

# Тема 3. ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

3.1. Теорема о циркуляции вектора

3.2. Работа сил электростатического поля.

Потенциальная энергия

3.3. Потенциал. Разность потенциалов

3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

3.5. Силовые линии и эквипотенциальные  
поверхности

3.6. Расчет потенциалов простейших  
электростатических полей

## 3.1. Напряженность и потенциал

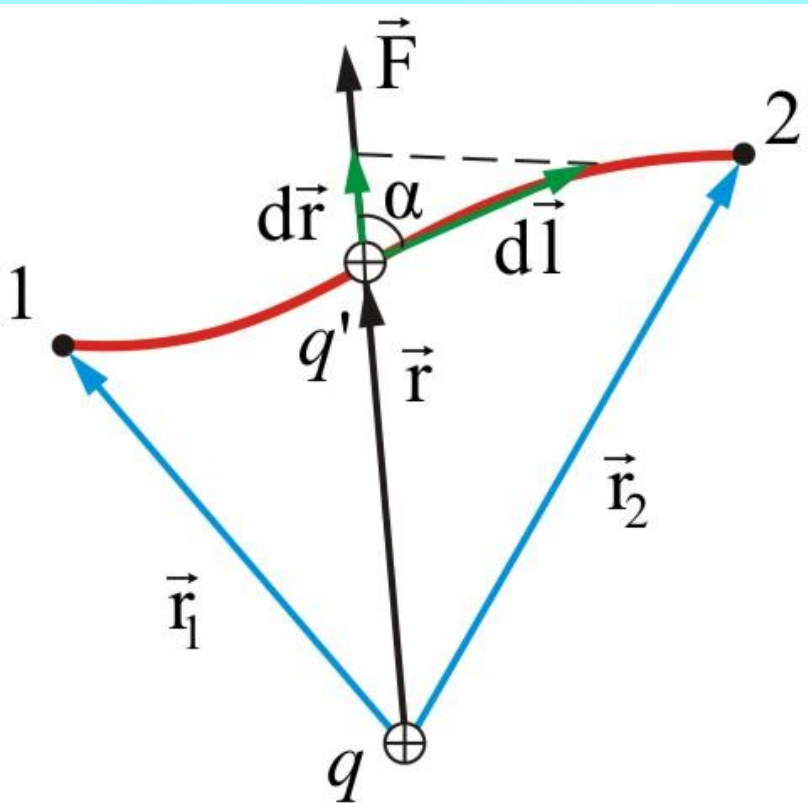
- В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через **электростатическое поле**. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью **вектора напряженности**  $\vec{E}$ , равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

- Существует и другой способ описания поля – с помощью **потенциала**.
- Однако для этого необходимо сначала доказать, что **силы** электростатического поля **консервативны**, а само поле **потенциально**.

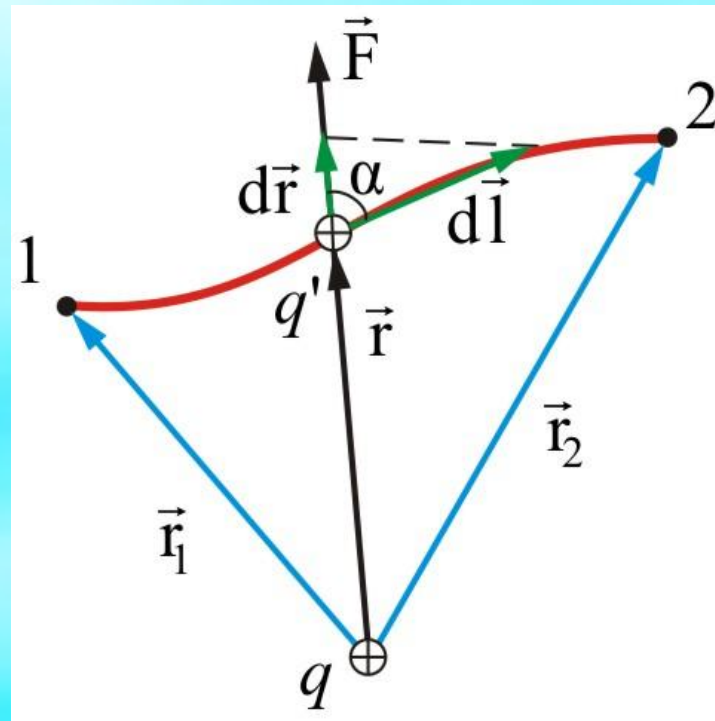
# Работа сил электростатического поля.

- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q$ .
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд  $q'$  действует сила  $F$



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$



- где  $F(r)$  – модуль вектора силы,  $\frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, определяющий положение заряда  $q$  относительно  $q'$ ,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

- Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны*.
- Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек*.

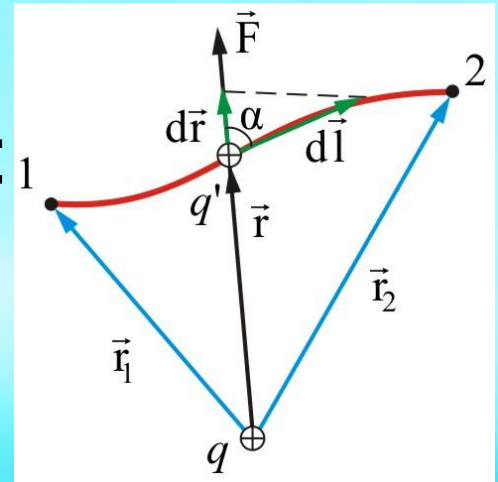
- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом  $q$  по перемещению заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2.

- Работа на отрезке пути  $d\vec{l}$  равна:

- $$dA = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha,$$

- где  $dr$  – приращение радиус-вектора при перемещении на  $d\vec{l}$ ;  $dr = dl \cos \alpha,$

- $$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$



- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

■

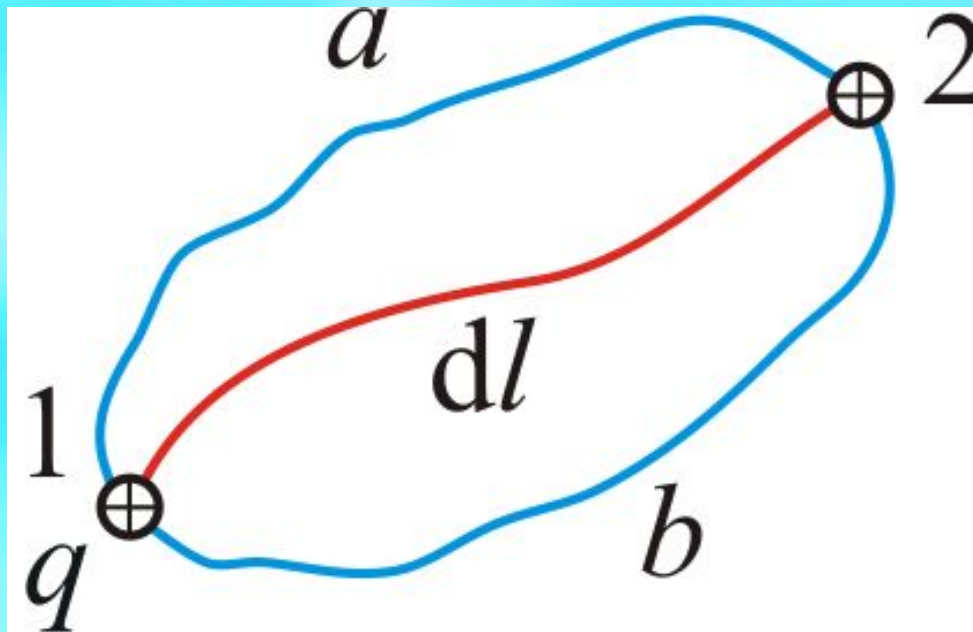
$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$



- **Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля консервативны, а само поле – потенциально.**

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд  $q$ , то элементарная работа сил поля будет равна:

$$dA = q \vec{E} d\vec{l}.$$



- Тогда вся работа равна:

$$A = q \int_{(3.1.3)} \vec{E} d\vec{l} \quad (3.1.3)$$

- Такой интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора  $\vec{E}$**
- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по произвольному замкнутому пути:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (3.1.4)$$

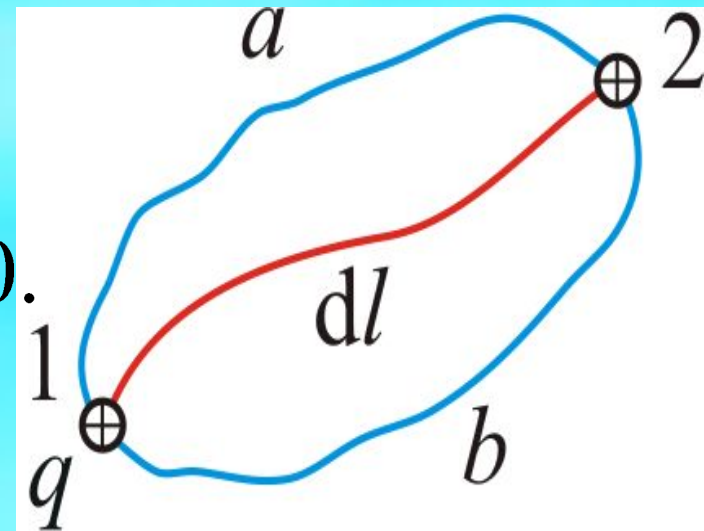
- **теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$**  .

- Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части:  $1a2$  и  $2b1$ . Из сказанного выше следует, что

$$\int_2^1 E dl = - \int_1^2 E dl.$$

- (Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q \oint E dl = q \int_1^2 E dl - q \int_2^1 E dl = 0.$$



- Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.
- Рассмотрим простой пример, подтверждающий это заключение.
- *1) Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.* В самом деле, если это не так, и какая-то линия  $\vec{E}$  – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же приходим к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора*:
 
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$
- А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора  $\vec{E}$  не равна нулю.

## 3.2. Работа и потенциальная энергия

- Мы сделали важное заключение, что ***электростатическое поле потенциально.***
- Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – ***потенциальную энергию.***

- Исходя из принципа суперпозиции сил ,

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$$

- можно показать, что общая работа  $A$  будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k.$$

- *Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.*

- **Работу сил электростатического поля можно выразить через убыль потенциальной энергии** — разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2. \quad (3.2.2) \text{ Это}$$

выражение для работы можно переписать в виде:

- $$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (3.2.3)$$

- Сопоставляя формулу (3.2.2) и (3.2.3), получаем **выражение для потенциальной энергии** заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} \quad (3.2.4)$$



## 3.3. Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды  $q', q'', \dots$  будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями  $W', W''$  и так далее. Однако отношение  $W / q'_{\text{пр.}}$  будет для всех зарядов одним и тем же.
- Поэтому можно вести **скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой поля – потенциал:**

$$\varphi = \frac{W}{q'}$$

$$\varphi = \frac{W}{q'}$$

- Из этого выражения следует, что **потенциал** численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля **единичный положительный заряд**.

- Подставив в выражение для потенциала значение потенциальной энергии (3.2.4), получим выражение для

***потенциала точечного заряда:***

- $$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3.3.2)$$

- Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования.

- физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что *потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю.*
- Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность.*

- Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q} \quad \text{или} \quad A_{\infty} = q\varphi$$

- *т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность*
- *(или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля).*
- При этом  $\varphi > 0$ , если  $q > 0$ .

- Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k q'}{r_k}. \quad (3.3.3)$$

- Тогда и для потенциала  $\varphi = \sum \varphi_k$  или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k} \quad (3.3.4)$$

- *т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*
- *А вот напряженности складываются при наложении полей – векторно.*

- Выразим работу сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

- Таким образом, работа над зарядом  $q$  равна произведению заряда на убыль потенциала:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \quad (3.3.6)$$

- где  $U$  – напряжение.

$$A = qU$$

- Формулу  $A_{\infty} = q\varphi$  можно использовать для установления единиц потенциала:  
*за единицу  $\varphi$  принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.*
- В СИ **единица потенциала**  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$



**Электрон - вольт (эВ)** – это **работа**, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона **при прохождении им разности потенциалов 1 В**, то есть:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Производными единицами эВ являются МэВ, ГэВ и ТэВ:

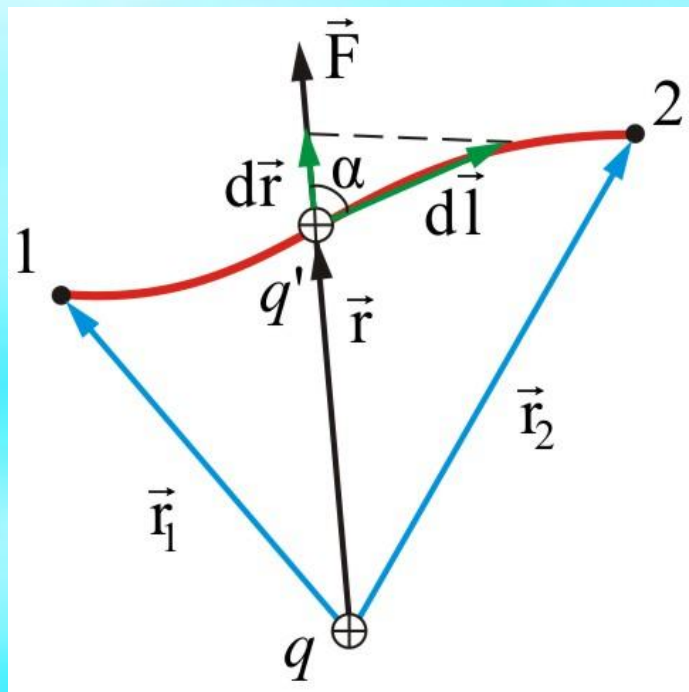
$$1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-10} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

## 3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

- Изобразим перемещение заряда  $q'$  по произвольному пути / в электростатическом поле .



- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке  $d\vec{l}$  можно найти так:

$$dA = F_l dl = E_l q' dl; \quad (3.4.1)$$

$$dA = F_l dl = E_l q dl,$$

- С другой стороны, эта работа, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии  $dl$ :

- $dA = -q d\varphi$ ; *тогда*

$$E_l q dl = -q d\varphi$$

- отсюда  $E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$  (3.4.2)

- Для ориентации  $d/$  (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции на оси координат:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},}$$

- Определение градиента: **сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть *градиент этой функции***

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

- $\text{grad}\varphi$  – **вектор, показывающий направление набыстрейшего увеличения функции.**

- Коротко связь между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  записывается так:

- $$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (3.4.4)$$

- или так:

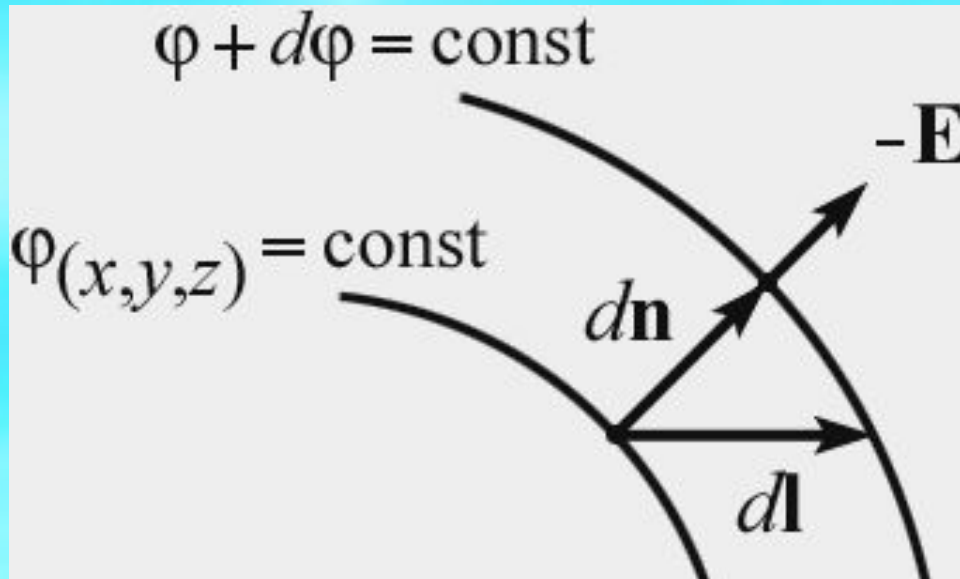
- $$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad (3.4.5)$$

- где  $\nabla$  (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона
- Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  направлен против направления наискорейшего роста потенциала:

$$\mathbf{E} = - \frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности  $\varphi = \text{const}$



## 3.6. Силовые линии и

### ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

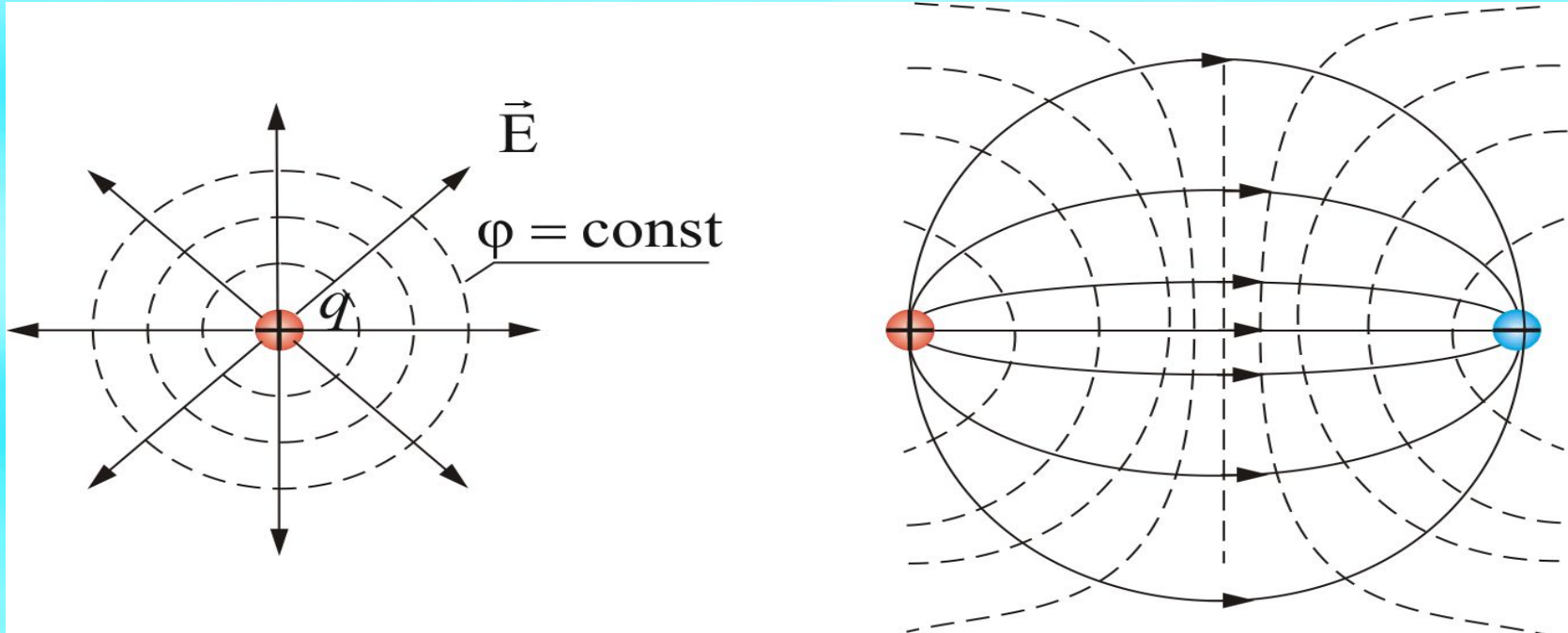
- Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением  $\vec{E}$ .
- Отсюда следует, что **напряженность равна разности потенциалов  $U$  на единицу длины силовой линии.**
- Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить  $\varphi$  между двумя точками, измеряя  $U$  между ними, причем тем точнее, чем ближе точки.
- **В однородном электрическом поле** силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить  $\vec{E}$  наиболее просто:

$$E = \frac{U}{l} \quad (3.6.1)$$

- **Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.**

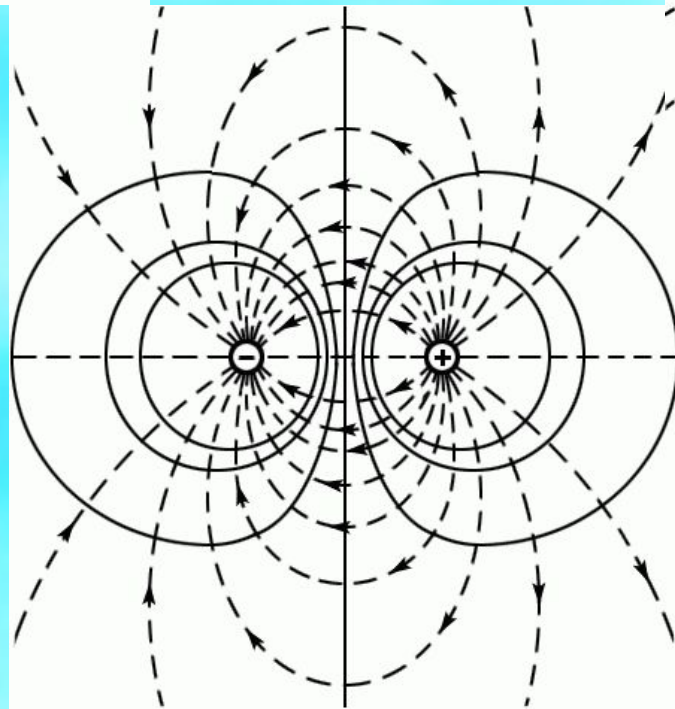
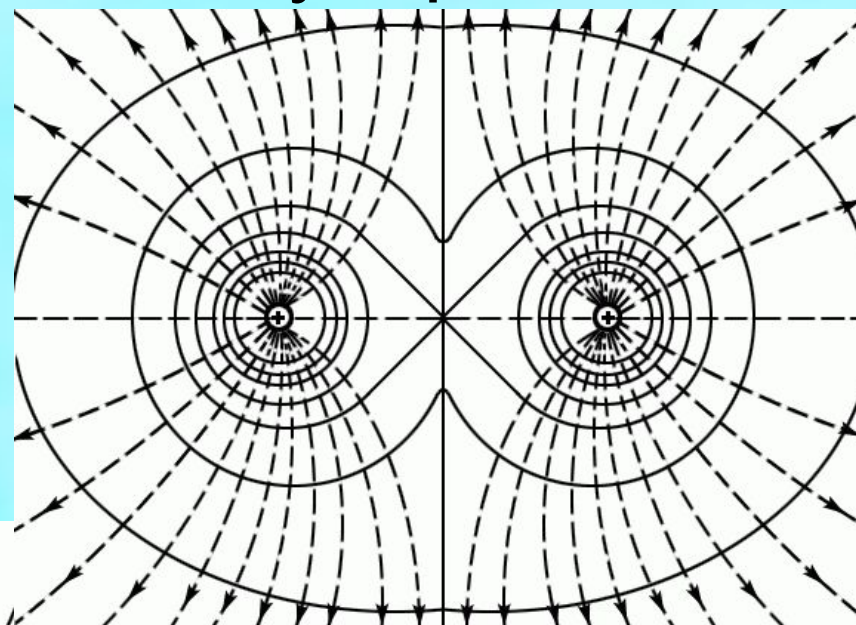
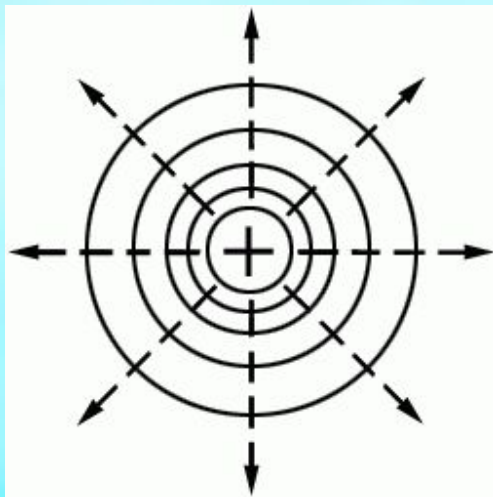
- Уравнение этой поверхности

- $\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const} \text{ (ф.6.2)}$





# Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны



- Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке.
- Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

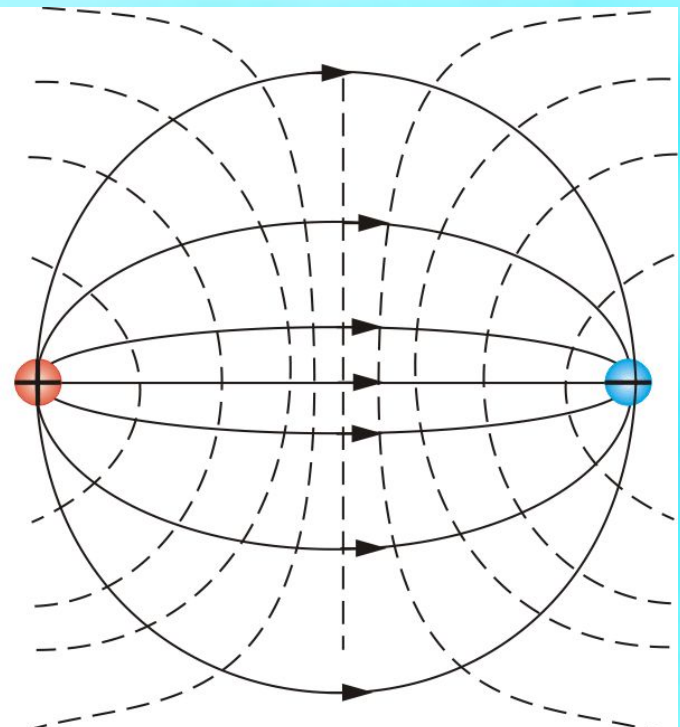
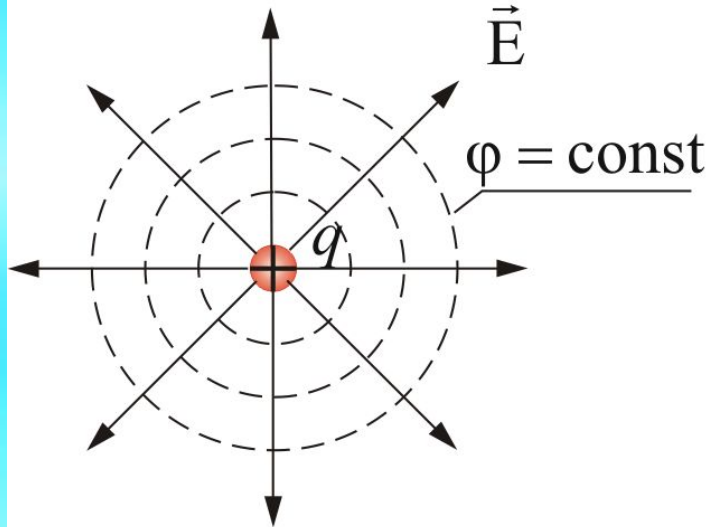
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

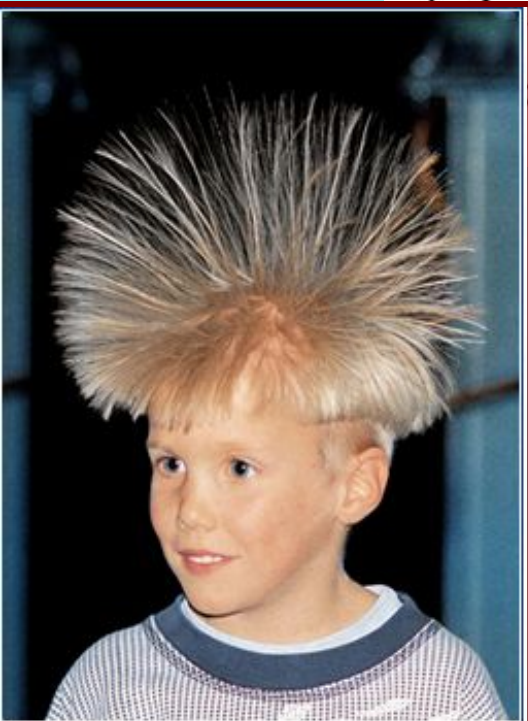
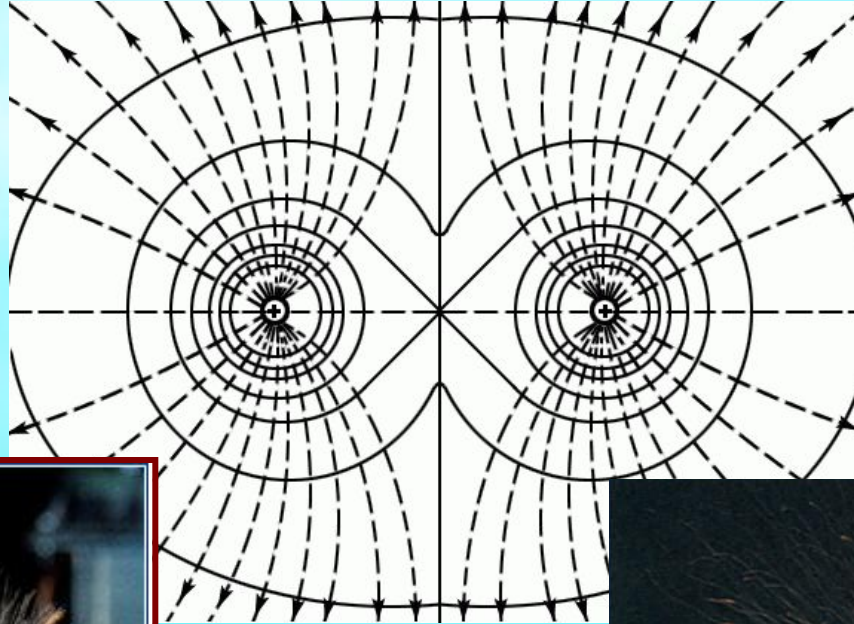
- Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути.
- Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$  получим:  $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0,$
- т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности:  
*циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

- Из обращения в нуль циркуляции вектора следует, что **линии электростатического поля не могут быть замкнутыми**: они начинаются на **положительных зарядах (исток)** и на **отрицательных зарядах (стоки)** или уходят в **бесконечность**



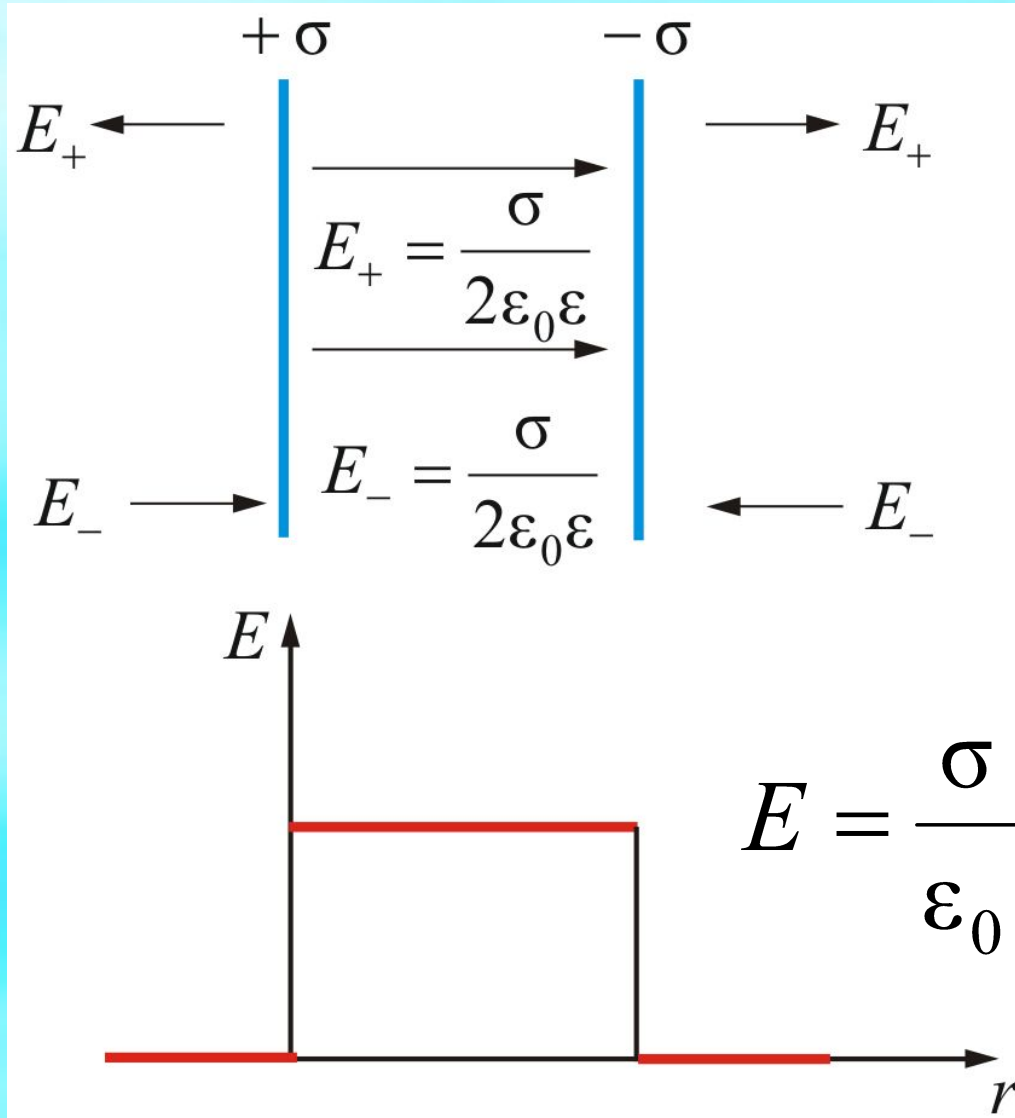
**Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля наибольшая. Наибольшее электрическое поле в воздухе при атмосферном давлении достигает около  $10^6$  В/м.**



## 3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

- Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами

# 3.7.1. Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями



- Мы показали, что напряженность связана с потенциалом

- $$E = \frac{d\varphi}{dl} \text{ , отсюда} \quad d\varphi = -Edl$$

- где  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями
- $\sigma = q/S$  – поверхностная плотность заряда.



- Чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение  $d\varphi = -Edl$

- $$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

- $$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

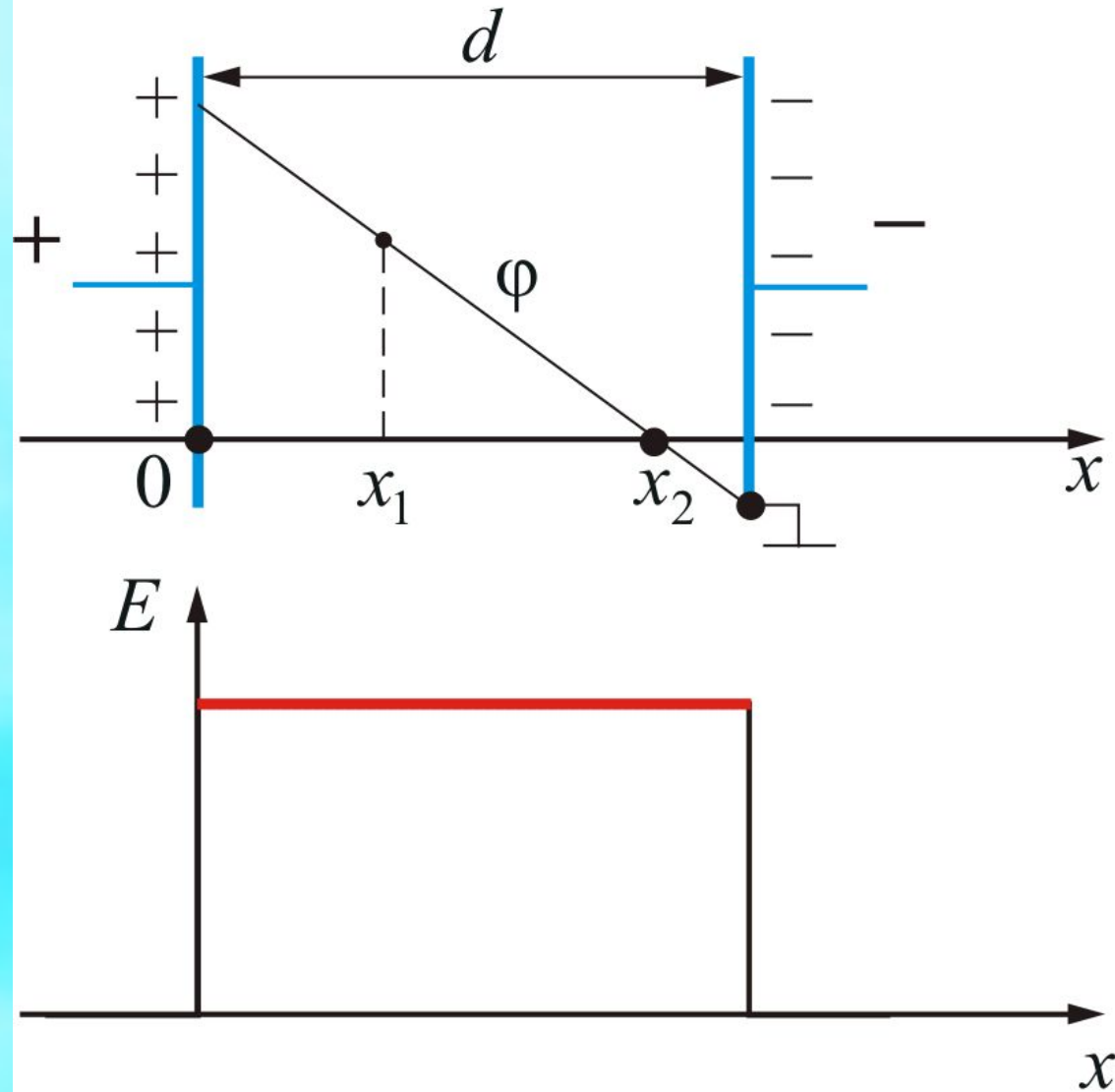
При  $x_1 = 0$  и  $x_2 = d$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (3.7.3)$$

- На рисунке изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния между плоскостями.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



### 3.7.2. Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

- С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

■ Тогда, т.к.

$$d\varphi = -E dr; \quad \int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

■ отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

■

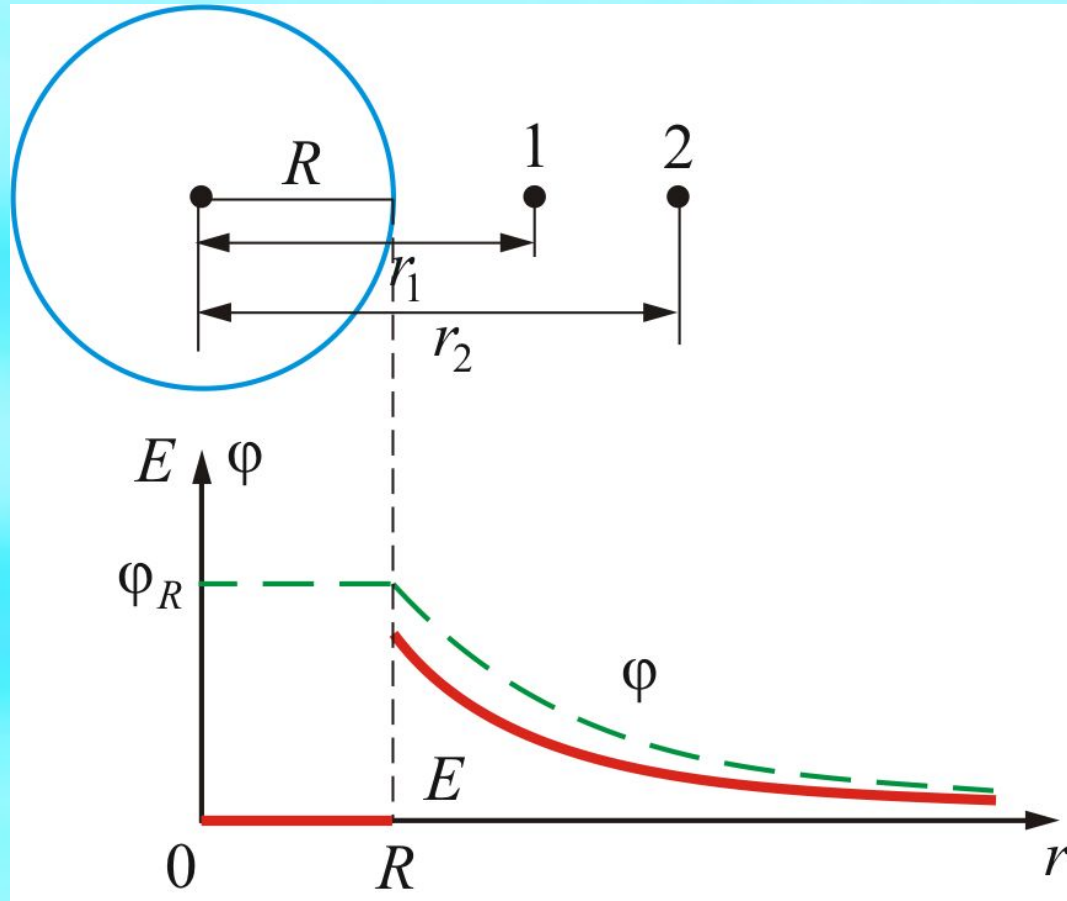
$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

■

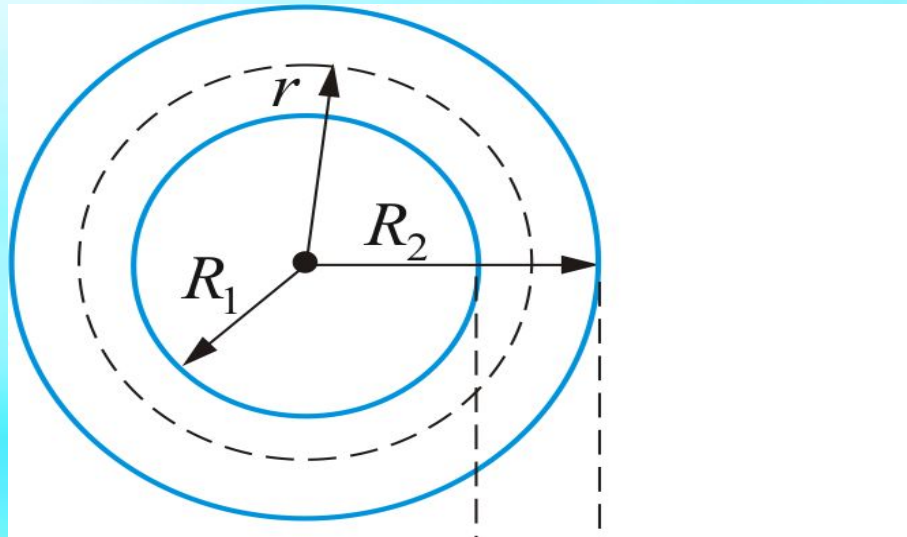
■

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} & \text{– внутри и на поверхности} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{– вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} & \text{— внутри и на поверхности} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{— вне цилиндра.} \end{cases}$$



### 3.7.3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора



$$E = \begin{cases} 0 & \text{— внутри меньшего и вне большего цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{— между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

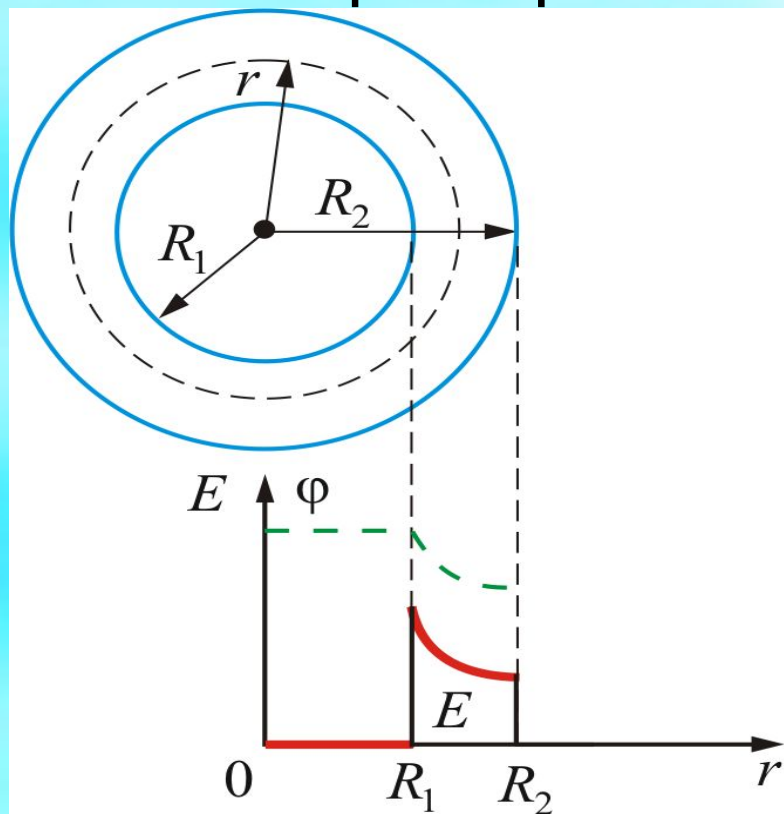
■ Т.к.  $d\varphi = -\rho E dr$

■ 
$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

■

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 - \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

- Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем ,  $E = 0$ ,  $\varphi = \text{const}$ ;
- между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
- вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и  $\varphi$  и  $E$  равны нулю.

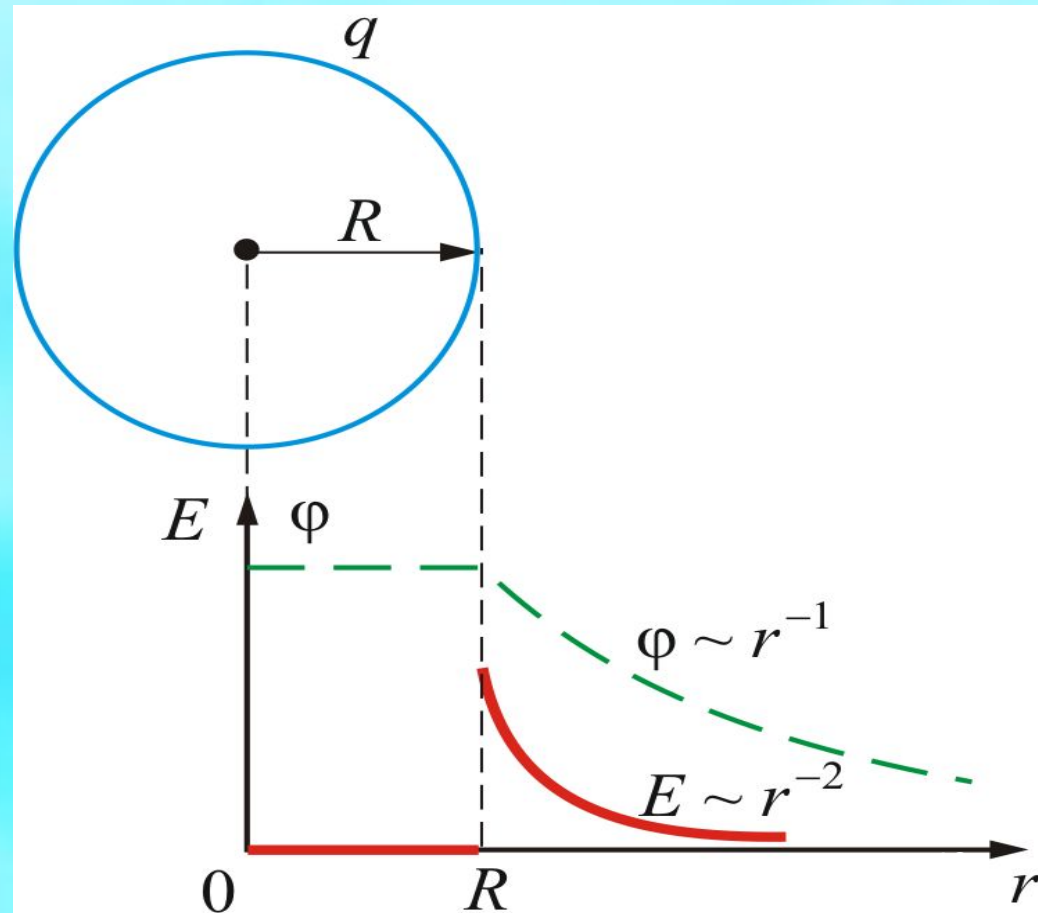




## 3.7.4. Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

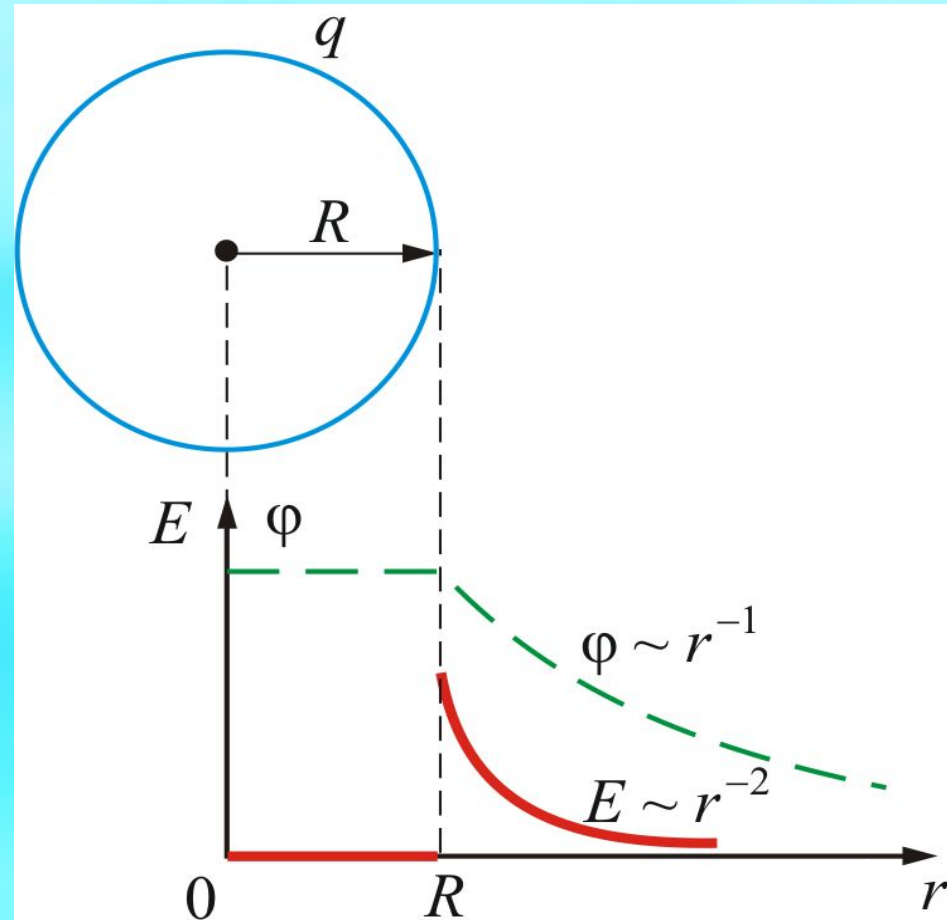
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



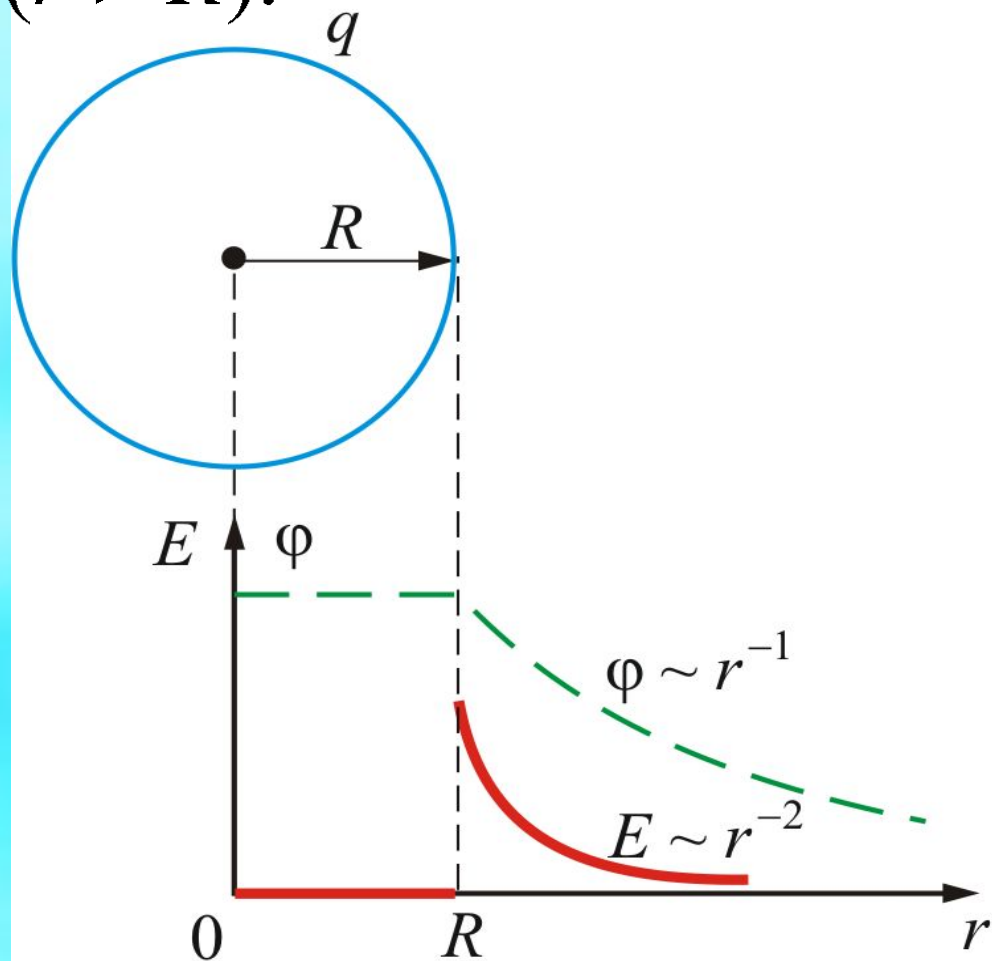
■ Α τ.κ.  $d\varphi = -E dr$  , το

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

T.e.  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

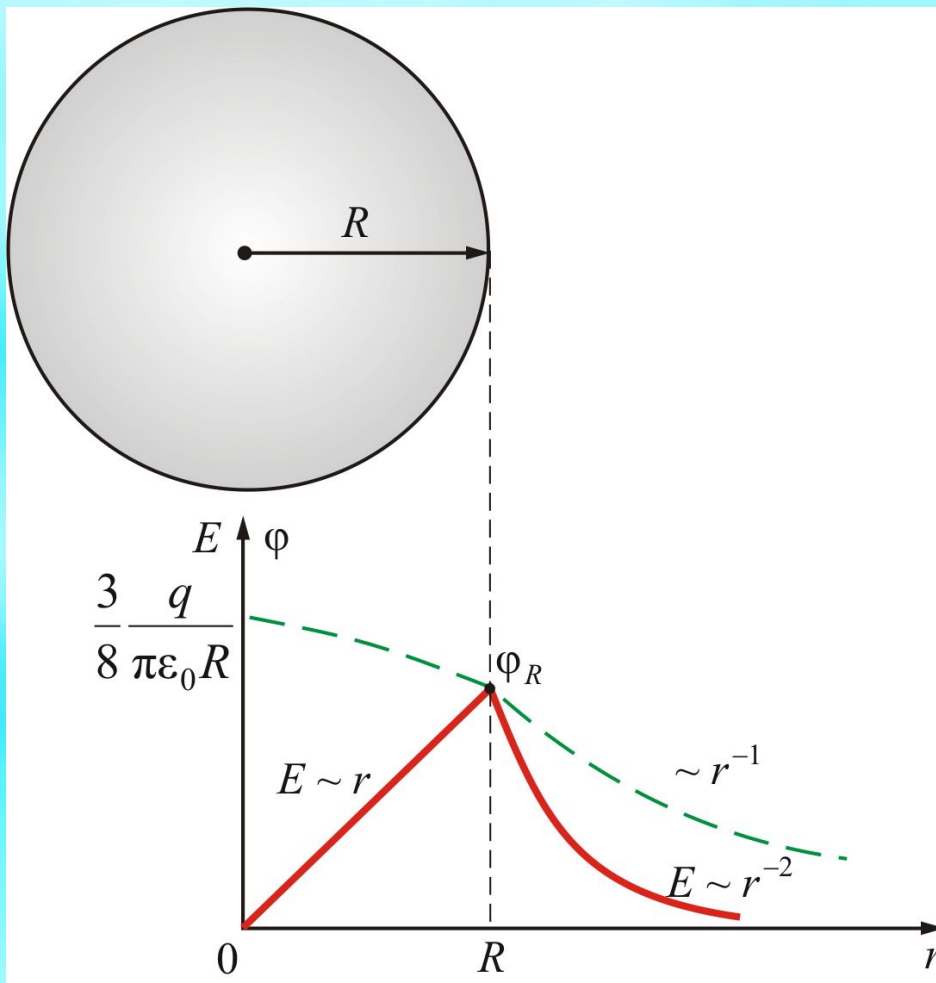


$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности.} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



## 3.7.5. Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью



$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

- Напряженность поля шара, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{— внутри шара } (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{— на поверхности шара } (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{— вне шара } (r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:

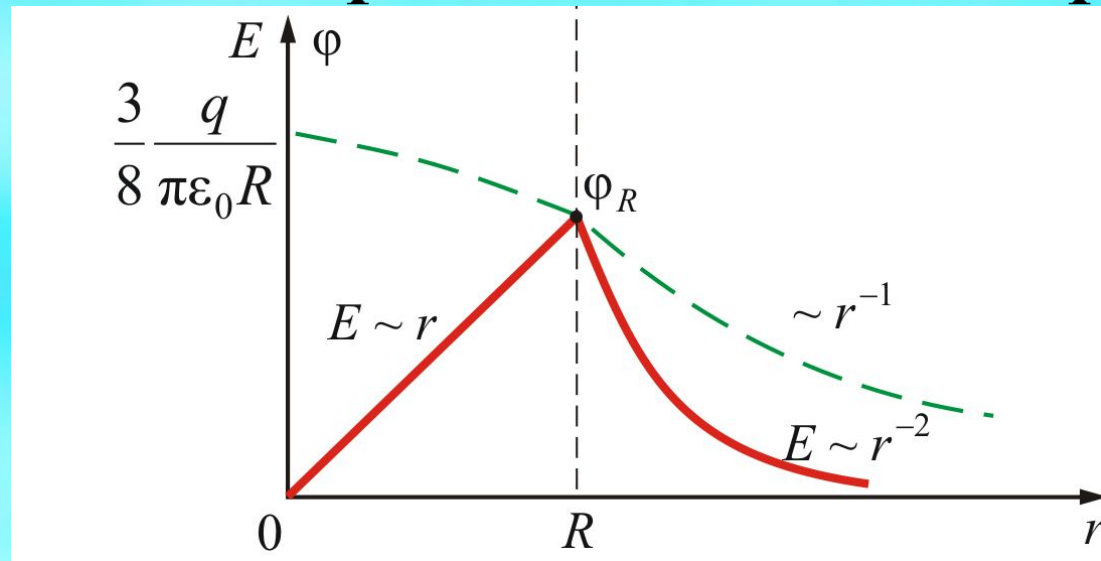
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_1^2 r dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

или

- $$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

■ Потенциал шара:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{— в центре шара } (r = 0) \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{— внутри шара } (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{— на поверхности и вне шара } (r \geq R) \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы:**
- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать  $E$  и  $\varphi$  от различных заряженных поверхностей.*
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*



# Лекция окончена

