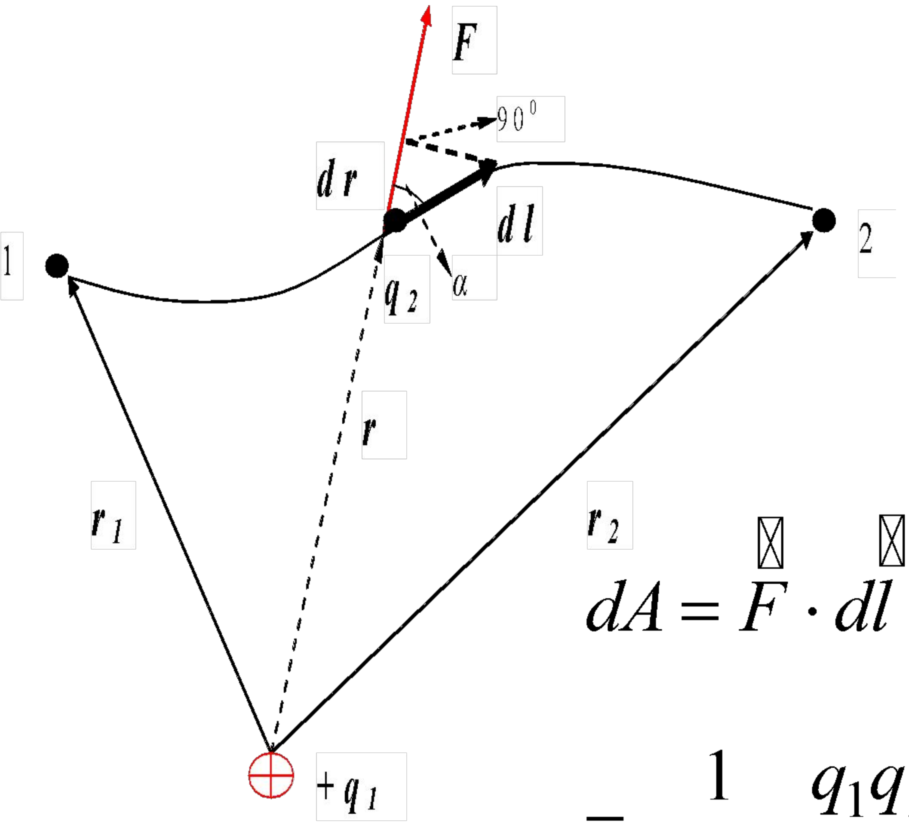
Потенциал электрического поля

Работа сил электрического поля

Консервативность электростатических сил



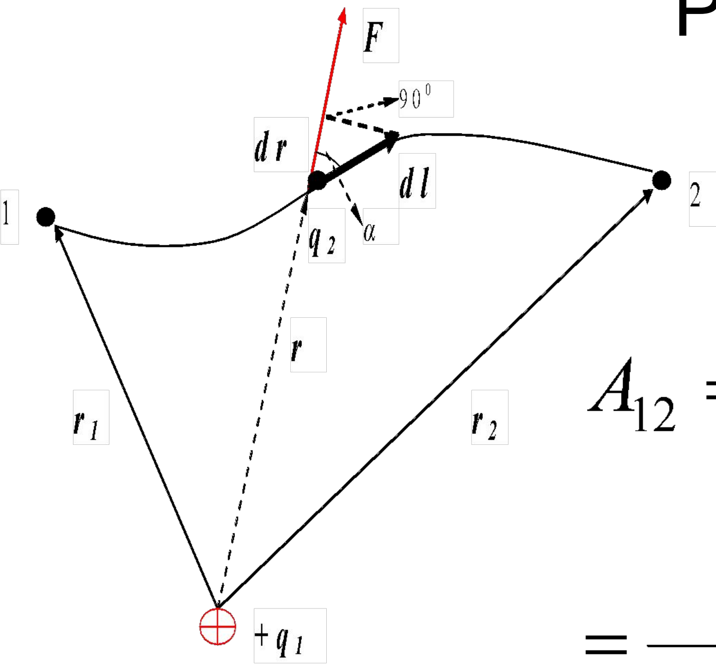
К заряду q_2 приложена сила ***F***, которая на элементарном перемещении *dl* заряда совершает работу:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}dl\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}dr \qquad \Leftarrow \qquad dl\cos\alpha = dr.$$

Точечный заряд q_1 создает электрическое поле, в котором по произвольной траектории из точки 1 в точку 2 перемещается точечный заряд q_2.

Консервативность электростатических сил



Работа, совершаемая при перемещении заряда q_2 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_1} - \frac{q_1 q_2}{r_2}\right).$$

Работа *А* не зависит от траектории перемещения, а определяется только положением начальной и конечной точек.

Электростатическое поле точечного заряда является ***потенциальным***, а электростатические силы – ***консервативными***.

Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру

$$\oint_L dA = 0.$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов

- Тело, находящееся в потенциальном поле, обладает ***потенциальной энергией***.
- Работу сил электростатического поля можно представить, как разность потенциальных энергий

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_2} = U_1 - U_2$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов

При удалении заряда в бесконечность

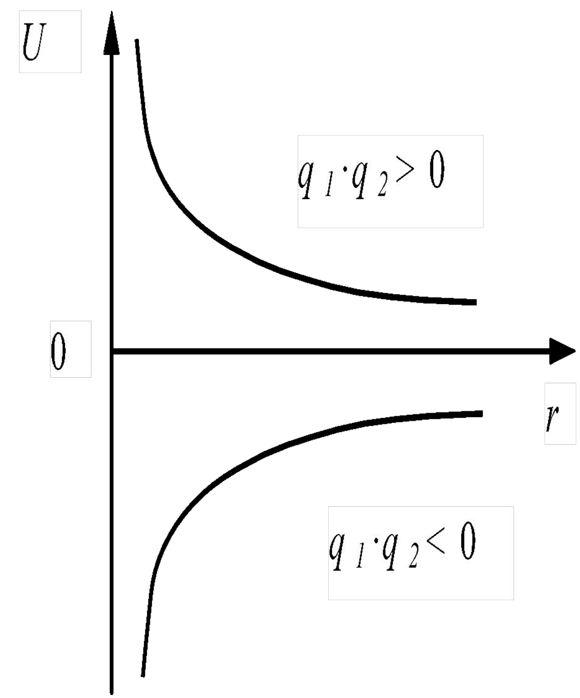
$r_2 = \infty$ ⇨ $U = U_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_1 q_2}{\infty} = 0,$

потенциальная энергия заряда q_2,

находящегося в поле заряда q_1

на расстоянии r

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}$$



Потенциальная энергия заряда в поле системы зарядов

- Система точечных зарядов: q_1, q_2, …q_n.

Расстояние от каждого заряда до некоторой точки пространства: r_1, r_2, …r_n.

Работа, совершаемая над зарядом q электрическим полем остальных зарядов при его перемещении из одной точки в другую, равна алгебраической сумме работ, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} A_i . (1) \qquad A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q}{r_{i2}} . (2)$$

r_{i1} – расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q,
r_{i2} – расстояние от заряда q_i до конечного положения заряда q.

Потенциальная энергия заряда в поле системы зарядов

(1)→(2):
$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q}{r_{i2}}$$

$$r_{i2} \to \infty \quad \Rightarrow U_2 = 0$$

$$dA = -dE_p, \quad dA = A_{12}$$

$$dE_p = U_2 - U_1$$

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q}{r_i} = \sum_{i=1}^{n} U_i = U$$

Принцип суперпозиции для энергии.

Потенциал электростатического поля

- Потенциальная энергия заряда q в поле n зарядов q_i

$$U = q\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

- Отношение U/q не зависит от величины заряда q и является ***энергетической характеристикой*** электростатического поля, называемой ***потенциалом***.

Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{U}{q_{0+}}$$

Потенциал в точке электростатического поля – физическая величина численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. Это скалярная величина.

В СИ φ измеряется в вольтах [В = Дж/Кл]

1 В – потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает энергией 1 Дж.

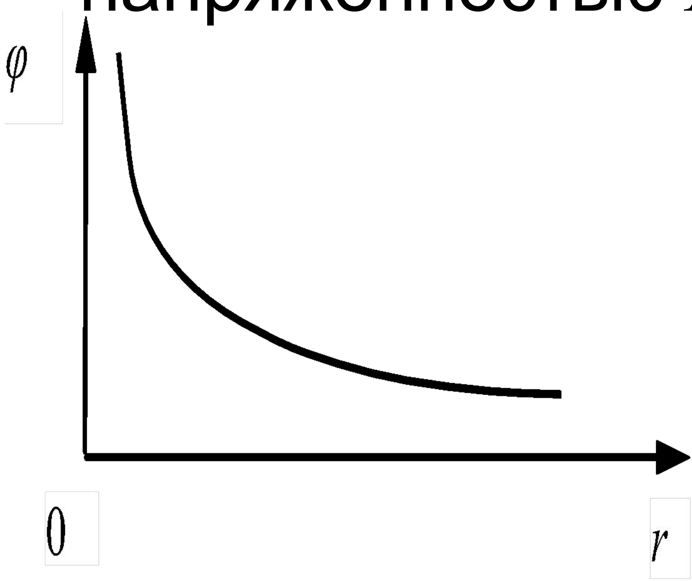
$\boldsymbol{E}$ - [Н/Кл = Н·м/Кл·м = (Дж/Кл)·(1/м) = В/м].

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{U}{q_{0+}} = \frac{q q_{0+}}{4\pi\varepsilon_0 r\, q_{0+}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Потенциал является более удобной физической величиной по сравнению с напряженностью ***E***

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$



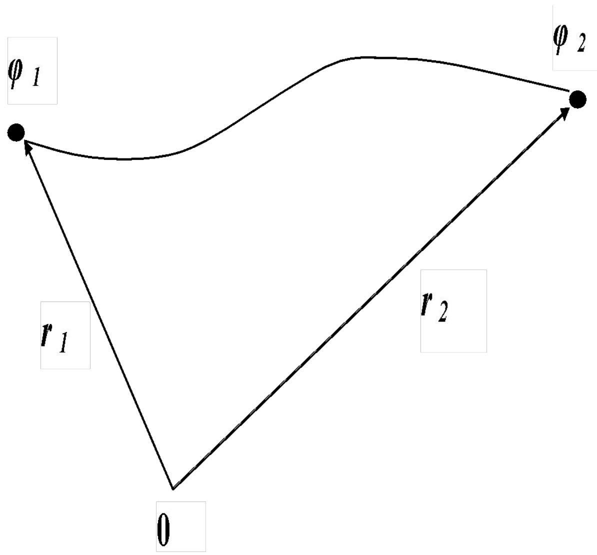
Принцип суперпозиции для потенциалов

- Если электрическое поле создано системой точечных зарядов, то потенциал φ в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов φ_i, созданных в точке каждым из зарядов в отдельности.

$$\varphi = \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

Разность потенциалов. Физический смысл потенциала

$$\varphi = \frac{U}{q_{0+}}$$



При перемещении заряда q_{0+} в электростатическом поле из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = -\Delta E_p = U_1 - U_2 = q_{0+} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$r_2 = \infty \rightarrow U_2 = U_\infty = 0 \Rightarrow$$

$$A_{1\infty} = U_1 - U_\infty = q_{0+} \cdot \varphi_1 - 0 = q_{0+} \cdot \varphi_1$$

$$A_\infty = q_{0+} \cdot \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{A_\infty}{q_{0+}}$$

Физический смысл потенциала

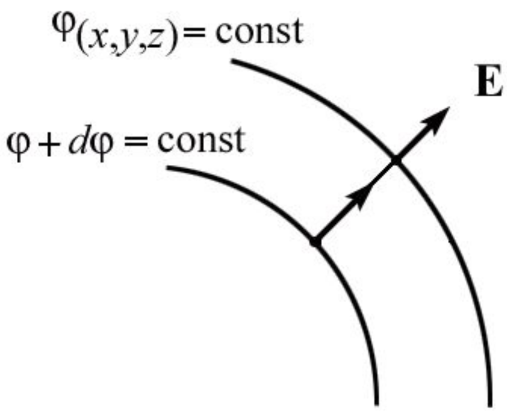
$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q_{0+}}$$

- ***Потенциал*** – физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Когда говорят о потенциале, то имеют ввиду разность потенциалов $\Delta\varphi$ между рассматриваемой точкой и точкой, потенциал φ которой принят за 0.

Потенциал φ данной точки физического смысла не имеет, так как нельзя определить работу в данной точке.

Эквипотенциальные поверхности (поверхности равного потенциала)



1) во всех точках потенциал φ имеет одно и то же значение,
2) вектор напряженности электрического поля ***E*** всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям,
3) $\Delta\varphi$ между двумя любыми эквипотенциальными поверхностями одинакова

(следовательно, густота эквипотенциальных поверхностей характеризует значение вектора *E* в разных точках).

Эквипотенциальные поверхности

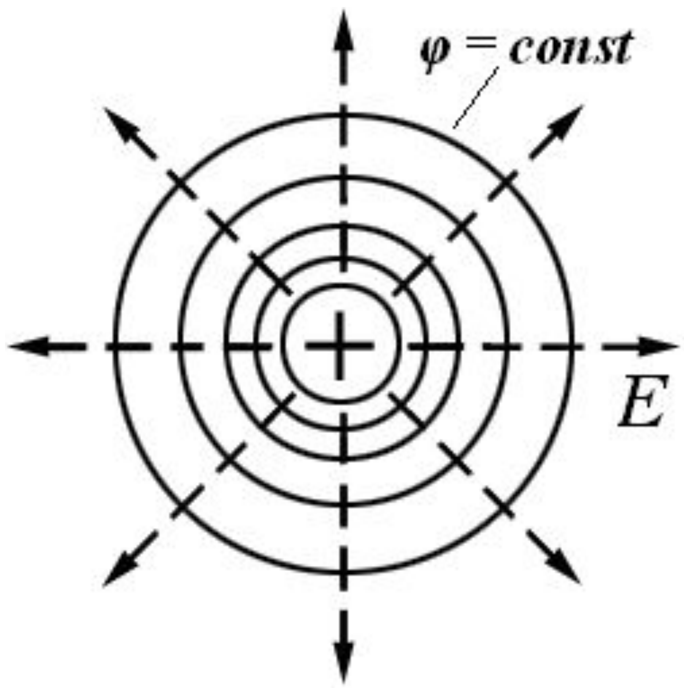
- Для точечного заряда

$$\varphi = const.$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

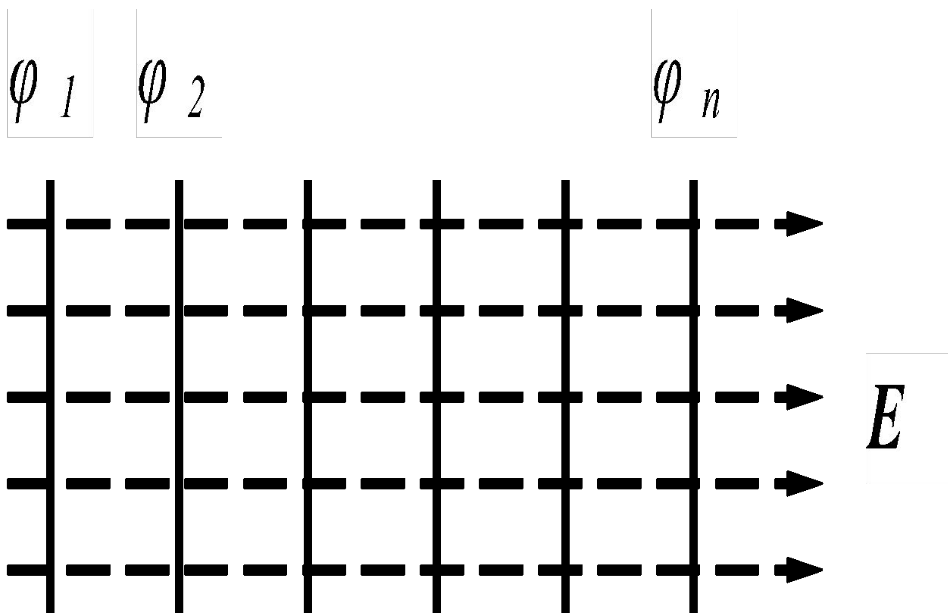
$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ \varphi}$$

$$r = const.$$

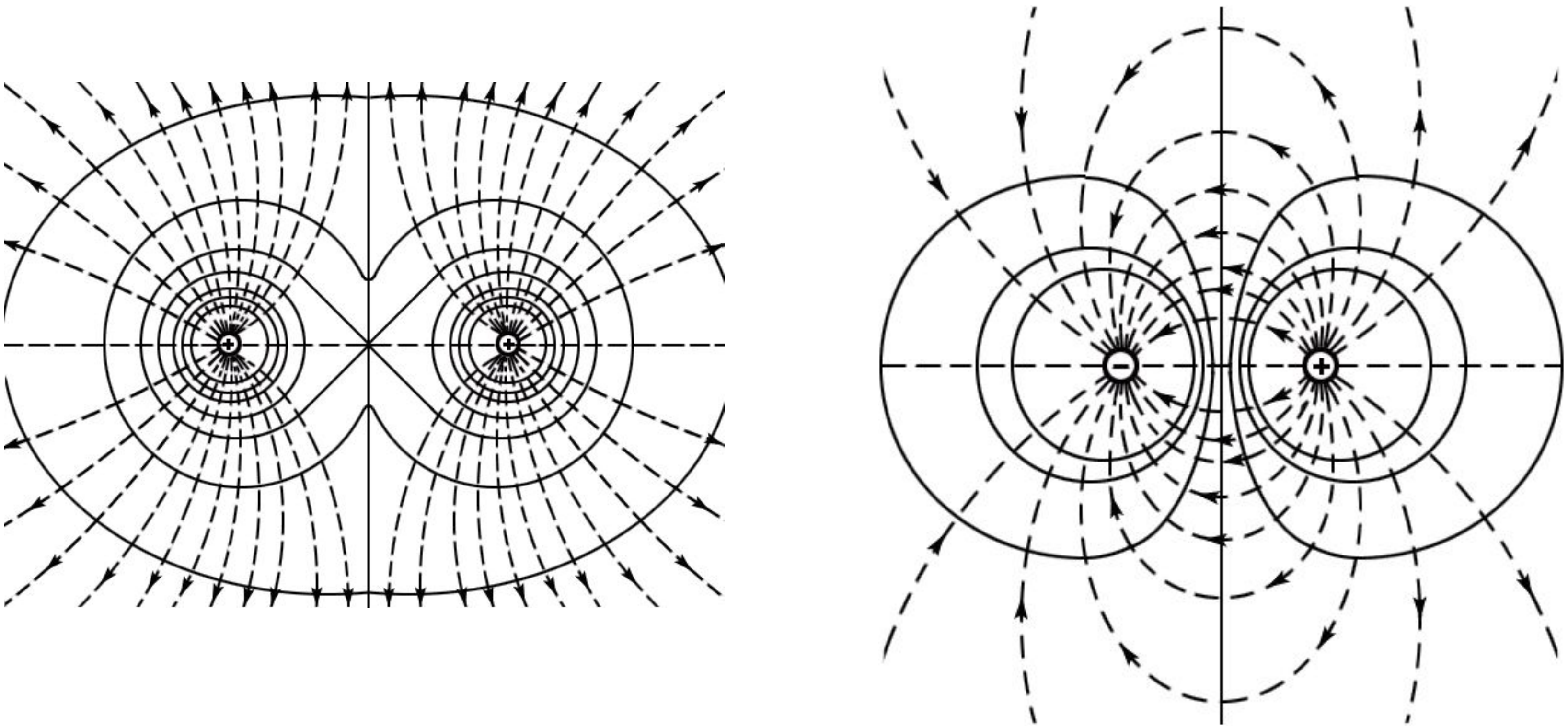


Эквипотенциальные поверхности

- Для однородного поля эквипотенциальные поверхности – параллельные линии.



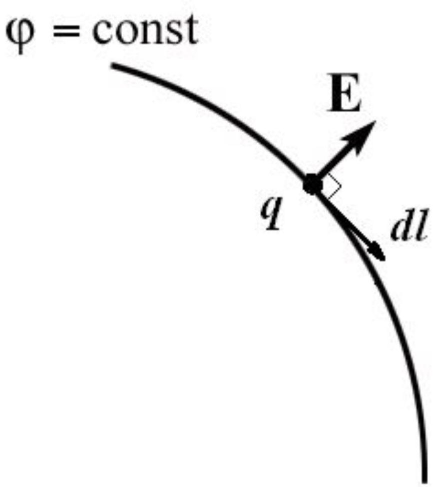
Примеры различных эквипотенциальных поверхностей



а *б*

Эквипотенциальные поверхности
поля двух равных одноименных зарядов (*а*) и диполя (*б*).
Пунктиром показаны силовые линии.

Эквипотенциальные поверхности



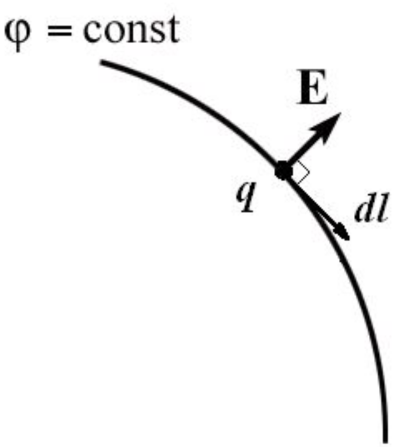
- Работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю.

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot \Delta\varphi = 0$$

так как $\varphi_1 = \varphi_2$.

Эквипотенциальные поверхности

$\vec{E} \perp$ эквипотенциальной поверхности.



Работа при перемещении *q* по эквипотенциальной поверхности

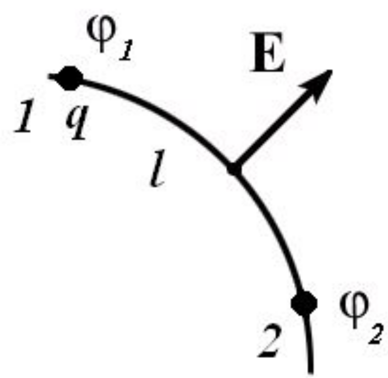
$$\left.\begin{aligned} A = \vec{F}d\vec{l} = qE\cdot\Delta l\cos(\angle\vec{E},d\vec{l}) \\ A = q\cdot\Delta\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} qE\cdot\Delta l\cos(\angle\vec{E},d\vec{l}) = 0 \\ q \neq 0, \qquad E \neq 0, \qquad \Delta l \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos(\angle\vec{E},d\vec{l}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle\vec{E},d\vec{l} = \frac{\pi}{2}, \qquad \vec{E} \perp d\vec{l}\,.$$

Вектор ***dl*** касательный к эквипотенциальной поверхности, следовательно, вектор напряженности электрического поля ***E*** перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

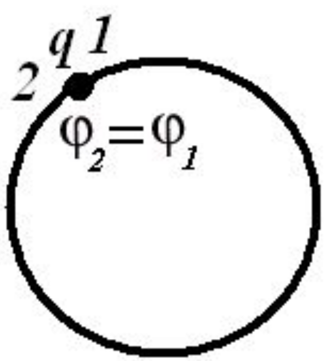
Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля *E*



- ***Циркуляция*** вектора ***A***: $\oint\limits_L \vec{A}\,d\vec{l} = \oint\limits_L A_l\,dl$

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} \qquad (1)$$

$$A_{12} = q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)$$



- точки 1 и 2 совпадают ⇨ $\varphi_1 = \varphi_2$.

$$A_{12} = q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Из (1) ⇨ $$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

Циркуляция вектора E равна нулю.

Энергия взаимодействия системы зарядов

- Потенциальная энергия заряда q_2

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

- Энергия взаимодействия системы зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_k}{r_{ik}}; \qquad i \neq k.$$

В формуле присутствует множитель ½, так как при суммировании по всем *i* и *k* от 1 до *n* энергия взаимодействия пар зарядов учитывается дважды.
$i \neq k$, так как в случае $i = k$ заряд взаимодействует сам с собой.

Связь вектора напряженности *E* и разности потенциалов. Третий способ определения напряженности электрического поля *E*

- Работа по перемещению заряда в электрическом поле:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = q\vec{E}d\vec{r},$$

$$dA = -dE_p = -dU. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия электрического поля зависит от координат x, y, z и является функцией $U(x,y,z)$.

Связь вектора напряженности *E* и *φ*

- При перемещении заряда на расстояние *dr* его координаты изменяются :

$(x+dx), (y+dy), (z+dz).$

Изменение потенциальной энергии:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (2)$$

$$\vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (3)$$

Из (1) $\Rightarrow$

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU$$

Связь вектора напряженности *E* и *φ*

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{\kappa} \quad (5)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{\kappa} \right) \quad (6)$$

Связь вектора напряженности *E* и *φ*

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{\kappa}\right)$$

- Оператор набла (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\kappa}$$

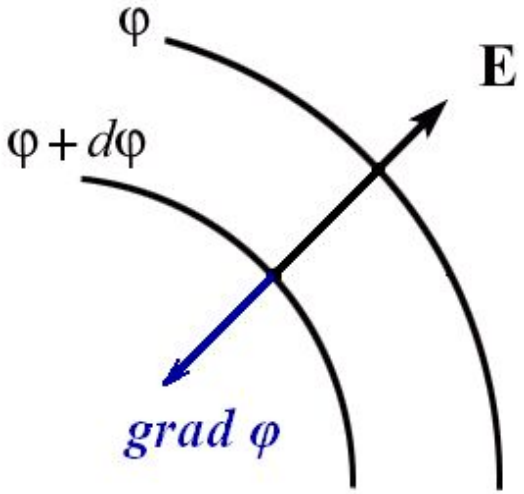
$$\vec{F} = -\nabla U = -\nabla E_p$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad \varphi = \frac{U}{q}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi$$

Связь вектора напряженности *E* и *φ*

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -grad\varphi$$



$$\nabla\varphi = grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\kappa}$$

Знак «–» показывает, что вектор ***E*** направлен в сторону убывания потенциала.