Механические колебания и волны

Механические колебания характеризуются величиной **смещения** колеблющейся материальной точки (колеблющегося тела) от положения равновесия.

Колебания, при которых смещение изменяется по закону синуса или косинуса, называются **гармоническими**.

Если колебания происходят под действием внутренних сил системы и начинаются тогда, когда систему выводят из положения равновесия, то такие колебания называются **свободными**.

Уравнение колебаний

Уравнение гармонических колебаний

$x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$,

где величины A, ω_0, ϕ_0 не зависят от времени.

Характеристики гармонических колебаний

A – амплитуда колебаний – максимальное смещение от положения равновесия (максимальное значение изменяющейся величины).

Циклическая (или круговая) частота ω_0 – число полных колебаний, совершаемых системой за промежуток времени 2π секунд.

Частота ν_0 – число полных колебаний, совершаемых системой за 1 с.

Период колебаний T_0 – промежуток времени, за который совершается одно полное колебание.

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} \qquad \omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Фаза колебаний $(\omega_0 t + \phi_0)$ определяет положение колеблющейся точки (тела) в данный момент времени, ϕ_0 – начальная фаза, определяющая положение колеблющейся точки в начальный момент времени при $t = 0$.

Кинематические характеристики гармонических колебаний

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v_x = x' = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

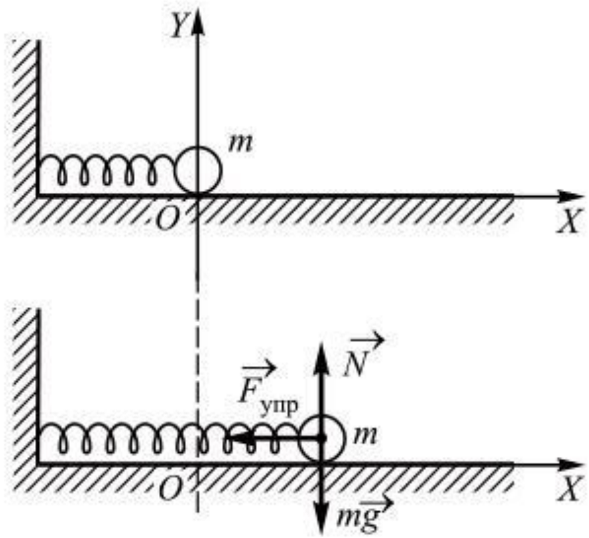
$$v_0 = A\omega_0$$

$$a_x = v_x' = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a_0 = A\omega_0^2$$

$$a_x = -\omega_0^2 x \quad x'' = -\omega_0^2 x$$

$$a_x = -cx \quad \omega_0 = \sqrt{c}$$



Динамика гармонических колебаний

$$ma_x = F_{\text{рав}\,x}$$

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

$$F_{\text{рав}\,x} = -m\omega_0^2 x$$

$$F_x = -kx$$

Гармонические колебания совершаются под действием **упругих** или **квазиупругих** сил.

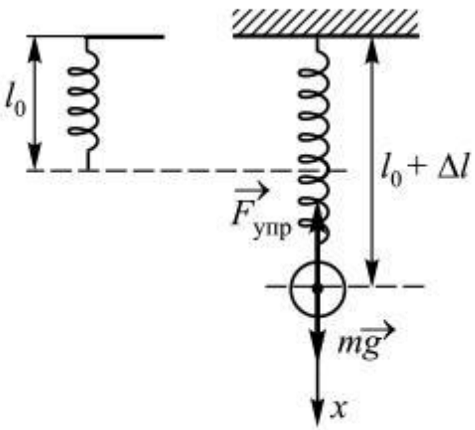
Примеры расчета частоты колебаний в различных механических системах

Пример 1. Тело массой m подвешивается на пружине длиной l_0 с коэффициентом упругости k . Определить период колебаний.

$$F_{\text{т}} = F_{\text{упр}\,0,}\ mg = k\Delta l$$

$$\Delta l = mg / k$$

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 + mg / k$$



$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{т}} + \vec{F}_{\text{упр}}$$

на ось X : $ma_x = mg - F_{упр}$

$$F_{упр} = k(\Delta l + x)$$

$$ma_x = \; -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = \; 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Пример 2. **Математический маятник** представляет собой тело, которое можно считать материальной точкой, подвешенное на длинной невесомой нерастяжимой нити. Длина нити *l*. Определить период колебаний математического маятника *T*.

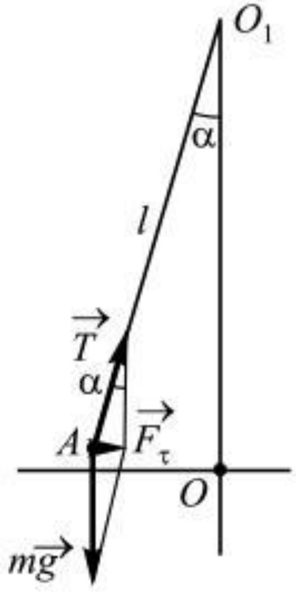
$$F_\tau = mg\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$x / l = \sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$$

$$F_\tau \approx F_x = mg\alpha,\ F_x = T\sin\alpha$$

$$ma_x = -mg\frac{x}{l}$$

$$a_x = -\frac{g}{l}x \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Пример 3. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает цилиндр высотой h. Если цилиндр поглубже погрузить в жидкость или, напротив, немного вытащить из жидкости, то после того, как его отпустят, цилиндр начнет колебаться. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, $\rho_м$. Определить частоту колебаний цилиндра.

$$F_{выт} = F_т \rho \ \rho_ж S x_0 g = \ _м Shg$$

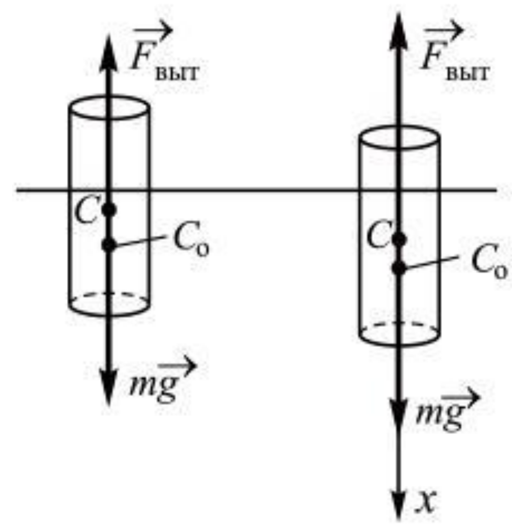
$$x_0 = \frac{\rho_м}{\rho_ж} h$$

$$ma_x = -\rho_ж S g x \quad m = \rho_м V$$

$$\rho_м h S a_x = -\rho_ж S g x$$

$$a_x = -\frac{\rho_ж}{\rho_м} \frac{g}{h} x$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}}$$



Примеры решения задач

Задача 1. Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия по закону: $x = A \sin(\omega t)$ с периодом 12 с. Определите, за какой наименьший промежуток времени t_1 точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды. За какой промежуток времени t_2 она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения?

Решение.

В момент времени t_1 смещение $A/2 = A \sin(\omega t_1)$

$\text{in}(\omega t_1) = 1/2$

$\omega t_1 = \pi/6 \quad 2\pi t_1/T = \pi/6 \quad t_1 = T/12 = 1$ с

$t_2 = T/4 - T/12 = 2$ с

Задача 2. $x = 0{,}3\ \sin\pi(t + 0{,}5)$ м. Определите: 1) амплитуду; 2) период колебаний; 3) начальную фазу, а также смещение и ускорение через 0,25 с после начала колебаний.

Решение.

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 0{,}3\ \text{м}\ \sin\left[\pi\left(t + 0{,}5\right)\right]$$

$$A = 0{,}3\ \text{м},\ \omega = \pi\ \text{с}^{-1},\ \varphi_0 = 0{,}5\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\text{с}$$

$$x = 0{,}3\ \text{м}\ \sin\pi\left(0{,}25 + 0{,}5\right) \approx \quad ,$$

$$a_x = -\omega^2 x \approx -2{,}1\ \text{м}/\text{с}^2$$

Задача 3. В U-образной трубке находится столбик жидкости длиной l. При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости сместились, и столбик начал колебаться. Определите частоту колебаний. Трением о стенки пренебречь.

Решение.

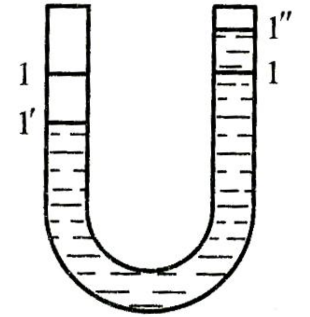
$$F_{д} = pS = \rho g S 2x$$

$$ma_x = -\rho g 2Sx$$

$$m = \rho l S$$

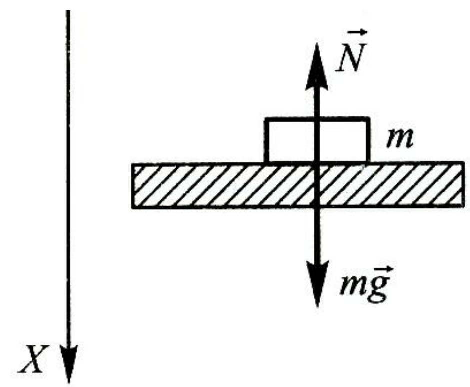
$$a_x = -\left(\frac{2g}{l}\right)x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$



Задача 4. На горизонтальной плите находится груз. Плита колеблется с частотой ω, совершая по вертикали гармонические колебания. При каких амплитудах колебания груз не оторвется от плиты?

Решение.



$$ma_x = mg - N$$

$$N = 0 \quad x = A$$

$$x = A\sin(\omega t), \quad a_x = -\omega^2 A \sin(\omega t)$$

$$x = A \quad a_x = -\omega^2 A = g$$

$$A \leq g / \omega^2$$

Задача 5. Шарик массой *m* подвешен на двух пружинах одинаковой длины, но с разными упругими свойствами. Коэффициенты жесткости пружин k_1 и k_2. Определите частоту колебаний шарика в двух случаях, показанных на рисунках. Массами пружин можно пренебречь.

Решение.

$$mg = -(k_1 + k_2)x_0$$

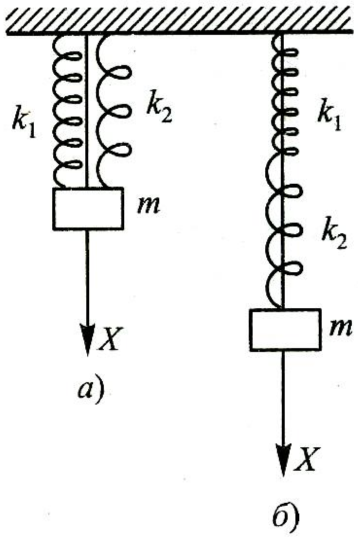
$$F_{упр\,x} = -(k_1 + k_2)(x_0 + x)$$

$$ma_x = -(k_1 + k_2)(x_0 + x) + mg$$

$$ma_x = -(k_1 + k_2)x$$

$$a_x = -\frac{(k_1 + k_2)}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



$$mg = k_2 x_{20}$$

$$ma_x = -k_2(x_{20} + x_2) + mg$$

$$ma_x = -k_2 x_2$$

$$a_x = x'' \quad x = x_1 + x_2$$

$$k_1\left(x_{10} + x_1\right) = k_2\left(x_{20} + x_2\right)$$

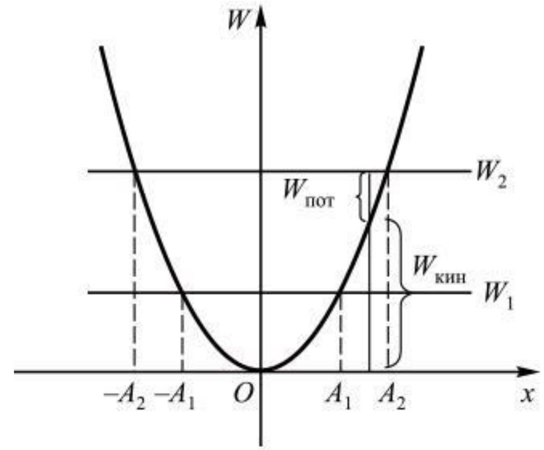
$$k_1 x_{10} = k_2 x_{20}$$

$$x_2 = \frac{x}{1 + \frac{k_2}{k_1}} = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}$$

$$a_x = -\frac{k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right) m} x \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right) m}}$$

Преобразование энергии при гармонических колебаниях

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



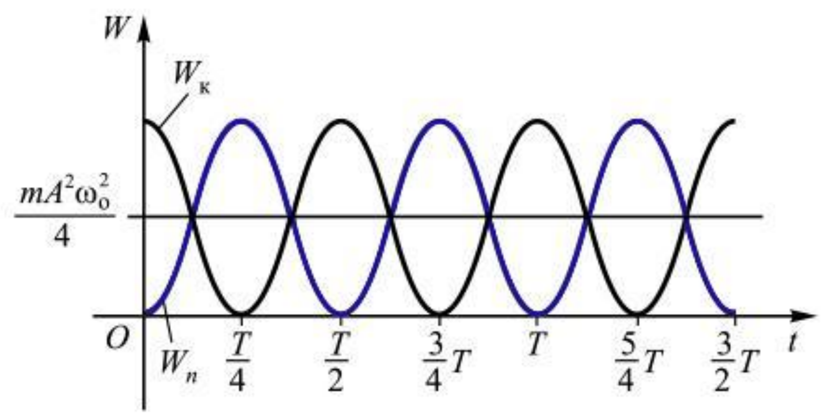
$$W_{кин} = \frac{m\upsilon_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$$

$$W_0 = W_{кин\,max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

$$W_{пот} = W_0 - W_{кин} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}[1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] =$$

$$\frac{m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

$$A = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2W_0}{m}}$$



$$W_{пот} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

$$W_{кин} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_0 t),\; x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + A_2 \cdot \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi n, n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$x = (A_1 + A_2)\sin(\omega_0 t)$$

$$\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi$$

$$x = (A_1 - A_2)\sin(\omega_0 t)$$

$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$$

Задача 9. Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0{,}2$ м и периодом $T = 4$ с. В момент $t_0 = 0$ смещение шарика $x = A$. Найдите кинетическую и потенциальную энергию в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

$$W_{\text{кин max}} = W_0 = \frac{m\text{v}_{\max}^2}{2}$$

$$\text{v}_{\max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T}$$

$$W_{\text{кин max}} = W_0 = \frac{mA^2 4\pi^2}{2T^2} = \frac{2mA^2\pi^2}{T^2}$$

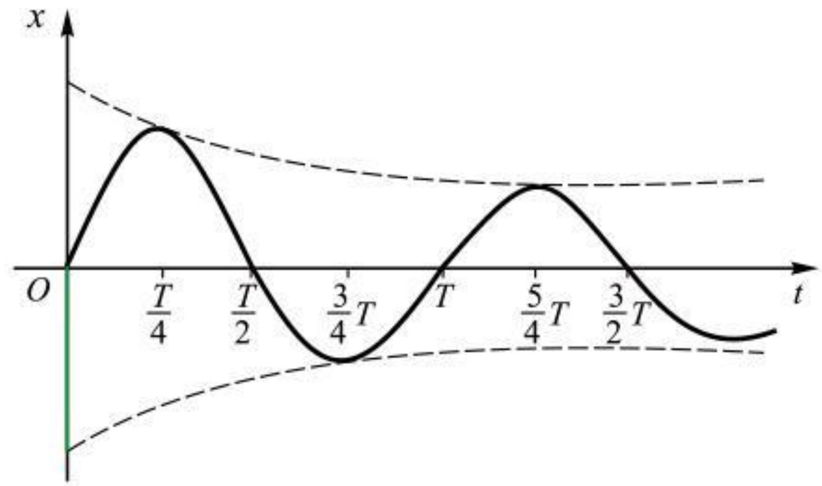
Затухающие колебания

$$\vec{F}_2 = -r\vec{v} \quad F_{2x} = r v_x$$

$$ma_x = -kx - rv_x$$

$$a_x = -\omega_0^2 x - 2\beta v_x$$

$$\omega_0^2 = k/m \quad \beta = \frac{r}{2m}$$



β – коэффициент затухания

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = A(t)\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Вынужденные колебания

$$F_{\text{вын}\,x} = F_0 \sin(\Omega t),$$

$$ma_x = -kx - r\mathrm{v}_x + F_0 \sin(\Omega t)$$

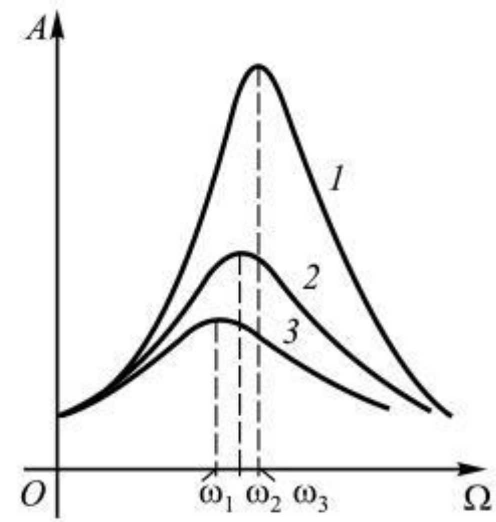
$$x = A\sin(\Omega \mathrm{t} + \alpha_0)$$

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \qquad \mathrm{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\mathrm{arctg}\alpha_0 \to -\pi / 2$$

$$x = -A\cos(\Omega t)$$

$$\mathrm{v}_x = x' = A\Omega \sin(\Omega t)$$



Задача 11. При какой скорости поезда маятник длиной l, подвешенный к потолку вагона, начнет сильно раскачиваться. Расстояние между стыками рельсов равно s.

Решение.

$$\nu = \frac{s}{v} \quad \nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\nu = \nu_0$$

$$v = s / 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Во сколько раз изменится период колебаний математического маятника при увеличении длины нити в 2 раза?

2. Математический маятник, длина нити которого равна 1 м, находится в лифте, движущемся с ускорение g/2, направленным вниз.

Чему равен период колебаний маятника?

3. Шарик на пружине совершает гармоническое колебание с амплитудой A. Какое расстояние проходит шарик за половину периода?

4. Чему равна начальная фаза в уравнении $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$, если при $t = 0$ $x = A/2$.

5. Во сколько раз изменится период колебаний шарика, подвешенного на пружине, если пружину разрезать пополам и его подвесить к одной из половин?

6. Имеется два одинаковых математических маятника. Нити маятников отводятся на малые углы α и 2α и одновременно отпускают. Какой из маятников первым пройдет положение равновесия?

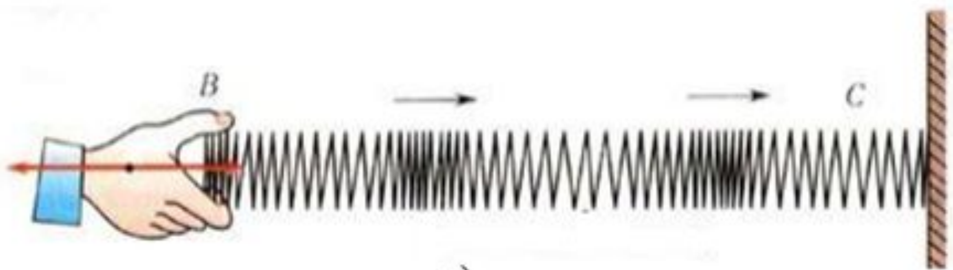
Спасибо за внимание

Механические волны

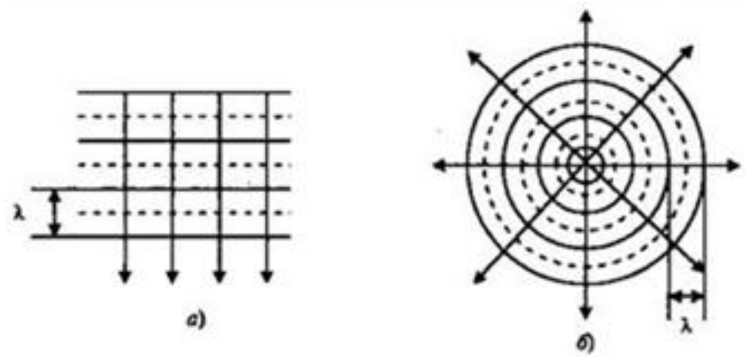
Упругие (механические) волны. Классификация волн

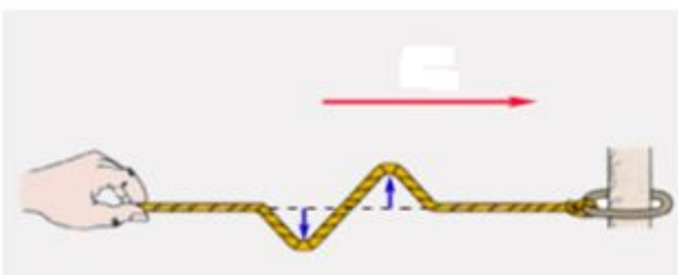
1. Продольная и поперечная волны

2. По фронту волны: плоская, сферическая



а)





б)

$$y = A\sin\omega t$$

$$\lambda = vT$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Кинематическое уравнение плоской бегущей волны

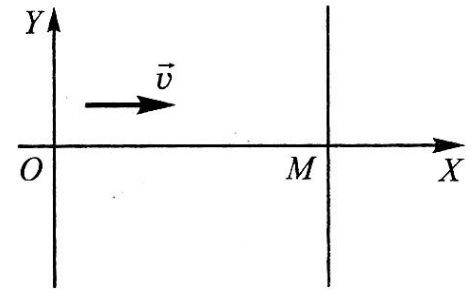
$$y_0 = A\sin(\omega t),$$

$$y_M = A\sin(\omega t')$$

$$t' = t - \tau = t - \frac{x_M}{v}$$

$$y_M = A\sin\omega\left(t - \frac{x_M}{v}\right)$$

$$y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$



Длина волны – расстояние между точками, разность фаз колебаний в которых, равна 2π

Скорость волны и скорость колебаний

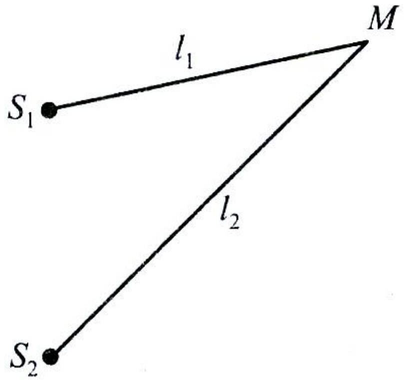
$$u_y = y' = A\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Интерференция волн

Интерференция – явление наложения волн в пространстве с образованием устойчивой во времени картины максимумов и минимумов амплитуды колебаний частиц среды.

Когерентными называются источники, вызывающие в каждой точке пространства колебания с одинаковой частотой и разность фаз которых остается постоянной во времени.

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l_1}{\lambda}\right) \quad y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l_2}{\lambda}\right)$$



$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{l_1 - l_2}{\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta l$$

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$2\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = \pm 2\pi n, \ \ \Delta l = \pm n l \quad A = A_1 + A_2$$

$$\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi \quad \Delta l = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad A = A_1 - A_2$$

Когерентные источники:

$W \sim A^2 = 4A_1^2$ — максимумы $(\quad {}_1 = {}_2)$

$W = 0$ — минимумы

$$\overline{W} = \frac{4A_1^2 + 0}{2} = 2A_1^2$$

Некогерентные источники:

$W_1 \sim A_1^2 \quad W_2 \sim A_2^2$

$$W = W_1 + W_2 \sim A_1^2 + A_2^2 = \left(\quad {}_{cp} \right)^2$$

$A_1 = A_2, W \,\square\, 2A_1^2$

Стоячая волна

$$y_{пр} = A\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] \quad y_{обр} = A\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right]$$

$$y_{ст} = y_{пр} + y_{обр} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin(\omega t)$$

$-$кинематическое уравнение стоячей волны

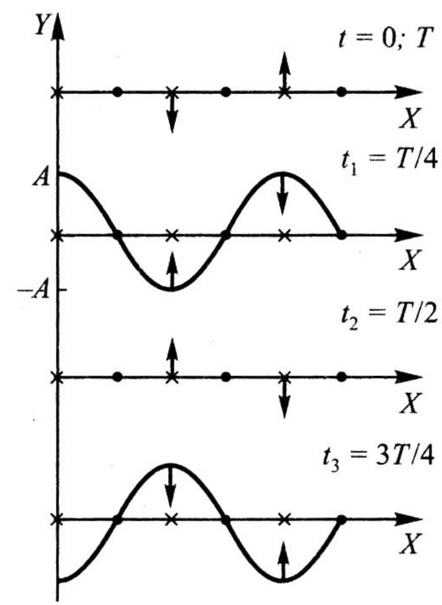
$$A_{ст} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pi n \quad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

$x = n\dfrac{\lambda}{2}$ $\quad A_{ст} = 2A$ (пучности волны)

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

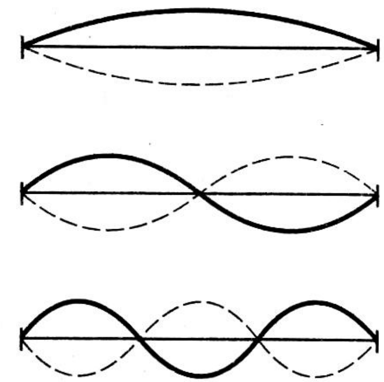
(узлы стоячей волны)



Сравнение стоячей и бегущей волн

	Бегущая волна	Стоячая волна
Уравнение	$y = A\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$	$y = 2A\cos\omega t\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin$
Амплитуда	Одинакова во всех точках и равна A.	Зависит от положения колеблющейся частицы (воздуха, резинового шнура и т. д.) $0 \le A_{\text{ст}} \le 2A$
Фаза	Зависит от положения колеблющейся точки	Одинакова между двумя соседними узлами

$L = \lambda/2$, $\lambda = 2L$. ν_1 – основной тон.



Частоты колебаний, возбужденных этими волнами, кратны ν_1: $n\nu_1$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$

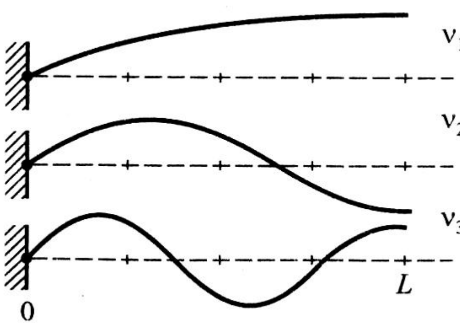
Эти частоты, на которых возникают стоячие волны, называются ***собственными*** или ***резонансными частотами***.

$$\lambda = 4L, \nu_1 = \frac{v}{4L}$$

,

резонансные частоты равны $\nu_n = n\frac{v}{4L} = n\nu_1$

$n = 1, 2, 3, \ldots$



Звуковые волны

ν –16 Гц – 20 кГц 16 Гц

ν < 16 Гц – ***инфразвук***, ν > 20 кГц – ***ультразвук***

$$y = A\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

Вещество	Скорость звука, м/с	Вещество	Скорость звука, м/с
Воздух (20 °С)	343	Вода	1440
Воздух (0 °С)	331	Железо	≈ 5000
Водород	1300	Стекло	≈ 4500
Гелий	1005	Древесина	≈ 4000

$$v \approx 331 + 0{,}6t\,°\text{C (м/с)}$$

Объективные и субъективные характеристики звука

Объективные характеристики звука	Субъективные характеристики звука
Интенсивность волны	Громкость
Частота	Высота тона
Набор гармоник	Окраска звука (тембр, качество звука)

$I = 10^{-12}$ Вт/м^2 (порог слышимости)

$I = 1$ Вт/м^2 (порог болевого ощущения)

Задача 1. Источник частотой 1000 Гц и амплитудой A = 0,5 мм возбуждает в упругом шнуре волны длиной λ = 0,35 м.

Найдите:

1) скорость распространения колебаний в шнуре υ,

2) максимальную скорость колеблющихся точек шнура u_{max}.

Решение.

1) $\upsilon = \lambda\nu = 0{,}35 \cdot 1000$ м/с $= 350$ м/с.

2) $u_{max} = A\omega = A \cdot 2\pi\nu = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 1000$ м/с $= \pi$ м/с.

Задача 2. В среде распространяется волна со скоростью υ = 720 м/с при частоте источника 600 Гц. Определите разность фаз колебаний в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии Δx = 0,2 м.

Решение.

$$y_M = A\sin\left[\omega t - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x_M\right] = A\sin\varphi$$

$$y_N = A\sin\left[\omega t - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x_N\right] = A\sin\varphi_N$$

$$\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x_M - x_N) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta x$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{v} = \frac{\pi}{3}$$

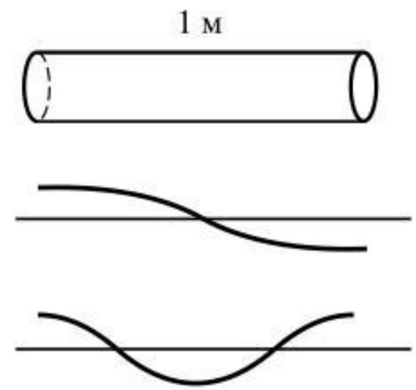
Задача 3. Труба длиной 1 м открыта с обоих концов. Определите самую низкую резонансную частоту в трубе, скорость звука в воздухе равна 330 м/с.

Решение.

$$\nu = \frac{v_{\text{зв}}}{\lambda}$$

$$\lambda_{\max} = l / 2$$

$$\nu_1 = \frac{v_{\text{зв}}}{\lambda} = \frac{v_{\text{зв}}}{2l} = 165\ \text{Гц}$$



Задача 4. Выстрел произведен вертикально вверх. Какова начальная скорость пули v_0, если звук выстрела и пуля достигают одновременно высоты h = 850 м? Скорость звука в воздухе $v_{зв}$ = 340 м/с.

Решение.

$$y_1 = v_{зв} t_1 \qquad y_2 = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}$$

$$y_1 = y_2 = h, \;\; t_1 = t_2 = t$$

$$t = \frac{h}{v_{зв}} \qquad h = \frac{v_0 h}{v_{зв}} - \frac{g h^2}{2 v_{зв}^2}$$

$$v_0 = \frac{\left(h + \frac{g h^2}{2 v_{зв}^2}\right) \cdot v_{зв}}{h} = \left(1 + \frac{g h}{2 v_{зв}^2}\right) v_{зв} = 352\,\frac{\text{м}}{}$$

Задачи и тесты для самостоятельного решения

1. Возбуждается поперечная волна в упругом стержне. Как изменится скорость распространения волны в стержне и амплитуда колебаний в разных точках стержня при увеличении периода колебаний в источнике? При этом энергия источника волн постоянна.

Для каждой величины выберите соответствующий характер изменения:

1) увеличится;

2)уменьшится;

3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины.

Скорость распространения волны	Амплитуда колебаний

2. С берега высотой 5 м горизонтально бросают камень со скоростью 10 м/с. Скорость бегущей волны, образующейся на поверхности воды, равна 6 м/с. Через какой промежуток времени с момента броска камня волна дойдет до берега?
3.По длинному шнуру начинает бежать волна со скоростью 200 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура равна 5 см, частота колебаний 5 Гц. Запишите уравнение бегущей волны, взяв за начало отсчета координаты конец шнура ($x = 0$), а начало отсчета времени — с момента начала колебаний этого конца.

4. Уравнение волны имеет вид $s = 0,2\sin\left[20\pi\left(t - \frac{x}{300}\right)\right]$. Определите амплитуду и период колебаний точек среды, длину волны и запишите уравнение колебаний в точке, находящейся на расстоянии 15 м от источника.

5. Волна распространяется вдоль прямой со скоростью 50 м/с. Определите разность фаз колебаний в точках, находящихся на этой прямой и отстоящих на расстоянии 50 см друг от друга. Период колебаний 0,05 с.

6. Чему равна длина струны, если при ее укорачивании на 10 см частота колебаний увеличивается в 1,5 раза?

Спасибо за внимание!