном графе - q . Количество ребер в смежностном графе равно

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1} (\deg(V_i)^2) - q$$

- $L(G) = (q, \frac{1}{2} \sum_{i=1} (\deg(V_i)^2) - q)$

Свойства смежных графов

- Связный граф G изоморфен своему смежному графу, если он - простой цикл длиной 3.
- Если имеется эйлеров граф, то смежный ему граф - эйлеров и гамильтонов.
- Если имеется гамильтонов граф, то смежный ему граф - тоже гамильтонов.
- Если G - граф с p -вершинами ($p > 1$) и он не является простой цепью, то $L^n(G)$ - гамильтонов граф для всех



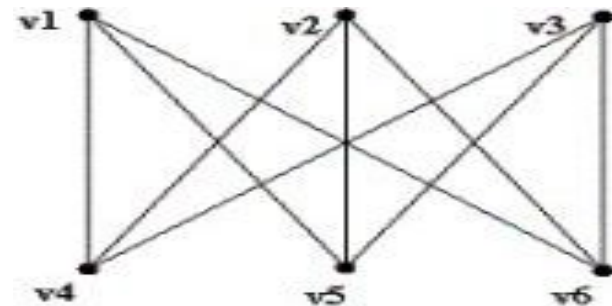
Двудольные графы

- **Двудольный** граф (или *биграф*, или *четный граф*) - это граф $G(V, E)$, такой что
 - множество V разбито на два непересекающихся множества V_1 и V_2 ,
 - причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2).
- Множества V_1 и V_2 называются **долями** двудольного графа.
- Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2 , то он называется **полным двудольным графом**.

Если $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$, то полный двудольный граф – $K_{m,n}$.

Пример:

На рис. приведена диаграмма графа $K_{3,3}$



Двудольные графы

ТЕОРЕМА. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.*

Доказательство:

[Необходимость.] От противного.

Пусть $G(V_1, V_2; E)$ - двудольный граф, и $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}, v_1$ - простой цикл нечетной длины. Пусть $v_1 \in V_1$, тогда $v_2 \in V_2, \dots, v_{2k+1} \in V_1$. Имеем: $v_1, v_{2k+1} \in V_1$ и $(v_1, v_{2k+1}) \in E$, что противоречит двудольности.

[Достаточность.] Не ограничивая общности, можно считать, что G - связный граф, поскольку каждую компоненту связности можно рассматривать отдельно. Разобьем множество V на V_1 и V_2 .

Далее от противного. Пусть есть две вершины в одной доле, соединенные ребром. Пусть для определенности $u, w \in V_2$ и $(u, w) \in E$. Рассмотрим геодезические $\langle v, u \rangle$ и $\langle v, w \rangle$. Тогда длины $|\langle v, u \rangle|$ и $|\langle v, w \rangle|$ нечетны. Эти геодезические имеют общие вершины (по крайней мере вершину v). Рассмотрим наиболее удаленную от v общую вершину геодезических $\langle v, u \rangle$ и $\langle v, w \rangle$ и обозначим ее v' (может оказаться так, что $v = v'$). Имеем: $|\langle v', u \rangle| + |\langle v', w \rangle| = |\langle v, u \rangle| + |\langle v, w \rangle| - 2|\langle v, v' \rangle|$ - четно, и $v', \dots, u, w, \dots, v'$ - простой цикл нечетной длины, что противоречит условию.

Двудольные графы

□ *Совершенным паросочетанием* из одного множества в другое в двудольном графе G называется взаимно однозначное соответствие между данными множествами, обладающие тем свойством, что соответствующие вершины в исходном графе смежны.

□ **ТЕОРЕМА** (о свадьбах). Пусть некоторый граф $G(V_1, V_2)$ - двудольный и для каждого подмножества $A \subset V_1$, обозначим через $\varphi(A) \subset V_2$ множество вершин, которые смежны хотя бы с одной вершиной в множестве A . Тогда совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда

$$|A| \leq |\varphi(A)|$$

Деревья

□ Граф без циклов называется *ациклическим* (или *лесом*).

□ *Дерево* - это связный ациклический граф.

(обозначается T_n , где n - количество вершин)

Дерево можно построить путем добавления ребер в его вершинах.

Простейшее дерево состоит из 2 вершин, соединенных ребром.

При добавлении очередного ребра, добавляется еще одна вершина.

- Граф G - *дерево*, если это связанный граф и $p=q+1$, где p , q - количество вершин и ребер соответственно.
- Граф G - *дерево*, если это ациклический граф такой, что если между двумя его вершинами провести ребро, в нем получится ровно 1 простой цикл.
- Граф G - *дерево*, если любые 2 его вершины соединены простой цепью.

Деревья

- При введении в графе операции удаления ребра, причем такой операции, которая не приводит к нарушению связности графа, можно получить ее последовательным применением (пока возможно) *остовное дерево*.
- Если имеем граф с характеристиками (p, q) -граф, то для получения дерева надо удалить $q - p + 1$ ребро. Данное число называется *циклическим рангом* графа или *цикломатическим числом* $v(G) = q - p + 1$.
- Число $v^*(G) = p - 1$ ребер любого остова графа G называется *коциклическим рангом* графа G .
 $v(T_n) = 0, \quad v(C_n) = 1$ - простой цикл,
 $v(G^k) = q - p + k, \quad v^*(G^k) = p - k,$
где G^k - несвязный граф состоящий из k -компонент связности.

Деревья

ТЕОРЕМА. *Центр свободного дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин:*

$$z(G) = 0 \quad \& \quad k(G) = 1 \Rightarrow C(G) = K_1 \vee C(G) = K_2.$$

Доказательство:

Для деревьев K_1 и K_2 утверждение теоремы очевидно.

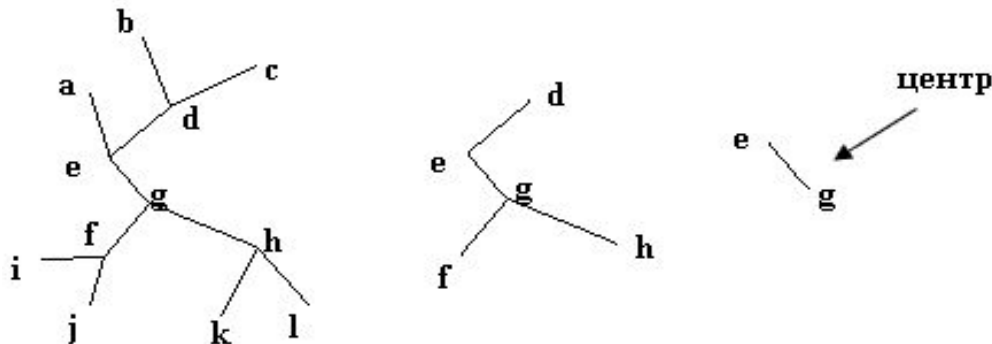
Пусть теперь $G(V, E)$ - некоторое свободное дерево, отличное от K_1 и K_2 .

Рассмотрим граф $G'(V', E')$, полученный из G удалением всех висячих вершин. Заметим, что G' - дерево, поскольку ацикличность и связность при удалении висячих вершин сохраняется.

Далее, если эксцентриситет $e_G(v) = d(v, u)$, то u - висячая вершина в дереве G .

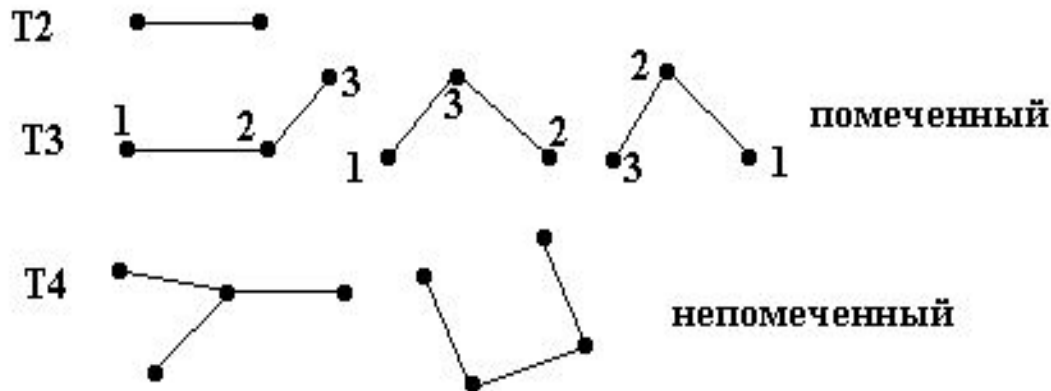
Поэтому $\forall v \in V' \quad e_G(v) = e_{G'}(v) + 1$ и при удалении висячих вершин эксцентриситеты оставшихся уменьшаются на 1. Следовательно, при удалении висячих вершин центр не меняется, $C(G) = C(G')$.

Поскольку дерево G конечно, то удаляя на каждом шаге все висячие вершины, в конце концов за несколько шагов придем к K_1 или K_2 .



Перечисление деревьев

- Теория перечисления деревьев занимается разработкой методов подсчета неизоморфных графов, обладающих данными свойствами.
- Основной вопрос теории перечисления деревьев - сколько существует деревьев T_n неизоморфных друг другу.
- Данная задача была решена ученым Келли. Он доказал, что всего может быть n^{n-2} помеченных неизоморфных деревьев. Данная теория применяется для решения задач при создании кратчайшей связной цепи.



Остовное дерево минимального веса

Пример:

Пусть необходимо построить сеть железных дорог, связывающую n городов таким образом, чтобы из каждого города можно было попасть в любой город и количество рельсов при этом должно быть минимальным.

Формальная постановка задачи:

Имеется n городов a_1, a_2, \dots, a_n , которые нужно соединить сетью дорог. Для каждой пары городов (a_i, a_j) известна стоимость строительства дороги $d(a_i, a_j)$. Требуется найти самый дешевый вариант строительства. То есть, нужно найти на взвешенном полном графе из n вершин остовное дерево наименьшей длины.

Построение остова минимального веса

□ Алгоритм Г.Штейнгауза:

- Выбрать любой город и соединить его с ближайшим. И повторить это действие для всех остальных городов.
- Если вместо единого дерева получился лес, то необходимо выбрать одно из деревьев леса и соединить его кратчайшим ребром с другим деревом. И повторить такое связывание деревьев пока не будет получено одно дерево.

□ Алгоритм Краскала

- Соединить 2 вершины графа наиболее коротким ребром.
 - Последовательно добавлять самое короткое ребро из оставшихся так, чтобы не образовывалось циклов.
- Остовное дерево графа, построенное по данному алгоритму называется **ЭКОНОМИЧЕСКИМ**.

Экономическое дерево

ТЕОРЕМА. Экономическое дерево имеет минимальную длину в графе.

Доказательство:

Пусть P – остовное дерево минимальной длины;
 Q – экономическое дерево.

Пусть ребра e_1, e_2, \dots, e_{n-1} занумерованы в порядке их присоединения при построении экономического дерева Q , т.е. $d(e_k) \leq d(e_{k+1})$.

Если $P \neq Q$, то имеется хотя бы 1 ребро $e_i \notin P$, соединяющее некоторые вершины a и b в графе Q .

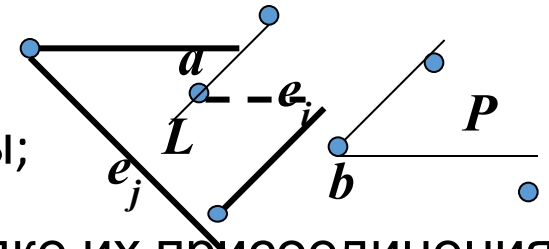
Пусть $L(a, b)$ – цепь графа P , соединяющая в нем эти вершины a и b .

Если ребро e_i добавить к графу P , получится цикл. А так как граф Q циклов не имеет, то в полученный цикл должно входить 1 ребро не из графа Q – ребро e_i . Удалив его из P , получим дерево P' с тем же числом вершин, что и в графе P , длина которого равна $d(P') = d(P) + d(e_i) - d(e_i)$.

Так как граф P имеет наименьшую длину, то $d(e_i) \leq d(e_j)$, но e_i – ребро наименьшей длины, при добавлении которого к ребрам e_1, e_2, \dots, e_{i-1} по алгоритму построения экономического дерева Q не получается циклов.

При добавлении ребра e_i к этим ребрам также не получается циклов, то $d(e_i) = d(e_j)$, и, следовательно, P' имеет также как и P наименьшую длину и одним общим ребром больше с экономическим деревом Q , чем P .

Повторяя эту операцию несколько раз, получим дерево наименьшей



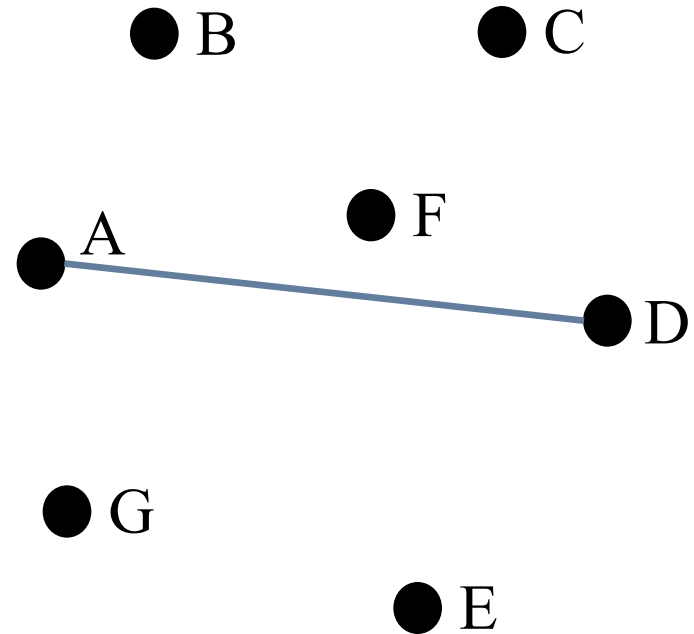
Пример построения остовного дерева

слайд 1/6

A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	

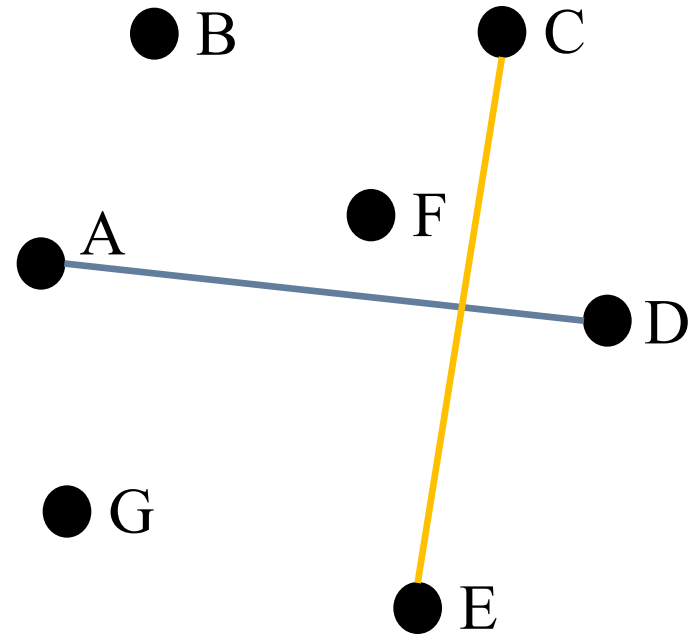
Пример построения остовного дерева слайд 2/6

	A			D			
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



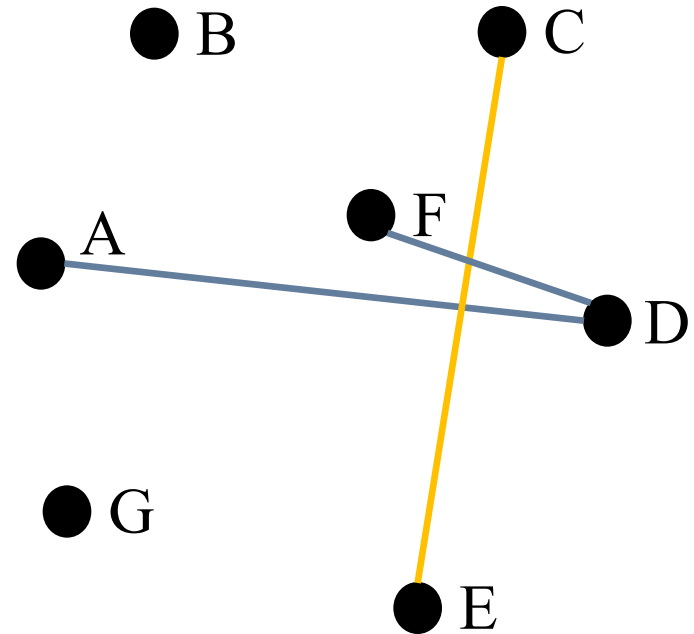
Пример построения остовного дерева слайд 2/6

	A		C	D	E		
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



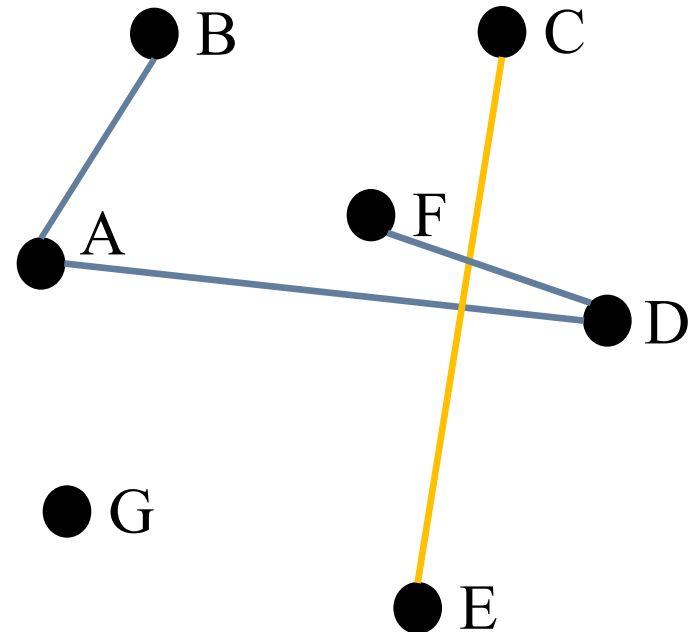
Пример построения остовного дерева слайд 3/6

	A		C	D	E	F	
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



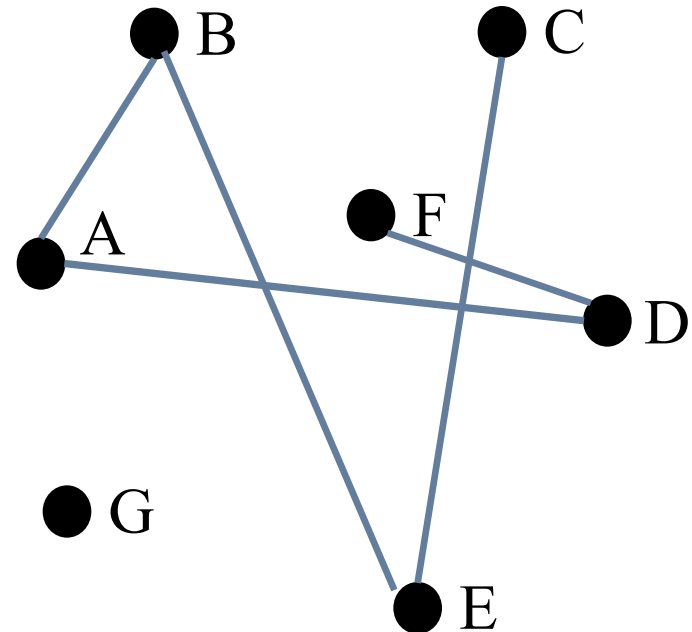
Пример построения остовного дерева слайд 4/6

		B	C	D	E	F	
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



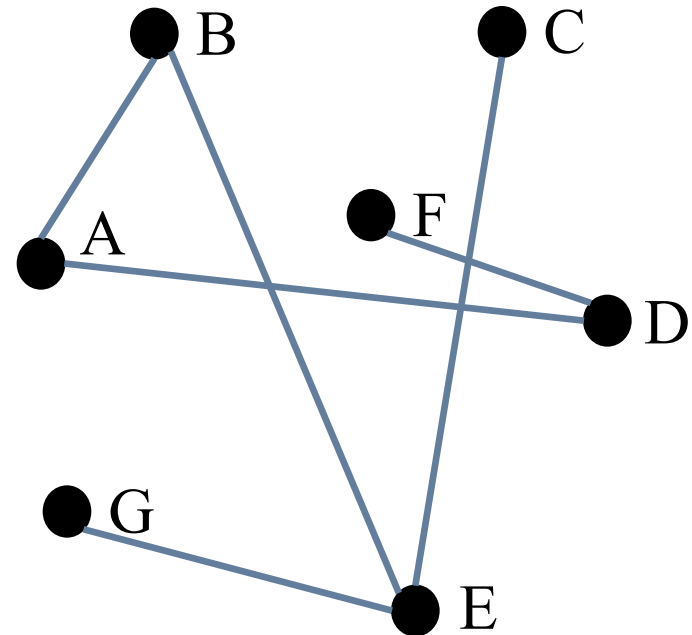
Пример построения остовного дерева слайд 5/6

	A	B	C	D	E	F	
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



Пример построения остовного дерева слайд 6/6

	A	B	C	D	E	F	G
A		7		5			
B	7		8	9	7		
C		8			5		
D	5	9			15	6	
E		7	5	15		8	9
F				6	8		11
G					9	11	



- Суммарная длина дерева - 32

Эйлеровы графы

- *Эйлеров граф* - это связный граф, если в нем существует замкнутая цепь, проходящая ровно 1 раз через каждое ребро.
- Если снять ограничение на замкнутость, то получим *полу-Эйлеров граф*.

ЛЕММА. *Если степень каждой вершины графа не меньше 2, то он содержит цикл.*

Лемма является очевидной, так как построение такого маршрута возможно, если нет висячих вершин (степень которых меньше 2).

Эйлеровы графы

ТЕОРЕМА. *Для связанного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

- 1. G - эйлеров граф;*
- 2. каждая вершина графа G имеет четную степень;*
- 3. множество ребер графа можно разбить на простые циклы.*

Доказательство:

2. Надо доказать, что из 1) следует 2).

Так как по определению Эйлерова графа - это граф, в котором есть маршрут, содержащий ровно 1 раз каждое ребро графа, следовательно, рассматривая данный маршрут, данную вершину будем проходить несколько раз (при обходе графа, как минимум, по 1 разу входим в вершину и 1 раз уходим из нее, следовательно, ее степень кратна 2, т.е. четна);

Эйлеровы графы

2. Надо доказать, что из 2) следует 3).

Так как G - связный и нетривиален, то степень каждой вершины не меньше двух, следовательно, (по лемме) в графе G имеется цикл.

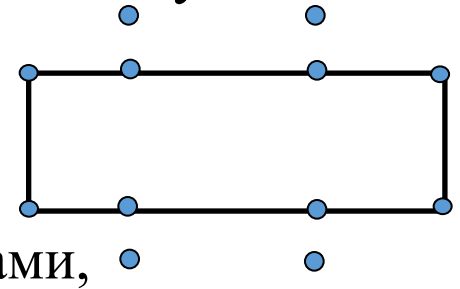
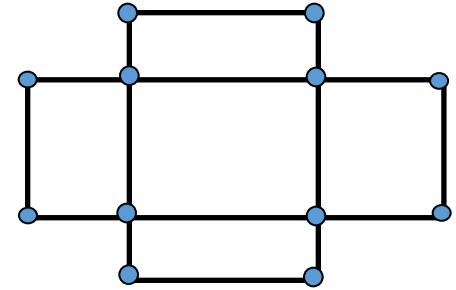
Удалим этот цикл из графа.

Так как все вершины имеют четную степень, то полученный граф обладает теми же свойствами.

В этом графе все вершины имеют

- четную степень (также 0),
- либо являются отдельно стоящими вершинами,
- либо существует компонента связности с четной степенью, следовательно, есть цикл.

Удаляем циклы из графа, пока весь граф не будет представлен множеством тривиальных графов;



Эйлеровы графы

3. Надо доказать, что из 3) следует 1).

Допустим z_1 - некоторый цикл, принадлежащий G .

Если G состоит только из z_1 , следовательно,

эквивалентность при 3) \Rightarrow 1) доказана, граф Эйлеров.

В противном случае, если есть еще z_2 , то эти два простых цикла имеют одну общую вершину. И как бы мы не строили маршрут, два раза будем проходить через вершину, следовательно это Эйлеров граф.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G - связный граф, в котором не более двух вершин имеют нечетные степени, тогда в графе G существует незамкнутая цепь, содержащая все ребра. И граф – полу-Эйлеров.

Пример:

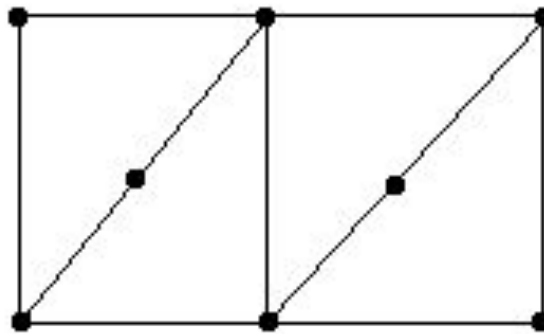
Нужно решить задачу: существует план выставки. Нужно так расставить указатели, чтобы посетитель побывал в каждом зале 1 раз и посетил их все.

Алгоритм построения Эйлера цикла

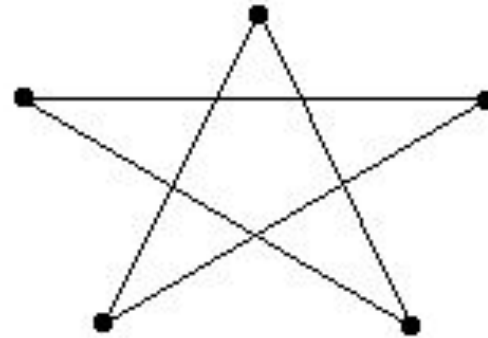
- ❑ Выбираем любую вершину;
- ❑ Идем по ребрам произвольным образом, соблюдая следующие принципы:
 - ❑ удаляем ребра по мере прохождения;
 - ❑ удаляем изолированные вершины;
 - ❑ на каждом этапе идем по мосту лишь тогда, когда нет другой возможности.

Гамильтоновы графы

- *Гамильтонов граф* - это граф, в котором имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.
- Этот *цикл* называют *гамильтоновым*.
- Простую *цепь*, содержащую каждую вершину графа, также называют *гамильтоновой*.



не гамильтонов граф



гамильтонов граф

Нет теоремы, дающей необходимого и достаточного условия определения гамильтонова графа.

Гамильтоновы графы

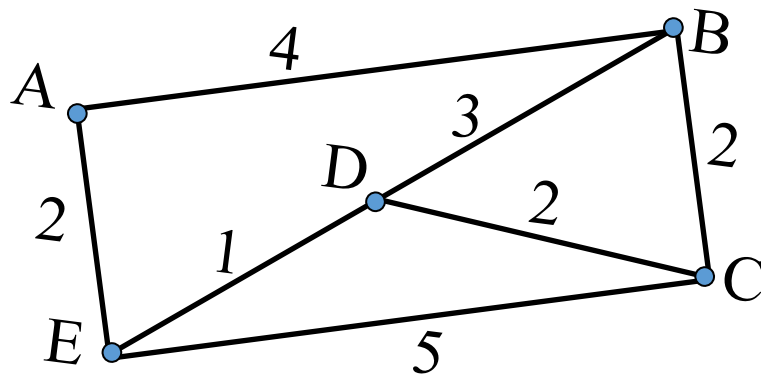
□ Достаточные условия наличия в графе гамильтонова цикла:

1. Граф со степенной последовательностью $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ является гамильтоновым, если для всякого k , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k < n/2$, истинна импликация $(d_k \leq k) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$;
2. Если в G с $p > 3$ для любой вершины степень не меньше $p/2$, то это гамильтонов граф;
3. Если для любой пары несмежных вершин сумма их степеней больше либо равна p , то это гамильтонов граф.

Задача коммивояжёра

- Имеется n городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер должен посетить все n городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Очевидно, что это задача отыскания кратчайшего гамильтонова цикла в нагруженном полном графе.



Метод полного перебора

Схема решения задачи коммивояжера:

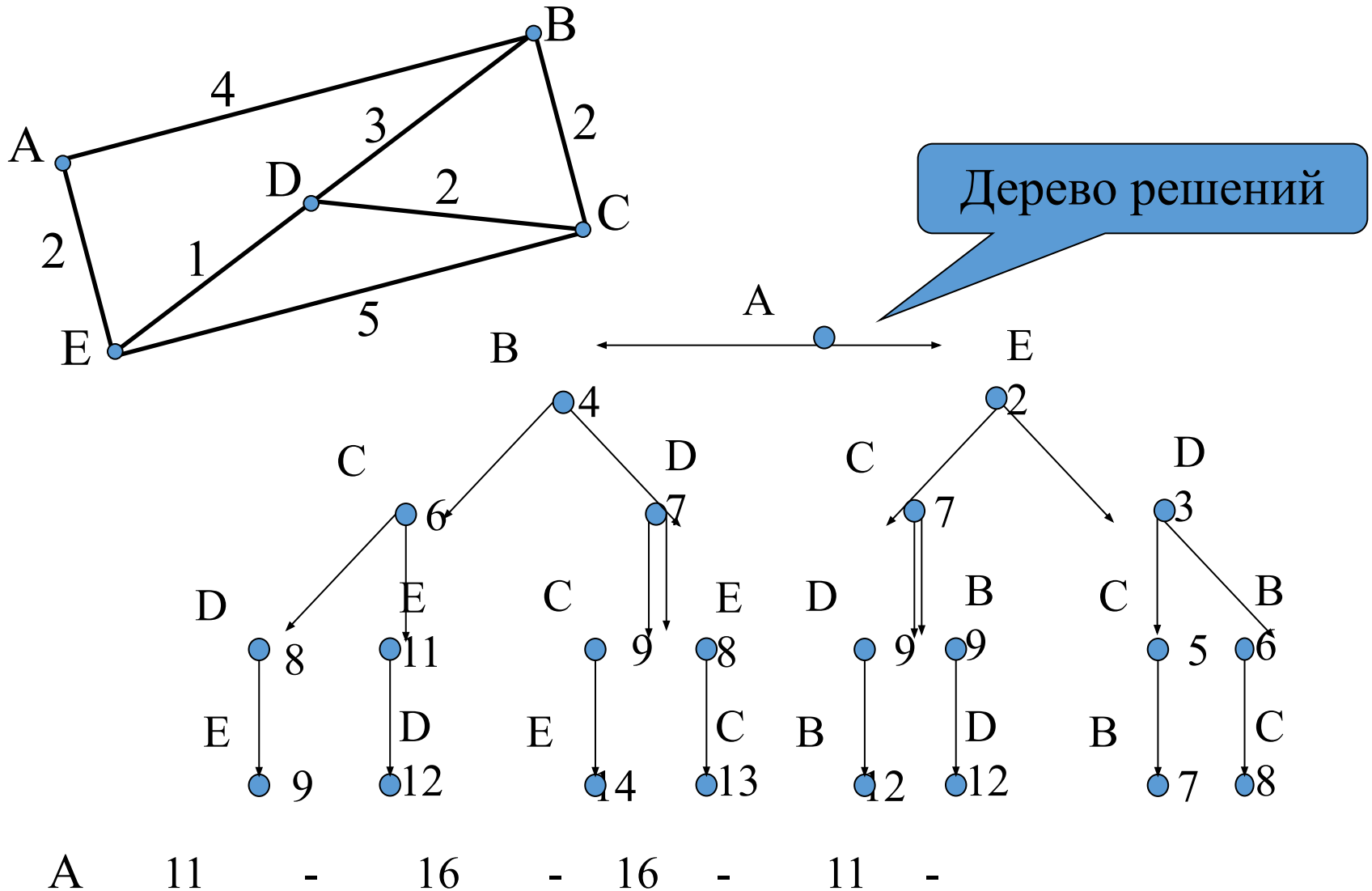
- Сгенерировать все $n!$ возможных перестановок вершин полного графа.
- Подсчитать для каждой перестановки длину маршрута.
- И выбрать из них кратчайший.

Очевидно, такое вычисление потребует не менее $O(n!)$ шагов.

$n!$ - быстро растущая функция. Таким образом, решение задачи коммивояжера методом *полного перебора* оказывается практически неосуществимым даже для сравнительно небольших n .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	479001600	6227020800	87178291200	1,30767E+12

Метод полного перебора



Метод ветвей и границ

1. Выбрать начальную вершину A графа и присвоить ей оценку длины пути 0 .
2. Провести все ветви из вершины с минимальной оценкой.
3. Каждой из образовавшихся вершин присвоить соответствующую оценку.
4. ? Имеется ли среди образовавшихся вершин вершина A (начальная вершина)
Да: 5. Вычислить длину полученного цикла L_m .
6. Отсечь все маршруты, оценки которых $\geq L_m$.
Нет: 7. ? Есть ли на графе неотсеченные вершины
Да: 2.
Нет: 8. Выписать полученный маршрут L_m .

Задача о кратчайшем пути

Дан неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$. Каждому ребру графа приписано число $d(e) \geq 0$, называемое длиной ребра. При этом любая цепь $\mu = \langle v_o, v_k \rangle$ характеризуется длиной:

$$d(\mu) = \sum_{e \in \mu} d(e).$$

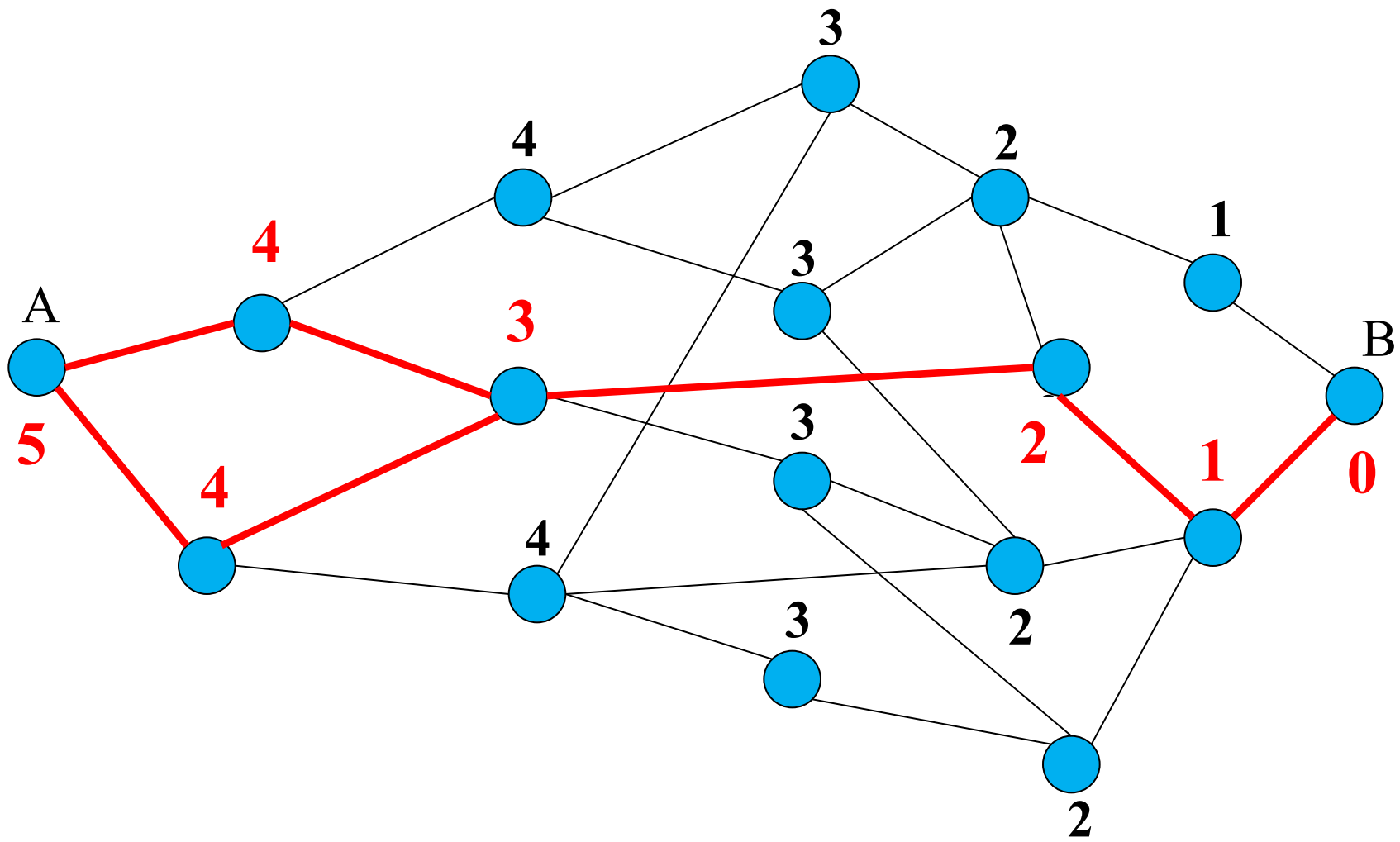
Требуется найти для 2 произвольных вершин a и b графа G путь $\langle a, b \rangle$, такой, чтобы его длина была наименьшей.

Кратчайший путь в графе с ребрами единичной длины

Правило: каждой вершине v_i приписывают индекс w_i , равный длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную.

Порядок приписывания индексов:

1. Конечной вершине b приписывается индекс $w_b=0$.
2. Всем вершинам, смежным с конечной вершиной b , приписывается индекс, равный 1.
3. Всем вершинам, смежным с помеченными вершинами, приписывается индекс на 1 больший, чем у смежной помеченной вершины.
4. Процесс разметки (п.3) продолжается до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина a . Ее индекс w_a будет равен искомой длине кратчайшего пути.
5. Кратчайший путь определяется при движении из начальной вершины в направлении уменьшения

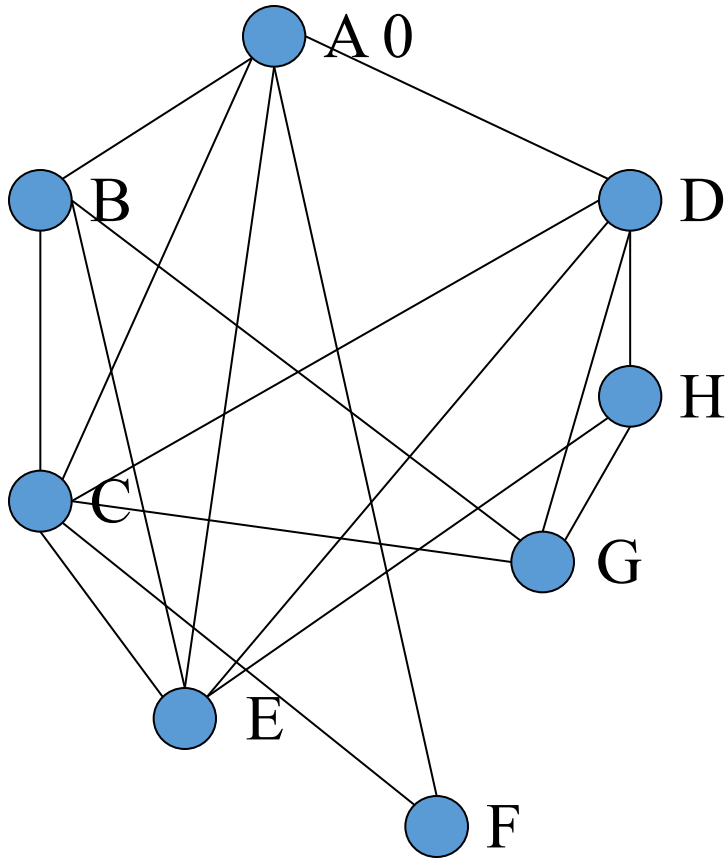


Кратчайший путь в графе с ребрами произвольной длины

Порядок приписывания индексов:

1. Каждая вершина помечается индексом следующим образом:
 - Конечной вершине b приписывается индекс $w_b = 0$;
 - Всем остальным $v_i - w_i = \infty$.
2. Ищем ребро (v_i, v_j) , такое, чтобы $(w_j - w_i) > d(v_i, v_j)$ и заменяем индекс w_j индексом $w_j' = w_i + d(v_i, v_j) < w_j$.
3. Процесс разметки (п.3) продолжается до тех пор, пока остается хотя бы 1 ребро (v_i, v_j) , для которого можно уменьшить w_j .
4. Кратчайший путь определяется при движении из начальной вершины в направлении уменьшения значений индексов, причем $(w_i - w_j) = d(v_i, v_j)$.

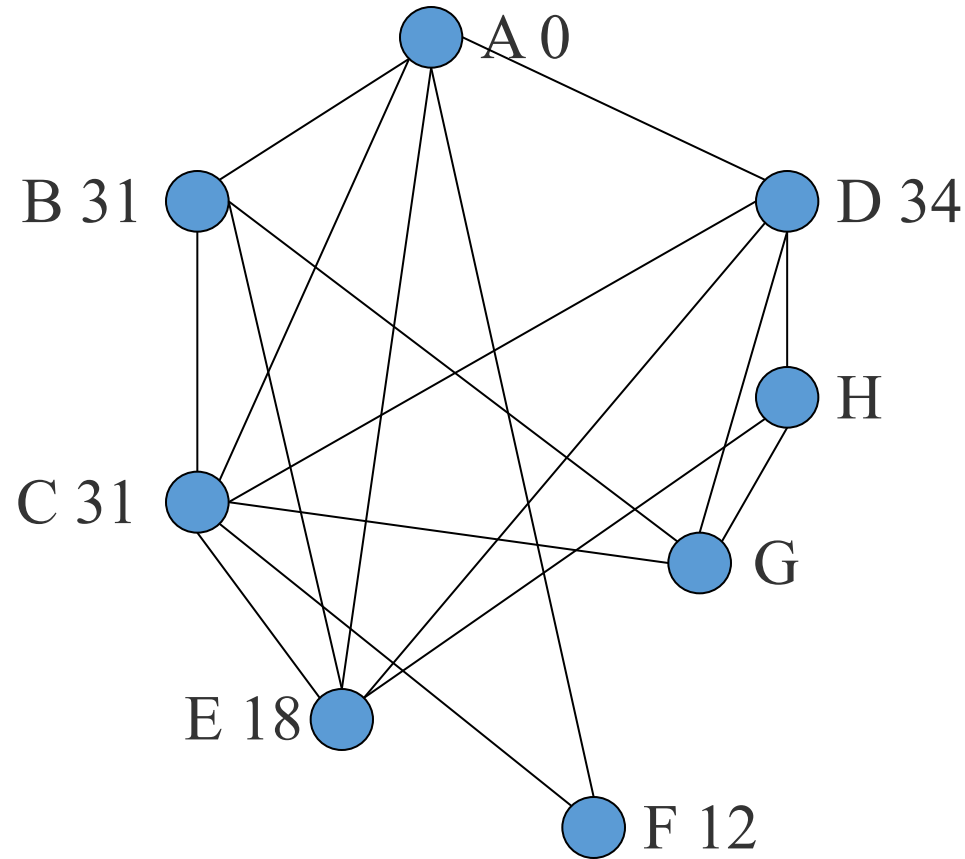
Поиск пути А – Н слайд 1/5



Шаг 1. Начало разметки.
Вершине А присваивается индекс 0, остальным – бесконечный

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	31	31	34	18	12		
B	31	-	21		17		26	
C	31	21	-	1	6	28	10	
D	34		1	-	30		19	4
E	18	17	6	30	-			27
F	12		28			-		
G		26	10	19			-	9
H				4	27		9	-

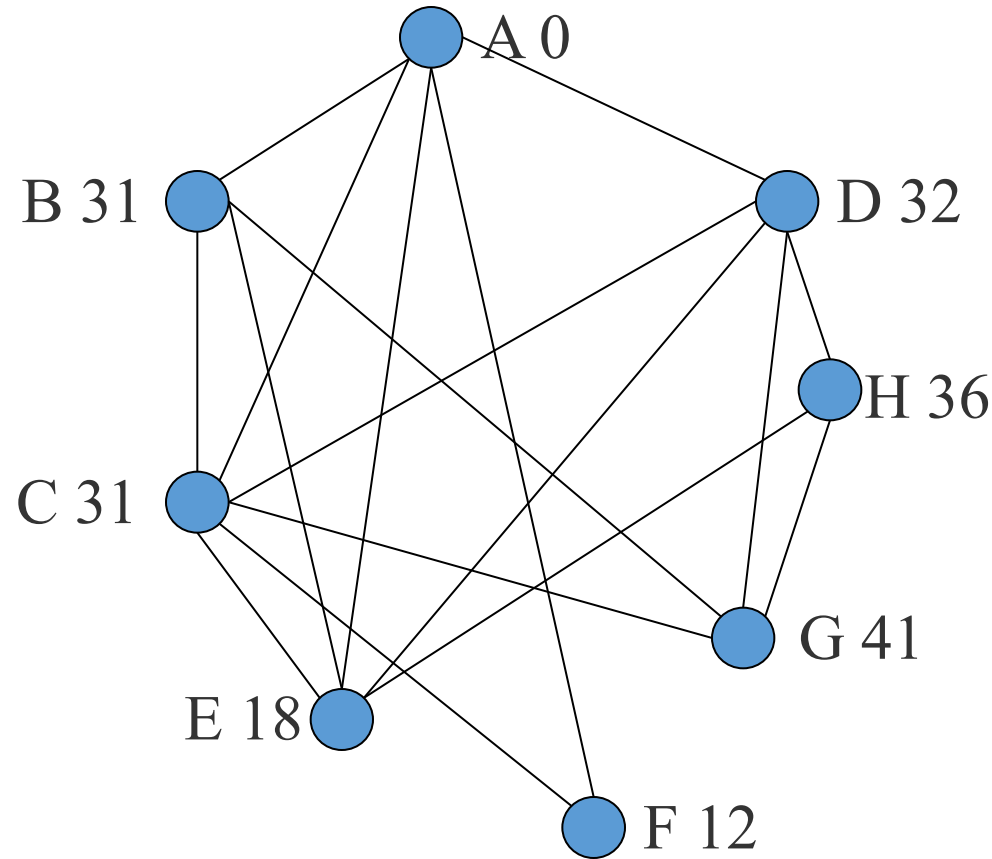
Поиск пути А – Н слайд 2/5



Шаг 2. Изменяем индексы вершин, смежных с А

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	31	31	34	18	12		
B	31	-	21		17		26	
C	31	21	-	1	6	28	10	
D	34		1	-	30		19	4
E	18	17	6	30	-			27
F	12		28			-		
G		26	10	19			-	9
H				4	27		9	-

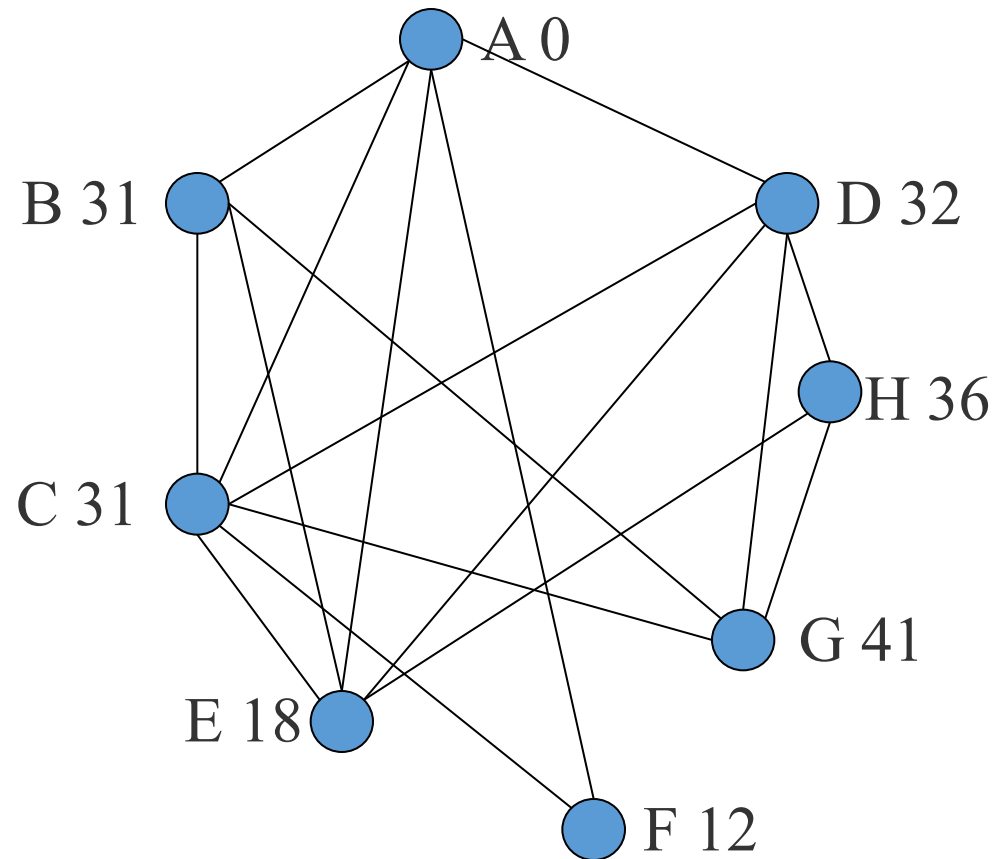
Поиск пути А – Н слайд 3/5



Шаг 3. Изменяем индексы вершин, смежных с изменёнными на шаге 2, следя за тем, чтобы новые индексы были меньше. (вершины C, E, D)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	31	31	34	18	12		
B	31	-	21		17		26	
C	31	21	-	1	6	28	10	
D	34		1	-	30		19	4
E	18	17	6	30	-			27
F	12		28			-		
G		26	10	19			-	9
H				4	27		9	-

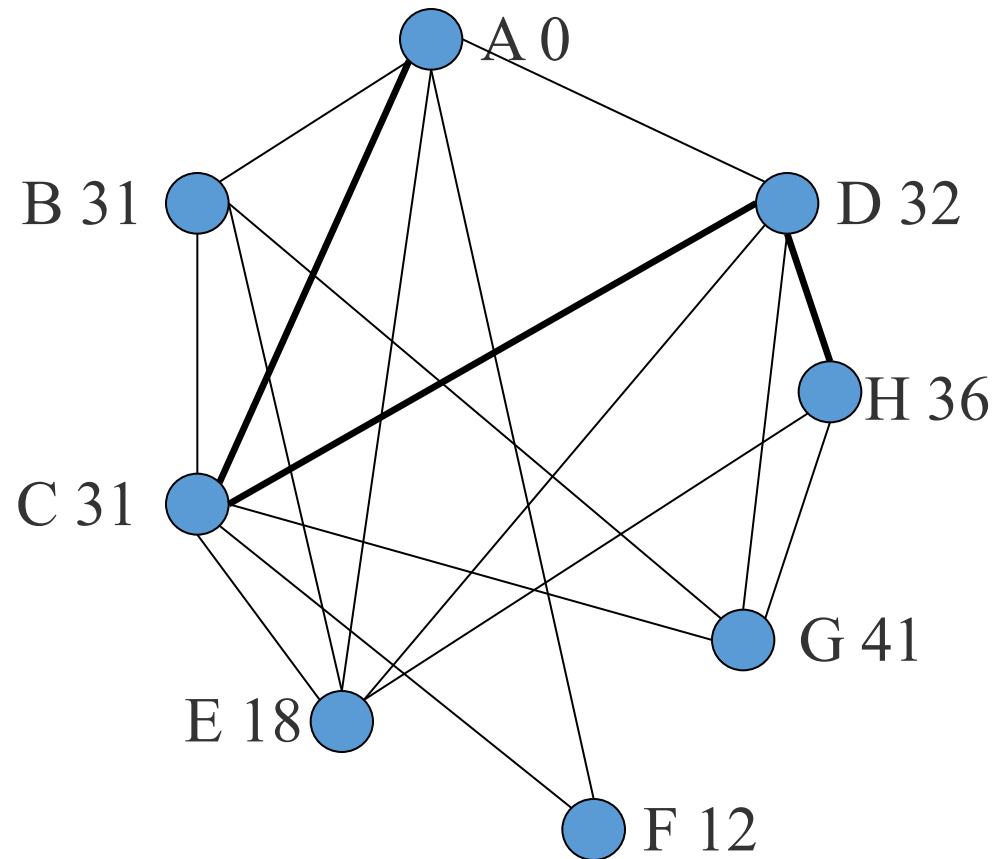
Поиск пути А – Н слайд 4/5



Шаг 4. Изменяем индексы вершин, смежных с изменёнными на шаге 3. Изменений индексов нет, поэтому разметка завершена

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	31	31	34	18	12		
B	31	-	21		17		26	
C	31	21	-	1	6	28	10	
D	34		1	-	30		19	4
E	18	17	6	30	-			27
F	12		28			-		
G		26	10	19			-	9
H				4	27		9	-

Поиск пути А – Н слайд 5/5



Шаг 5. Ведём поиск пути из Н в А в направлении наиболее быстрого убывания индексов и таким образом, чтобы существовали рёбра с длиной, равной изменению индекса. Таков путь Н-D-C-A длиной 36

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	31	31	34	18	12		
B	31	-	21		17		26	
C	31	21	-	1	6	28	10	
D	34		1	-	30		19	4
E	18	17	6	30	-			27
F	12		28			-		
G		26	10	19			-	9
H				4	27		9	-

Укладка графа

□ Жордановой кривой называют непрерывную спрямленную линию, не имеющую самопересечений.

□ Граф G укладывается в пространство S , если существует такая биекция вершин и ребер графа G соответственно в точки и жордановы кривые этого пространства, которая сохраняет *инцидентность* ребер и вершин графа G . Изображенный таким образом граф называют **укладкой графа G в пространство S .**

Теорема об укладке графа

ТЕОРЕМА. Каждый граф укладывается в трехмерное (евклидово) пространство.

Доказательство:

Разместим все вершины графа в различных точках оси OX .

Из всех плоскостей, проходящих через эту ось, выберем $|E_G|$ различных плоскостей. Каждое ребро $e \in E_G$ изображаем в отдельной плоскости полуокружностью, соединяющей вершины этого ребра.

Таким образом, получаем укладку графа в евклидовом пространстве, т.к. все ребра лежат в разных плоскостях и не пересекаются.

Плоские графы

- **Плоским** называется граф, который размещен на плоскости или сфере без пересечений.
- **Планарным** называется граф, который изоморфен плоскому. Это граф, который укладывается на плоскости, т. е. имеет *плоскую укладку*.
- **Гранью** графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей ребра графа.
- **Границей грани** является множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани (или цикл, ее образующий).
- Всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Эта грань называется **внешней** гранью. Остальные грани графа называются **внутренними**.

Свойства планарных графов

1. Всякий планарный граф допускает такую плоскую укладку, в которой любая выбранная вершина (ребро) будет принадлежать внешней грани.
2. Граф G , полученный путем слияния 2 вершин (ребер), принадлежащих различным планарным графам, является планарным. При этом вершина (ребро) слияния является точкой (ребром) сочленения графа G .
3. Всякие 2 вершины, принадлежащие границе некоторой грани плоского графа, можно соединить простой цепью произвольной длины так, что выбранная грань разобьется на 2 грани.
4. Для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань.
5. Для любого плоского графа каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это ребро является мостом, и точно в 2 грани, если оно не мост.

Планарность

ТЕОРЕМА. Если G - связный плоский граф, имеющий p -вершин и q -ребер и f -граней, то $p + f - q = 2$.

Доказательство:

Возьмем тривиальный граф: $p = 1, q = 0, f = 1$.

Проверяем $1 + 1 - 0 = 2$.

Возьмем граф $G(2, 1)$. Проверим: $2 + 1 - 1 = 2$.

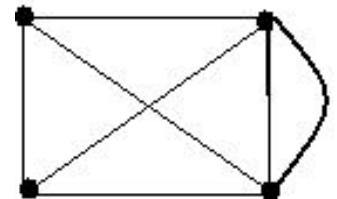
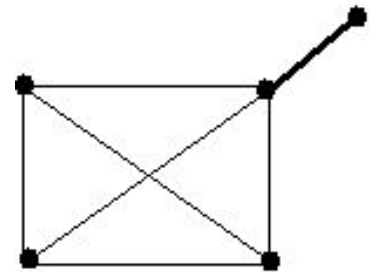
Допустим теорема справедлива для $q = q'$.

Добавляем новое ребро в этот граф, в итоге получается 2 случая:

1. Данное ребро не образует новой грани,
следовательно $(p + 1) + f - (q' + 1) = p + f - q$.

2. Данное ребро образует новую грань,
следовательно, не образуется новая вершина:

$$p + f_{+1} - q_{+1} = 2.$$



Данная теорема называется **формулой Эйлера** для многогранников. Метод доказательства - индуктивный.

Планарность

СЛЕДСТВИЯ:

1. Пусть G планарен и у него p -вершин, q -ребер, f -граней и k -компонент связности, тогда

$$p + f - q - k = 1;$$

2. Если G - связный планарный граф, имеющий хотя бы 1 цикл нечетной длины, то $q \leq 3p - 6$;

- Для двудольных графов в этом случае: $p \leq 2q - 4$.

3. Число граней любой плоской укладки связного планарного (p, q) -графа постоянно и равно

$$q - p + 2.$$

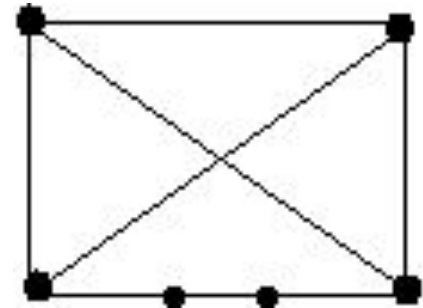
- Т.е. число граней планарного графа не зависит от способа его укладки на плоскости.

Планарность

ТЕОРЕМА (Понтрягина - Куратовского).

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа гомеоморфного K_5 и $K_{3,3}$.

- Графы G_1 и G_2 - *гомеоморфны*, если они оба могут быть получены из одного и того же графа включением в его ребра новых вершин степени 2.



Решение задач на планарность необходимы в автоматизированном проектировании, когда необходимо, например, произвести трассировку печатной платы.

Вопрос о трассировке печатной платы - это вопрос получения разбиения графа на n -планарных подграфов.

Алгоритм плоской укладки графа. Основные определения

Пусть построена некоторая плоская укладка подграфа $G^1(V^1, E^1)$ графа $G(V, E)$.

□ **Сегментом S относительно G^1** называют подграф графа G одного из двух видов:

1. Ребро $e = (v_i, v_j) \in E: v_i, v_j \in V^1, e \notin E^1$;

2. Связную компоненту графа $(G - G^1)$, дополненную

- всеми ребрами графа G , инцидентными вершинам взятой компоненты, и
- концами этих ребер.

□ Вершину a сегмента S относительно G^1 называют **контактной**, если $a \in V^1$.

□ **Допустимой гранью** для сегмента S относительно G^1 называют грань графа G^1 , содержащую все контактные вершины сегмента S . Обозначим $\Gamma(S)$ – множество допустимых граней для S (оно может быть и пустым).

Алгоритм плоской укладки графа. Основные определения

- Простую цепь сегмента S , соединяющую 2 различные контактные вершины, и не содержащую других контактных вершин, называют **α -цепью**. Всякая α -цепь сегмента может быть уложена в любую грань, допустимую для этого сегмента.
- Два сегмента S_1 и S_2 относительно G^1 называют **конфликтующими**, если
 1. $Q = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2) \neq \emptyset$,
 2. существуют 2 α -цепи из разных сегментов S_1 и S_2 , которые нельзя без пересечений уложить одновременно не в какую грань $\Gamma \in Q$.

Иные сегменты не конфликтуют.

Алгоритм плоской укладки графа. Основные определения

Допустимые грани:

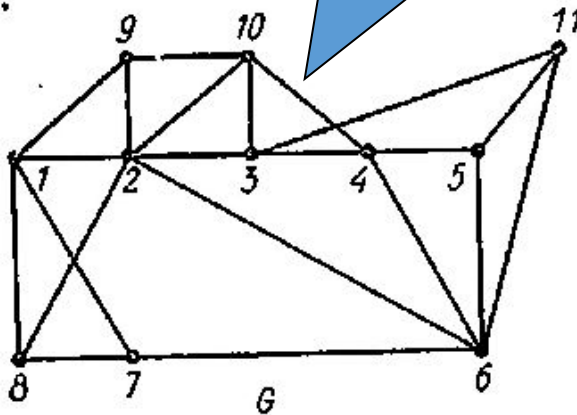
$$\Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$$

α -цепи S_1 :

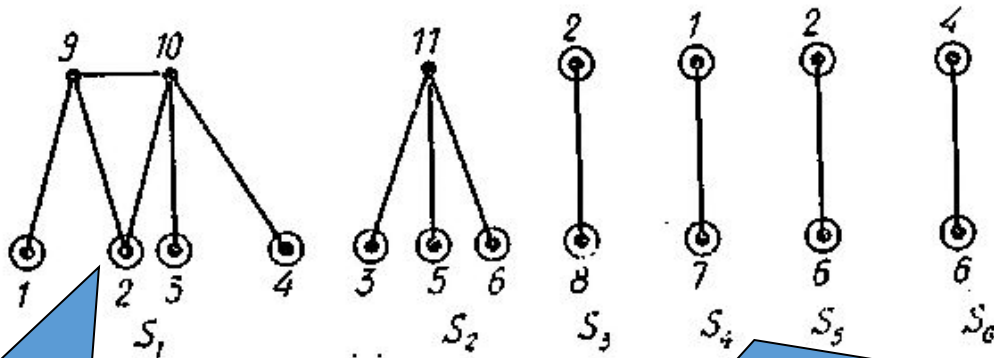
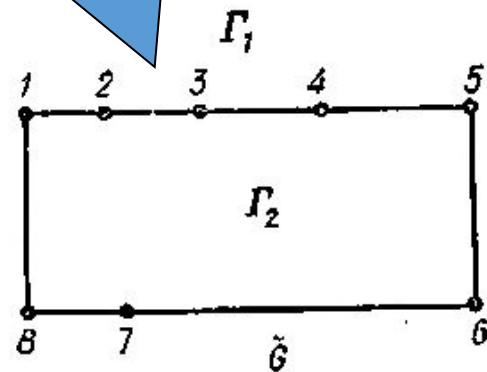
- (1,9,10,4), (1,9,2),
- (2,9,10,4), (2,10,4),
- (2,10,3), (3,10,4)

Конфликтующие сегменты: S_1 и S_2 ,
 S_3 и S_4 ; S_2 и S_6

Граф $G(V,E)$



Уложенный подграф графа $G - G^1(V^1, E^1)$



S_i - сегменты относительно G^1

Контактные вершины

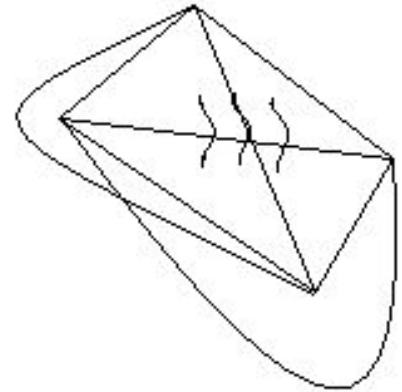
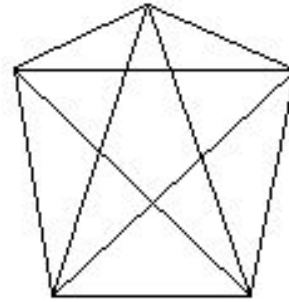
γ -алгоритм плоской укладки графа

1. Выберем некоторый простой цикл C графа G и уложим его на плоскости; пусть $G^1 = C$.
2. Найдем грани G^1 и сегменты относительно G^1 .
Если множество сегментов пусто, то построена плоская укладка графа G – конец.
3. Для каждого сегмента S определяем множество $\Gamma(S)$.
4. Если существует сегмент S , для которого $\Gamma(S) = \emptyset$, то граф не планарен – конец; иначе – п.5.
5. Если существует сегмент S , для которого $|\Gamma(S)| = 1$, то п.7.; иначе – п.6.
6. Для некоторого сегмента S ($|\Gamma(S)| > 1$) выбрать произвольную допустимую грань Γ .
7. Поместить произвольную α -цепь сегмента S в выбранную грань Γ ; заменить G^1 на $(G^1 + \alpha\text{-цепь})$; и перейти на п.2.

Род и толщина графа

□ *Родом* графа $g(G)$ обозначается наименьшее количество ручек, которое необходимо добавить к сфере, чтобы граф был уложен на этой поверхности без пересечений.

Для планарных графов $g = 0$,
для графа K_5 $g = 1$.



Если нужно, чтобы данный на рисунке граф был без пересечений нужна 1 ручка.

Графы K_5 , $K_{3,3}$, $K_{4,4}$, K_7 - *тороидальные* графы, то есть у них род $g = 1$.

Для любой поверхности имеется конечный набор графов, который ее характеризует, то есть тех графов, которые нельзя уложить на данной поверхности.

Род и толщина графа

Обобщение ТЕОРЕМЫ Эйлера на графы рода g .

Пусть дан $G(p, q)$, имеющий f -граней, то для него справедливо:

$$p + f - q = 2 - 2g$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого связанного графа с p -вершинами и q -ребрами, причем $p \geq 4$, справедливо: $g = \lceil (q - 3p + 1)/6 \rceil$*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для полных графов справедливо*

$$g(K_p) = \lceil (p - 3)(p - 4)/12 \rceil$$

□ **Толщина графа** - это минимальное количество планарных подграфов графа G , таких что их объединение дает граф G .

Известно, что толщина полных графов равна $\theta(K_p) = \begin{cases} 1, & p = 3, 4 \\ 2, & p = 5..8 \\ 3, & p \geq 9 \end{cases}$

Род и толщина графа

- Так как в планарном графе $q = 3p - 6$, то $\theta(G) \geq \frac{q}{3p - 6}$
- Так как в полном графе $q = p(p - 1)/2$, то $\theta(K_p) \geq \frac{p(p - 1)}{6(p - 2)}$

ТЕОРЕМА (о степенях вершин в планарном графе).

В любом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.

Доказательство:

Допустим, такой вершины нет, тогда

степень каждой вершины не меньше 6, следовательно,

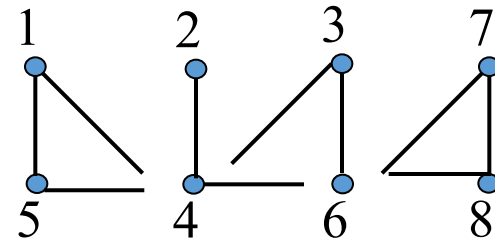
$$6p \leq 2q, \text{ то есть } q \geq 3p.$$

Но для планарных графов $q \leq 3p - 6$.

Получили противоречие.

Внутренняя устойчивость

□ Подмножество вершин графа $G(V, E)$ называется **независимым** (внутренне устойчивым), если никакие 2 вершины из этого множества не смежны.

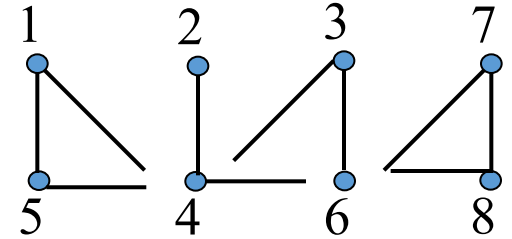


Т.е. если $S \subseteq V$, и S независимо в G , то подграф $G(S)$ – пустой. И если при этом $S' \subset S$, то S' – также независимое множество.

- Независимое множество **максимально**, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. $\{4, 7\}$
- **Наибольшее по мощности** независимое множество называется **наибольшим**. $\{1, 2, 3, 7\}, \{2, 3, 5, 8\}$
- Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется **числом независимости** $\alpha_0(G)$ (числом внутренней устойчивости, **неплотностью**) графа. $\alpha_0(G) = 4$.

Внешняя устойчивость

- Подмножество V' вершин графа $G(V,E)$ называется **доминирующим** (*внешне устойчивым*), если каждая вершина из множества V/V' смежна с некоторой вершиной из V' .



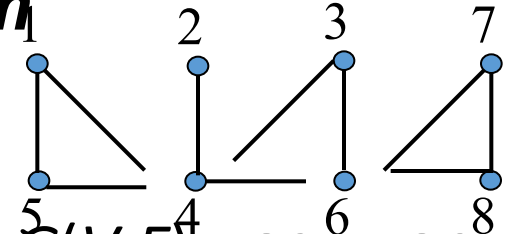
$\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{4, 8\}, \{4, 6\}$

- Доминирующее множество **минимально**, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим. $\{4, 7\}$
- Доминирующее множество с *наименьшей мощностью* называется **наименьшим**. $\{4, 6\}, \{4, 7\}, \{4, 8\}$
- Подмножество вершин графа, являющееся как *независимым*, так и *доминирующим* называется **ядром** графа.
 $\{1, 2, 3, 7\}, \{1, 2, 3, 8\}, \{2, 3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 8\}, \{4, 7\}$

Покрытия

□ Вершина и ребро графа **покрывают** друг друга, если они инцидентны.

Ребро $e = (1,4)$ покрывает вершины 1 и 4, а вершины 1,4 покрывают ребро e .



□ Подмножество $V' \subseteq V$ вершин графа $G(V,E)$ называется **покрытием** (вершинным покрытием, опорой) графа G , если каждое ребро графа G инцидентно хотя бы одной вершине множества V' .

$\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}, \{4, 5, 6, 8\}, \{4, 5, 6, 7\}$

□ Покрытие графа **минимально**, если не содержит покрытия с меньшим числом вершин. $\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$

□ Покрытие графа называют **наименьшим**, если число вершин в нем наименьшее среди всех покрытий графа.

$\{4, 5, 6, 8\}, \{4, 5, 6, 7\}$

□ Число вершин в наименьшем покрытии называется $\beta_0(G)$ **числом покрытия** (числом вершинного покрытия) графа.

$$\beta_0(G) = 4$$

Независимость и покрытия

ТЕОРЕМА. Подмножество V' вершин графа $G(V,E)$ является (наименьшим, минимальным) покрытием тогда и только тогда, когда $\bar{V}' = V/V'$ – (наибольшее, максимальное) независимое множество.

И, следовательно, $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |G|$.

ТЕОРЕМА. Для любого графа G верно неравенство:

$$\alpha_0(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + \deg(v)}$$

СЛЕДСТВИЕ. Для любого графа с n вершинами верно

$$\alpha_0(G) \geq n / (1 + d),$$

Построение независимого множества

- Алгоритм построения независимого множества M , такого что $|M| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + \deg(v)}$
1. Выбрать в графе вершину с минимальной степенью и занести ее в множество M .
 2. Удалить из графа G выбранную в п.1 вершину и все смежные с ней вершины.
 3. Продолжать процесс выполнения п.1 и п.2 до тех пор, пока в графе G не останется вершин.

Данный алгоритм обеспечивает лишь приближенное решение.

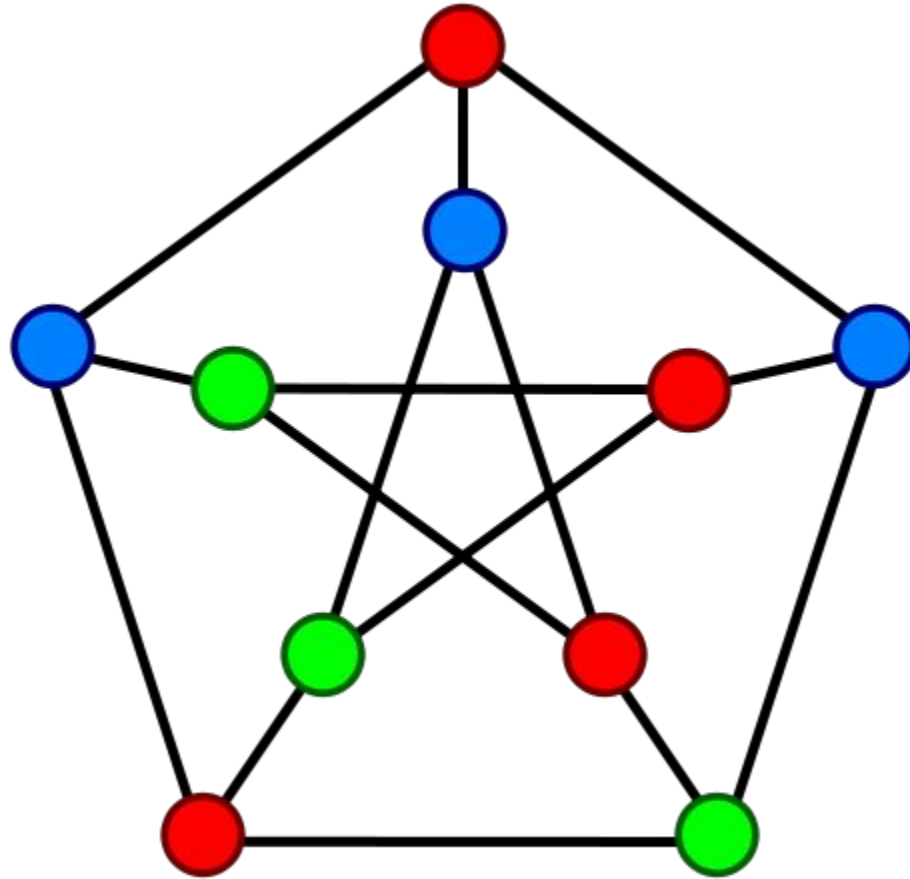
Раскраска графа

- **Раскраска графа** - это такое приписывание цветов вершинам графа, чтобы 2 смежные вершины не были одного цвета.
- **Одноцветный класс** - это множество всех вершин одного цвета.
- **Хроматическое число** - это минимальное число n , для которого граф имеет n -раскраску. Обозначение: χ .
- Граф называется n -раскрашиваемым, если его хроматическое число $\chi(G) \leq n$.
- Граф n -хроматический, если $\chi(G) = n$.
- Любой граф имеет n -раскраску, если $\chi(G) \leq n \leq p$.
- Для полных графов $\chi = p$, для двудольных $\chi = 2$, для графов-циклов $\chi = 2$, если длина четная и 3, если длина нечетная. Для дерева $\chi = 2$.

Раскраска графа

- **ТЕОРЕМА.** χ любого графа удовлетворяет неравенству $\chi(G) \leq 1 + \alpha$, где α - максимальная степень вершины в графе.
- **ТЕОРЕМА.**
 1. $\chi = \alpha$, если граф G не содержит в качестве компоненты полный граф с количеством вершин $\alpha + 1$;
 2. Для $\alpha = 2$, G не содержит цикл нечетной длины.
- Данные теоремы целесообразно применять, когда степени вершин в графе приблизительно равны. Иначе получится грубая оценка.
- **ТЕОРЕМА** (о четырех красках). Для любого нетривиального связного планарного графа $\chi = 2..4$
- **СЛЕДСТВИЕ.** Любой планарный граф, не содержащий цикл нечетной длины имеет $\chi \leq 3$.
Для любой карты достаточно четырех красок, чтобы ее раскрасить.

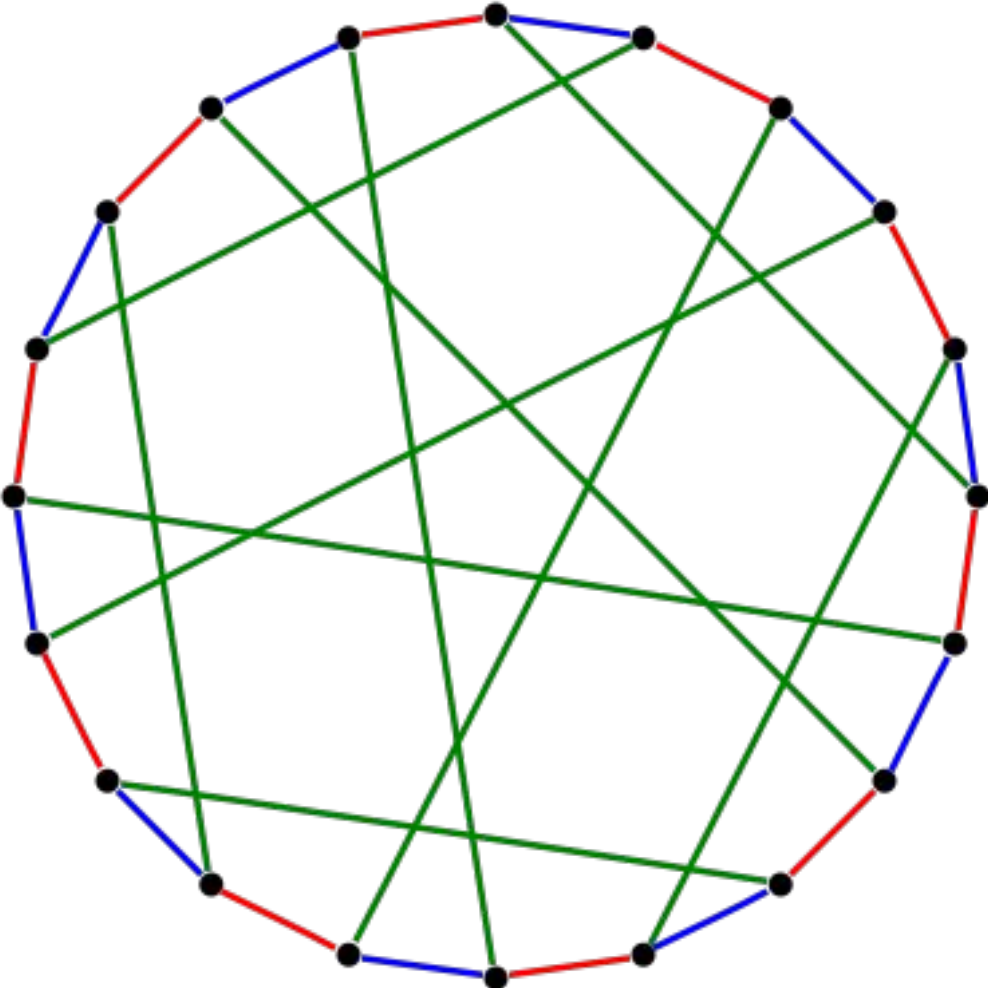
Пример 3-раскраски графа Петерсена



Реберная раскрашиваемость

- Граф G - n -реберно раскрашиваем, если необходимо n -красок, чтобы раскрасить ребра графа таким образом, чтобы любые 2 инцидентные одной вершине ребра не были одного цвета.
- Если G n -реберно раскрашиваем, то n - его **хроматический класс** $\chi_l(G)$.
- Для хроматического класса справедливо неравенство $\alpha \leq \chi_l(G) \leq \alpha + 1$.
- Для простых циклов $\chi_l = 2$, если длина четна и 3, если нечетна.
- Для двудольного графа $K_{m,n}$ $\chi_l(K_{m,n}) = \max(m, n)$.
- Для полного графа K_p $\chi_l(K_p) = p$, если p - нечетно и $p \neq 1$; и $p - 1$, если p - четно.

Пример рёберной раскраски



Хроматический многочлен

- Свяжем с каждым помеченным графом некоторую функцию. Раскраской графа G t -цветами назовем раскраску, использующей не более t цветов.
- Две раскраски *различны*, если хотя бы одной вершине присвоены разные цвета.
- Пусть $P(G, h)$ - количество способов, которыми можно раскрасить граф G n -красками. Если $\chi > n$, то $P = 0$. Минимальное n , для которого $P \neq 0$ есть χ данного графа.
- Для K_3 $P(K_3, n) = n(n - 1)(n - 2)$.
- Для любого полного графа $P(K_p, n) = c_n^p = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - p + 1)$ - это хроматический многочлен полного графа.

Свойства хроматического многочлена

1. Степень хроматического многочлена равна p ;
2. Коэффициент при K_p равен 1;
3. Коэффициент при $n_{p-1} = -q$, коэффициенты чередуются по знаку.

Минимальный показатель степени n равен числу компонент в графе G .

- Хроматический многочлен достаточно полно характеризует граф G , но нет необходимости и достаточных условий определения того, что многочлен является хроматическим, то есть для него существует некий граф.