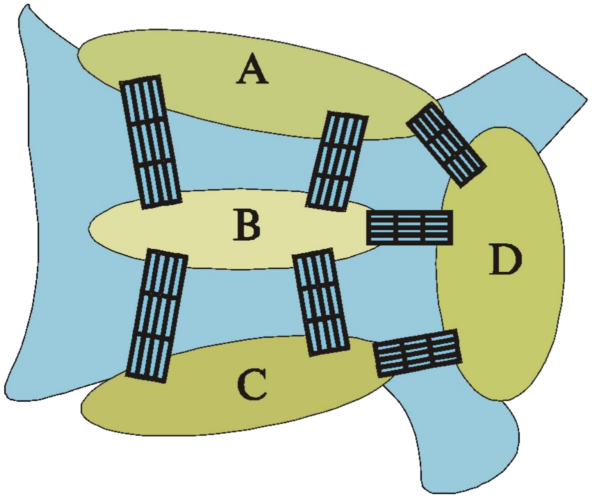
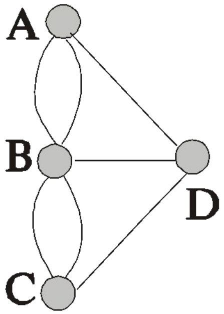
Основные понятия теории графов

Из истории теории графов

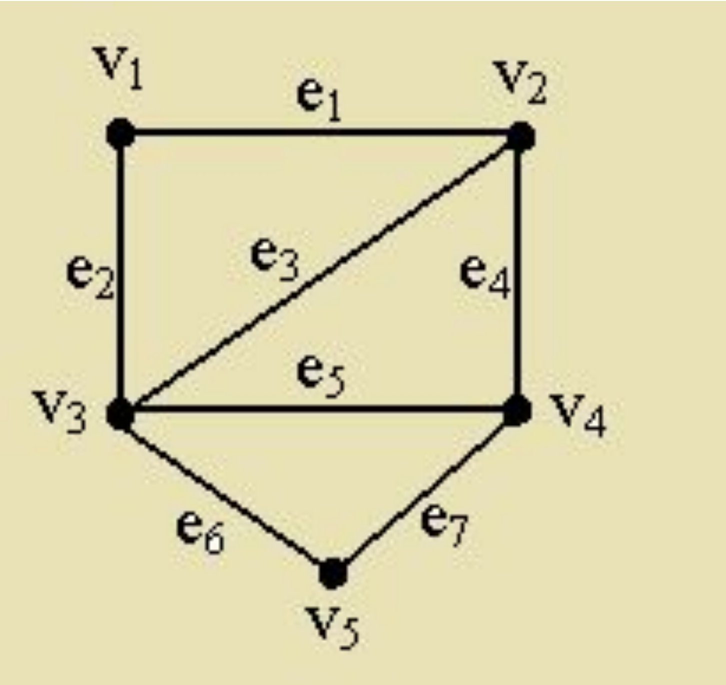
- Основоположником теории графов считается Леонард Эйлер, который доказал невозможность маршрута прохождения всех четырех частей суши в задаче о кенигсбергских мостах (1736)





Основные понятия

Граф ***G=(V,E)*** состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых ***вершинами***, и конечного множества элементов, называемых ***ребрами***.



Граф ***G=(V, E)***

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

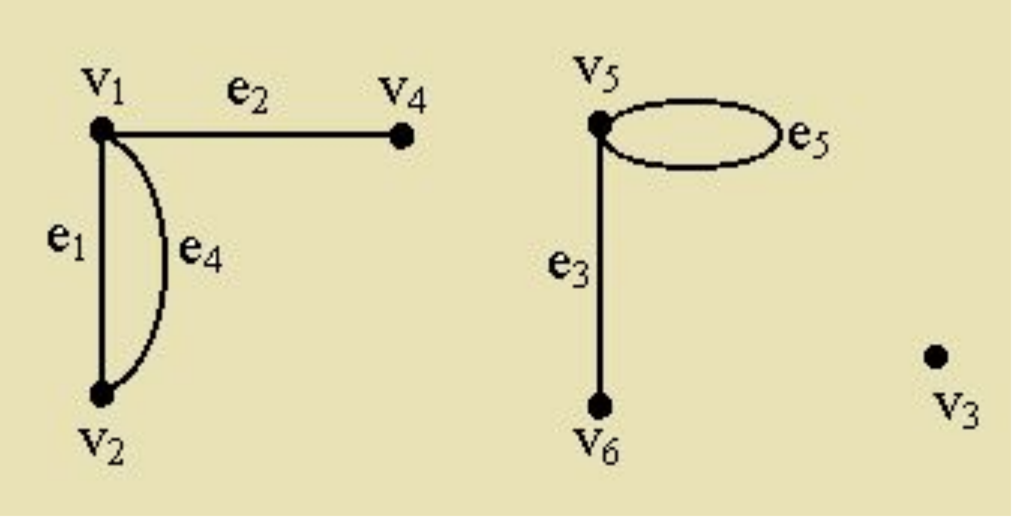
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Основные понятия

Вершины v_i и v_j, определяющие ребро e_k, называются ***концевыми вершинами*** ребра e_k. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются ***параллельными*** (e_1,e_4).

Петля– замкнутое ребро(e_5).

Ребро, принадлежащее вершине, называется ***инцидентным*** (ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2).

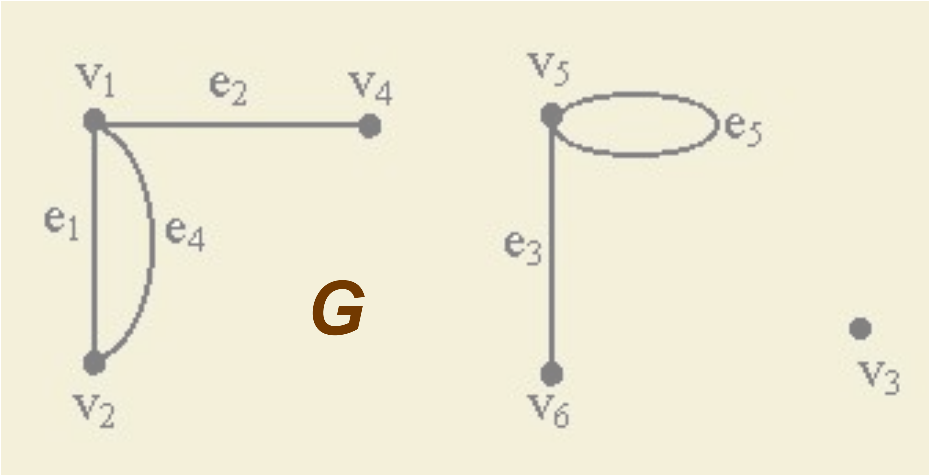


Основные понятия

Изолированная вершина не инцидентна ни одному ребру (${\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$).

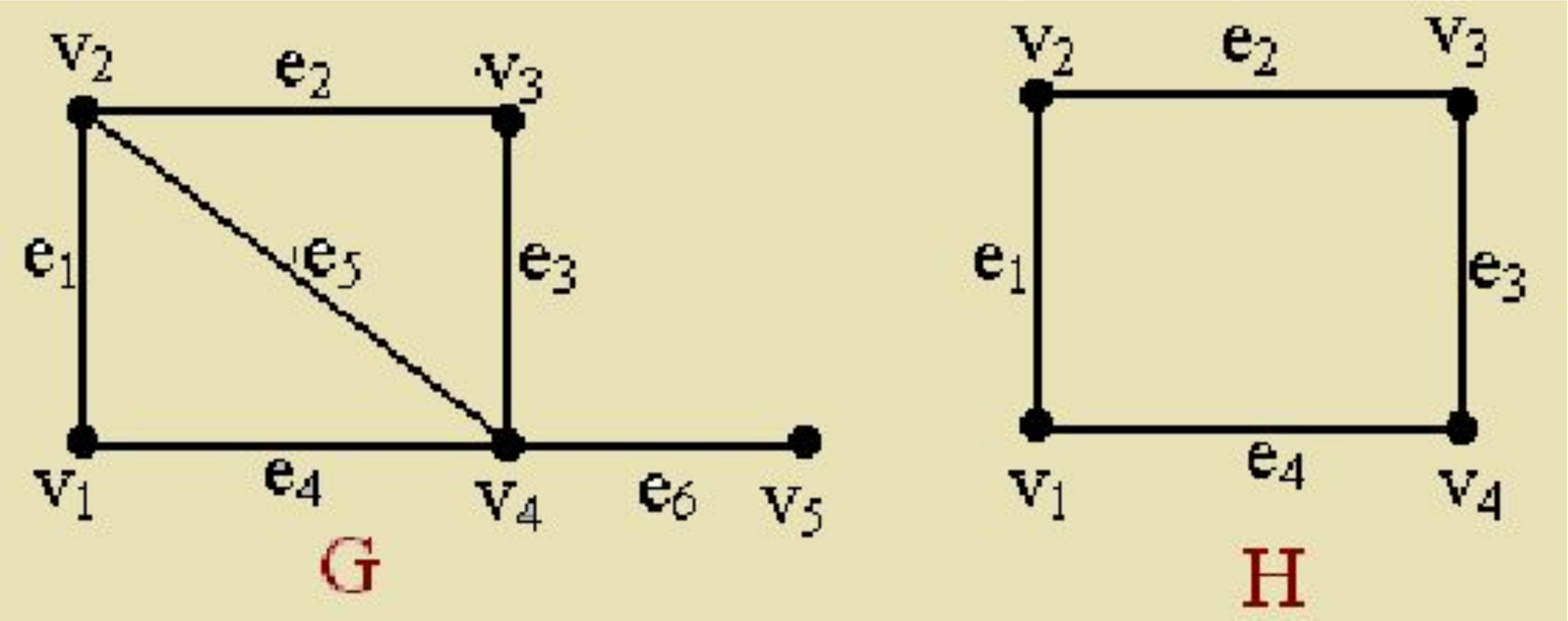
Две вершины ***смежны***, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра (${\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$, ${\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}$).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются ***смежными*** (${\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}$, ${\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}$).



Основные понятия

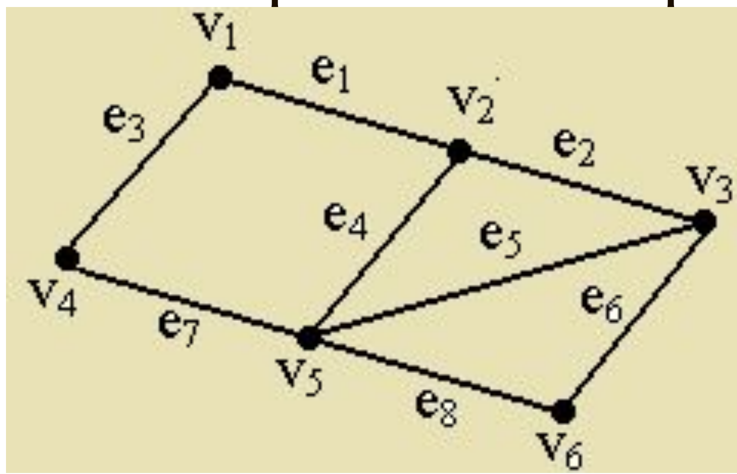
Подграф – любая часть графа, сама являющаяся графом.



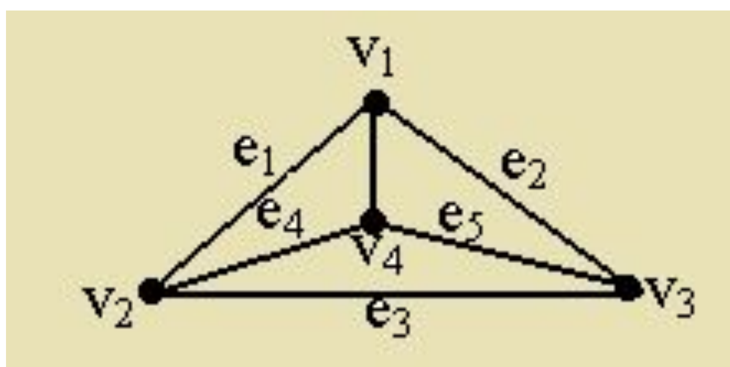
Подграф ***H*** графа ***G***

Виды графов

Граф ***G=(V,E)*** называется ***простым,*** если он не содержит петель и параллельных ребер.

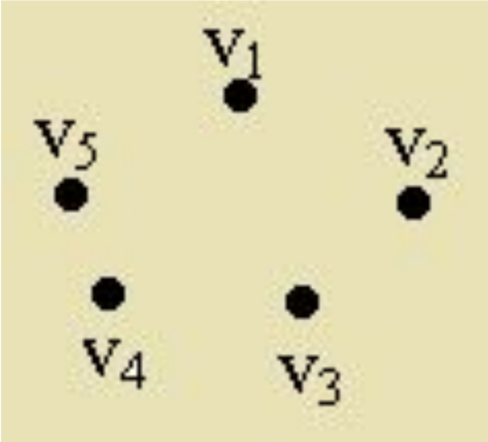


Граф ***G=(V,E)*** называется ***полным***, если он простой и каждая пара вершин смежна.

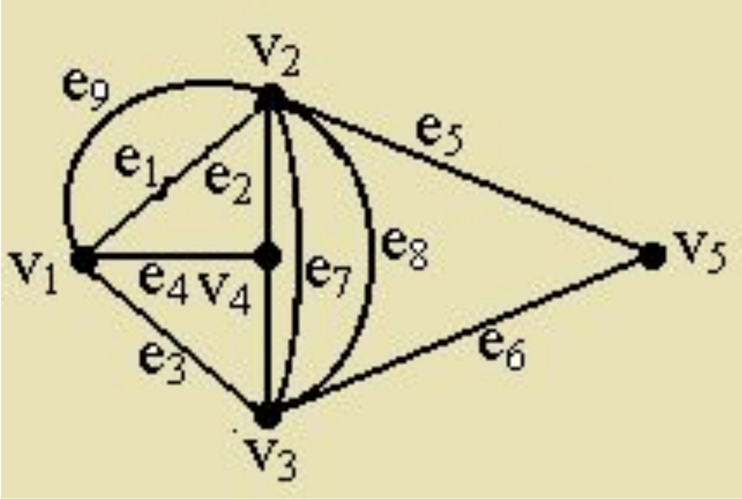


Виды графов

Ноль-граф - граф, множество ребер которого пусто.

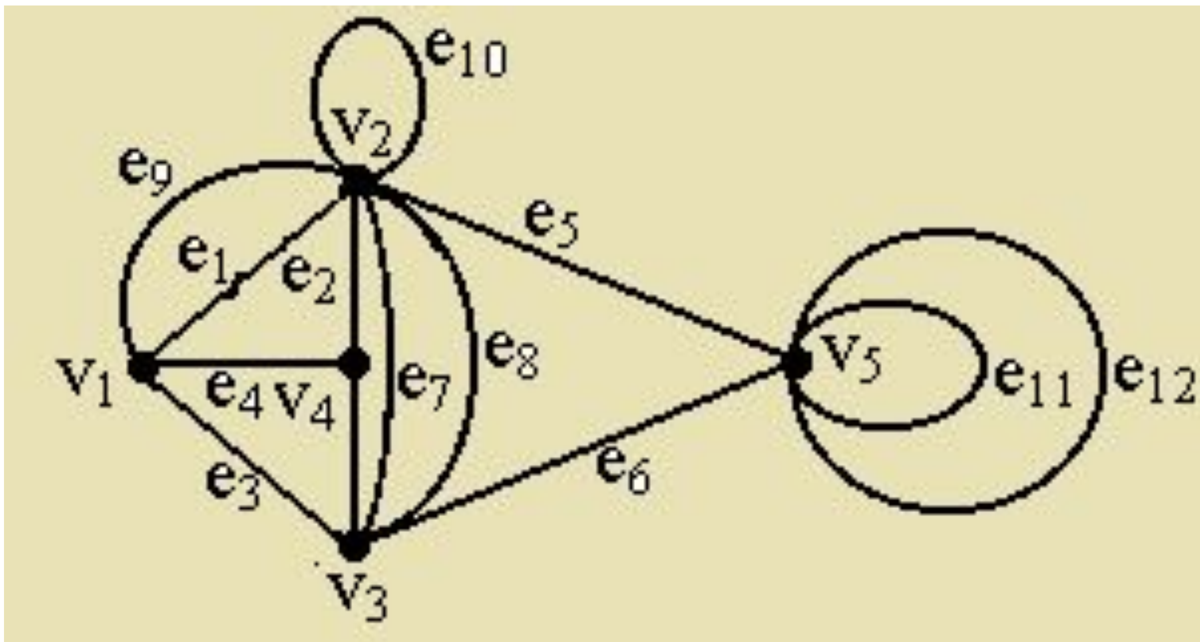


Граф ***G*** с кратными ребрами называется ***мультиграф.***



Виды графов

Граф **G** с петлями и кратными ребрами называется ***псевдограф***.



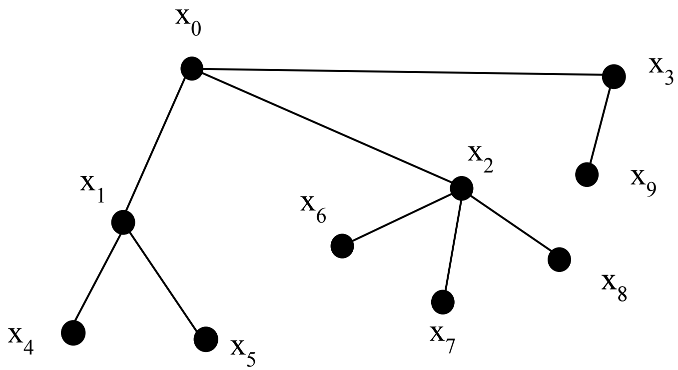
Виды графов

Особый интерес представляют связные ациклические графы, называемые деревьями. Дерево на множестве Р вершин всегда содержит **q=p-1** ребер, т.е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связанным. При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из который представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязанный граф, компоненты которого являются деревьями, называется лесом.

Виды графов

На практике широко используются такие виды графов, как деревья и прадеревья.

Деревом называется конечный связный неориентированный граф, состоящий, по крайней мере, из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер

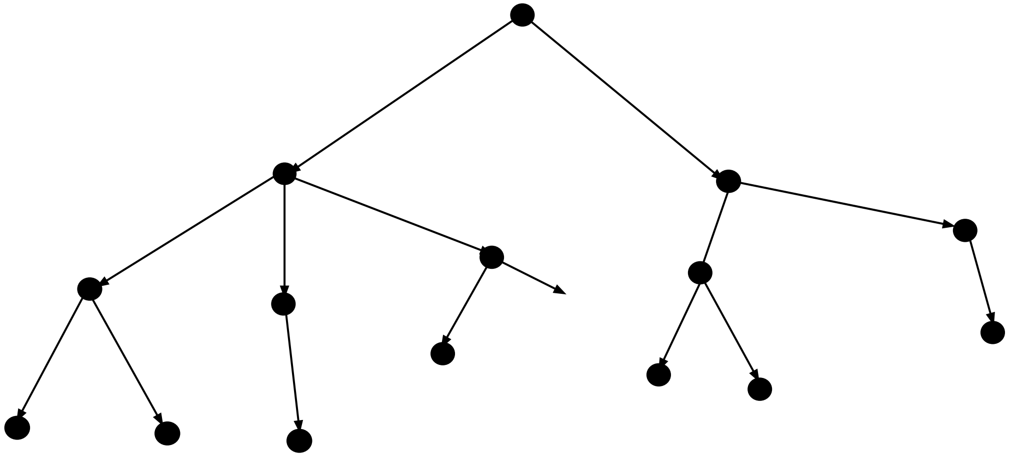


Ветвями дерева называются ребра графа, входящие в дерево. **Хордами дерева** называются ребра, входящие в граф, дополнительный к данному дереву. **Лагранжевым деревом** называется дерево, все ветви которого имеют общую вершину.

Виды графов

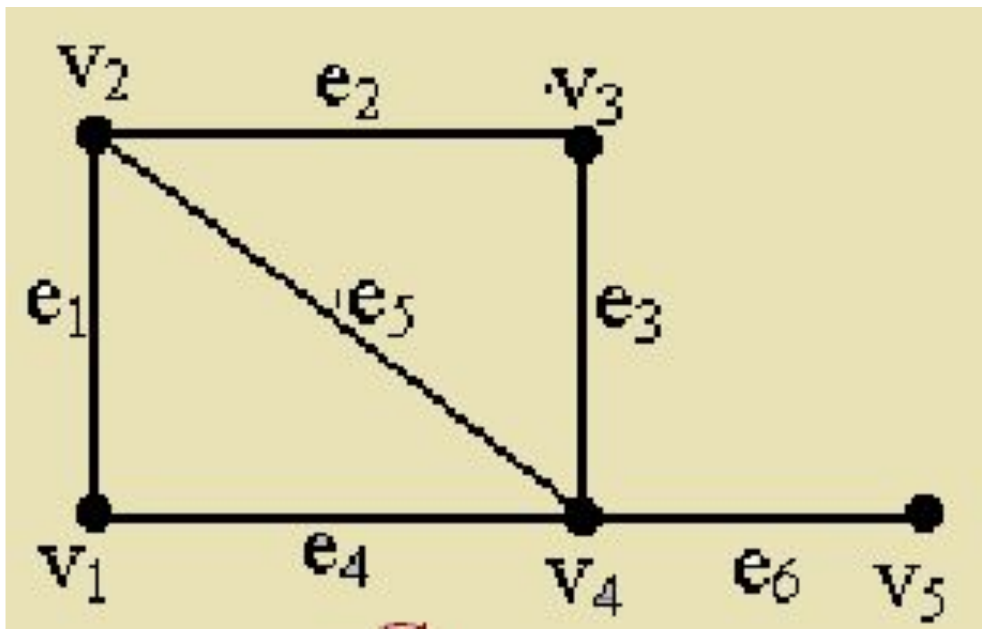
Лесом называется несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.

Прадеревом называется ориентированный граф G(X) с корнем $x0 \in X$, если в каждую вершину $xi \neq x0$ ($xi \in X$) заходит ровно одна дуга, а в корень $x0$ не заходит ни одна дуга. Прадерево не содержит контуров



Неориентированный граф

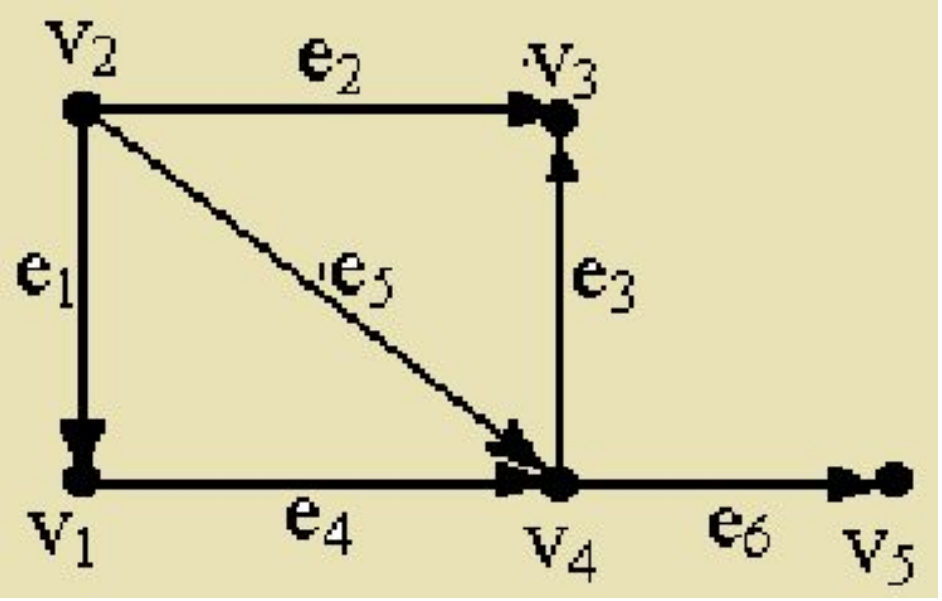
Граф **G**, рёбра которого не имеют определённого направления, называется ***неориентированным.***



Ориентированный граф

Граф **G**, имеющий определённое направление, называется ***ориентированным графом или орграфом***.

Ребра, имеющие направление, называются ***дугами***.



Способы задания графов

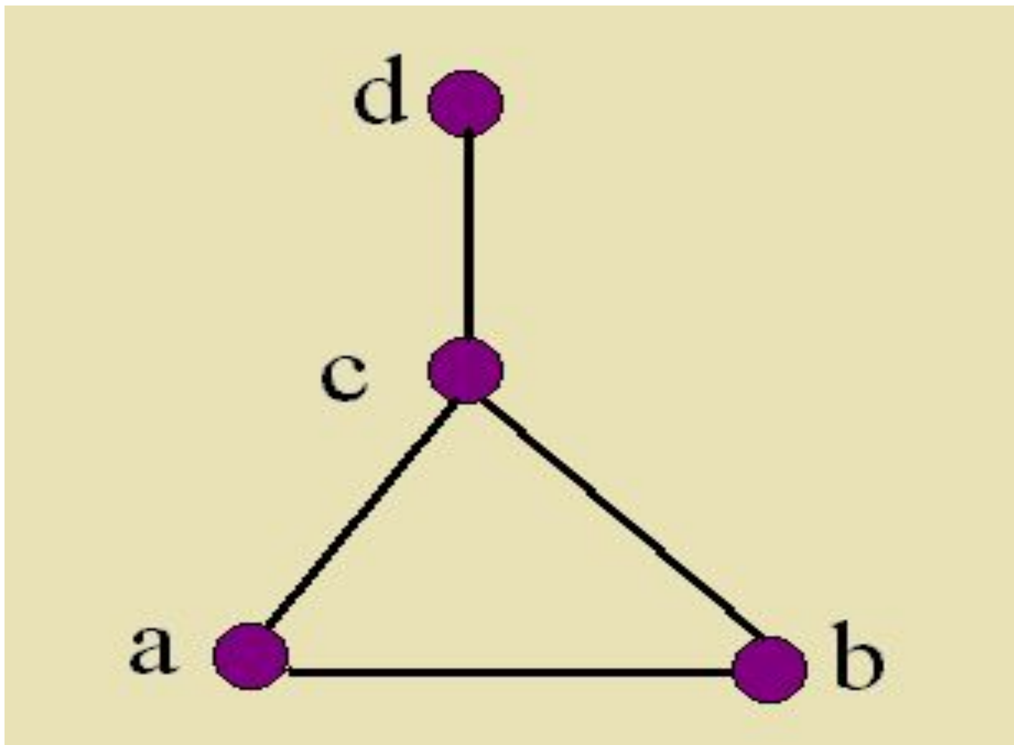
1) Явное задание графа как алгебраической системы.

Чтобы задать граф, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром.

{{a,b},{b,c},{a,c},{c,d}}

Способы задания графов

2) Геометрический.



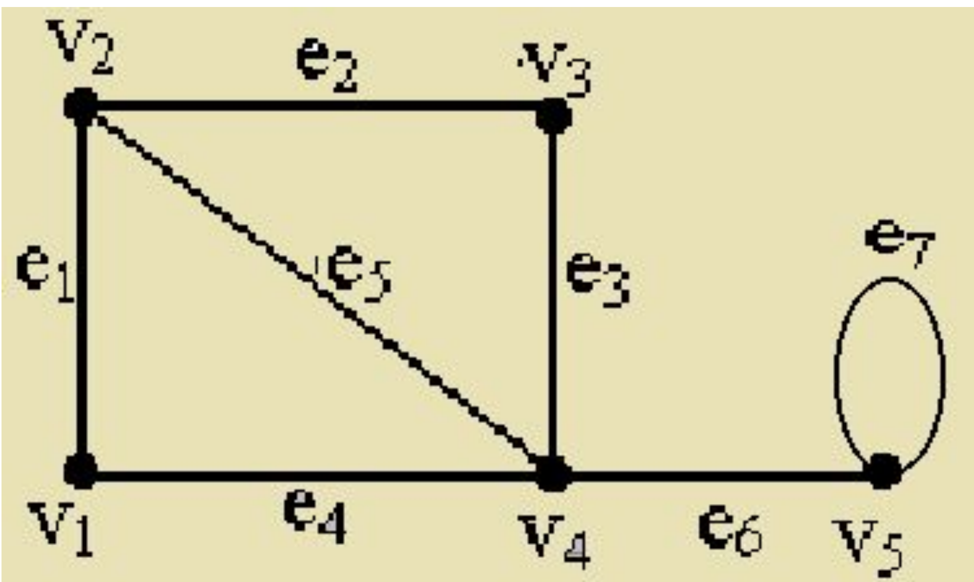
Способы задания графов

3) Матрица смежности.

Элементы $\boldsymbol{A_{ij}}$ матрицы смежности $\boldsymbol{A}$ равны количеству ребер между рассматриваемыми вершинами.

Матрица смежности неорграфа

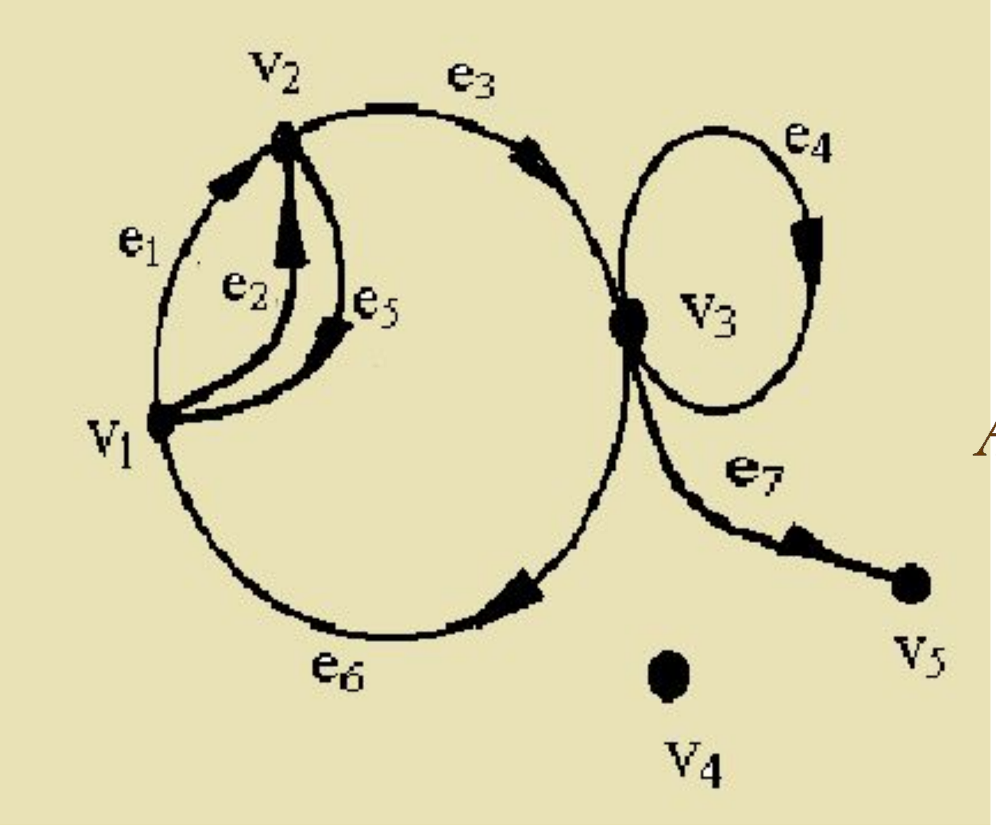
Для неорграфа ***G***, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица смежности орграфа

Для орграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A_0 = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Способы задания графов

4) Матрица инцидентности.

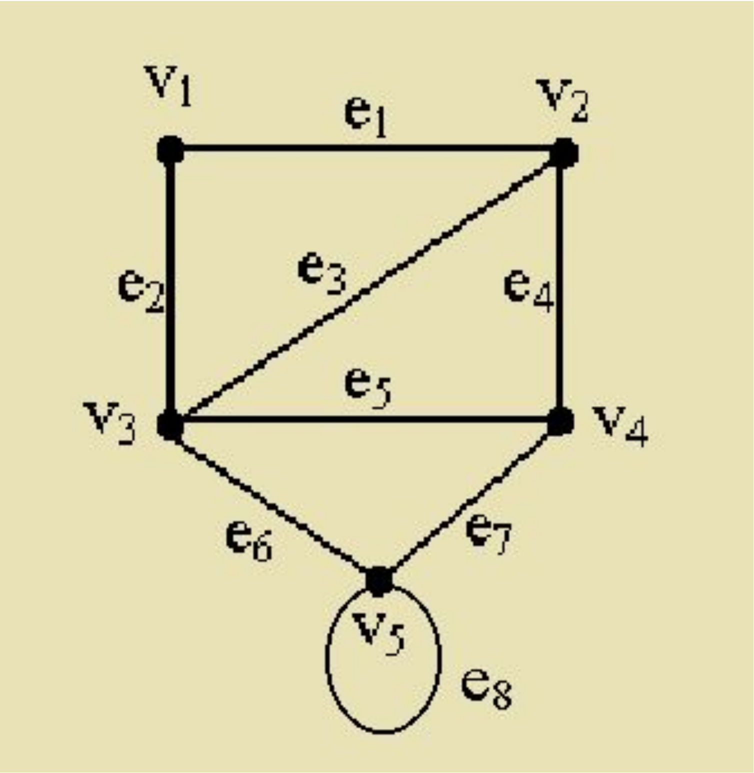
Матрица инцидентности В –это таблица, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам.

Элементы матрицы определяются следующим образом:

Способы задания графов

1) для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

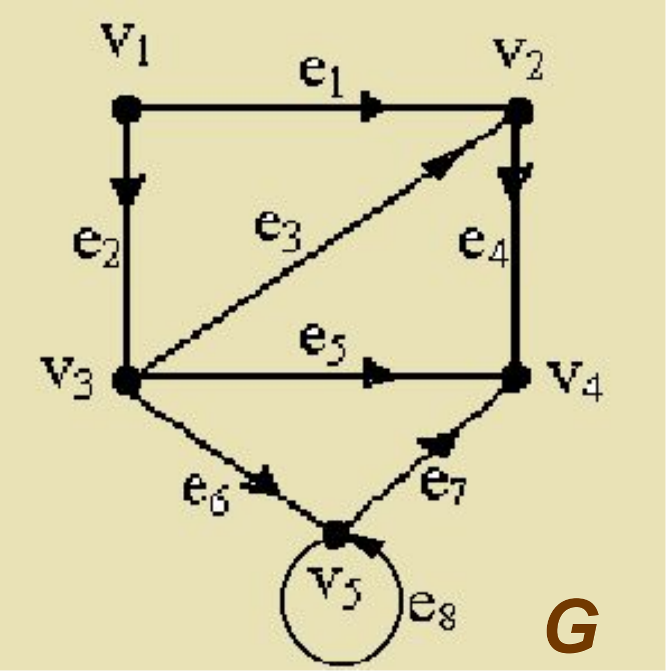


$$B = \begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица инцидентности орграфа

2) для орграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в вершину } v_i; \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из вершины } v_i; \\ 2, & \text{если ребро } e_j \text{ –петля из вершины } v_i; \\ 0, & \text{если } e_j \text{ и } v_i \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

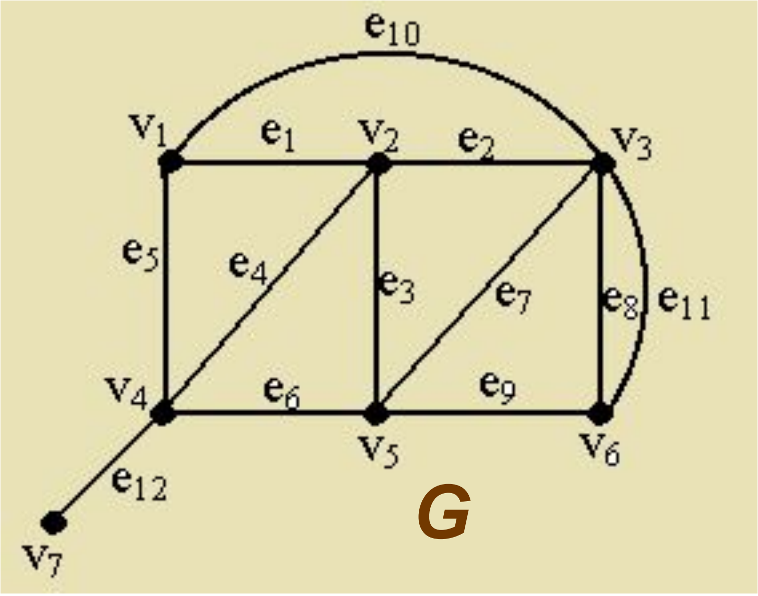
Маршрут

Маршрут в графе ***G=(V,E)*** — конечная чередующееся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, которая начинается и заканчивается на вершинах, причем v_{i-1} и v_i являются концевыми вершинами ребра e_i, $1 \le i \le k$.

Маршрут

Маршрут называется ***открытым***, если его концевые вершины различны (***v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6***).

Маршрут называется ***замкнутым***, если его концевые вершины совпадают (***v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1***).

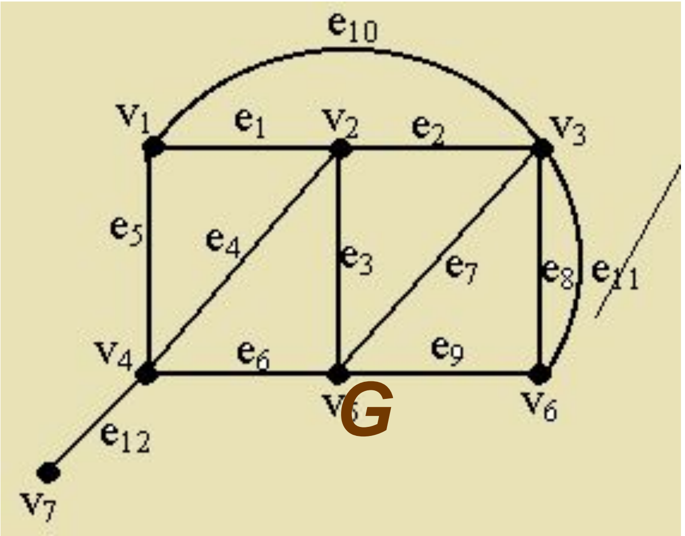


Цепь

Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны.

Цепь называется ***простой***, если ее концевые вершины различны(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3).

Цепь называется ***замкнутой***, если ее концевые вершины совпадают ($v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_7,v_5,e_3,v_2,e_4,v_4,e_5,v_1$).

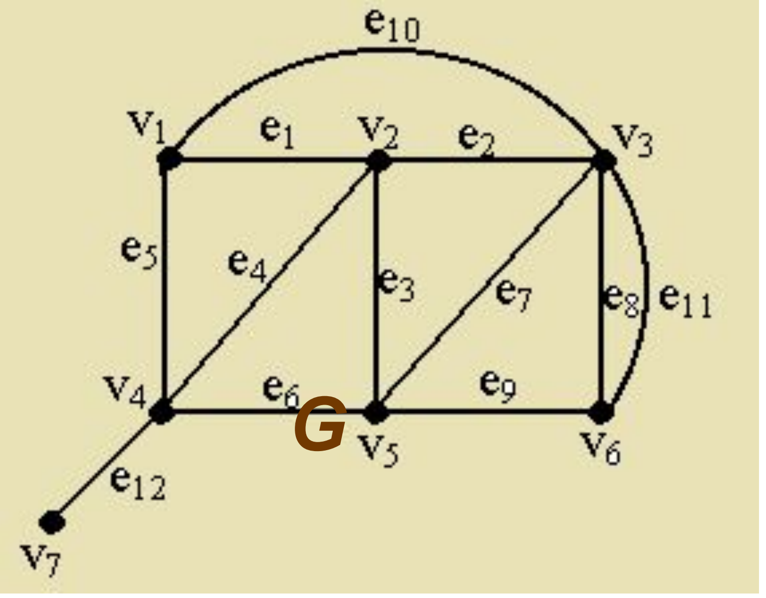


Путь, цикл

Открытая цепь называется ***путем***, если все ее вершины различны (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3).

Цикл – это замкнутая цепь (***простой цикл***, если цепь простая) ($v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_6, v_4, e_5, v_1$).

Число ребер в пути называется ***длиной пути***. Аналогично определяется ***длина цикла***.



Свойства путей и циклов

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

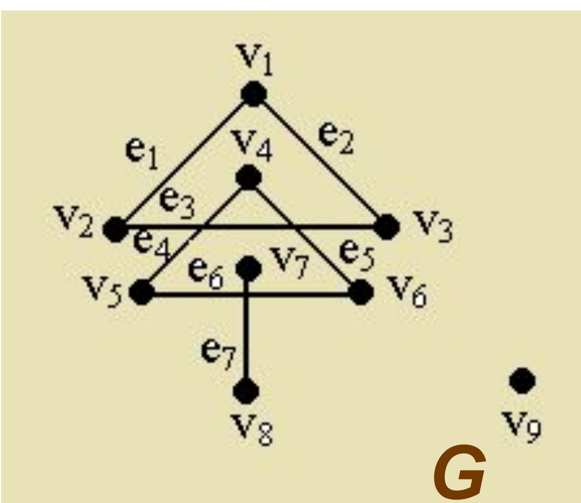
3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

Связность графов, компонента связности

Две вершины v_i и v_j называются ***связанными*** в графе ***G***, если в нем существует путь v_i—v_j. Вершина связана сама с собой.

Граф называется ***связным***, если в нем существует путь между каждой парой вершин.

Компонента связности – максимальный связный подграф в графе.



1 компонента связности: $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3\}$
2 компонента связности: $\{v_4, v_5, v_6, e_4, e_5, e_6\}$
3 компонента связности: $\{v_7, v_8, e_7\}$
4 компонента связности: $\{v_9\}$

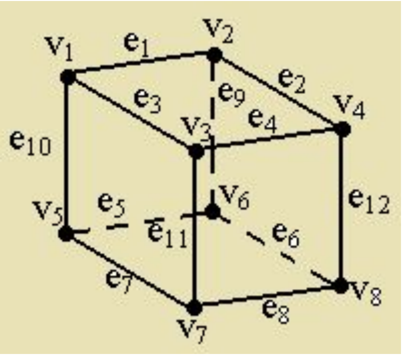
Степень вершины

Степенью $\boldsymbol{deg(v_j)}$ вершины $\boldsymbol{v_j}$ называется число инцидентных ей ребер, т. е. вершин в ее окружении.

Максимальная и минимальная степени вершин графа $\boldsymbol{G}$ обозначаются символами $\boldsymbol{\Delta(G)}$ и $\boldsymbol{\delta(G)}$ соответственно:

$$\Delta(G)=\max_{v\in VG}\deg v \qquad \delta(G)=\min_{v\in VG}\deg v$$

Граф $\boldsymbol{G=(V,E)}$ называется ***регулярным*** или ***однородным*** (степени $\boldsymbol{r}$), если степени всех его вершин одинаковы. Степенью регулярного графа называется степень его вершин.



Сумма степеней вершин графа

<u>Утверждение </u>(«лемма о рукопожатиях»)

Сумма всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in VG} \deg v = 2|EG|$$

Интерпретация леммы: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки,то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала).

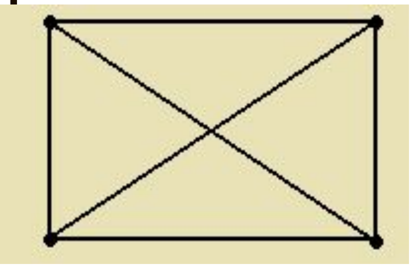
<u>Следствие</u>

В любом графе число вершин нечетной степени четно

Изоморфизм графов

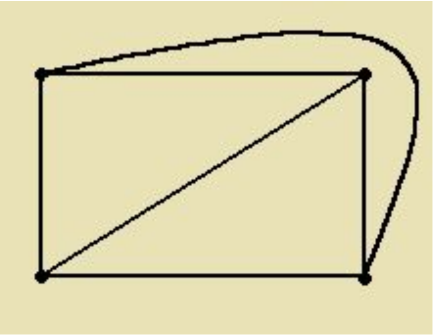
Два графа G_1 и G_2 ***изоморфны***, если существует такое взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов G_1 и G_2 инцидентны соответствующим вершинам этих графов.

Если граф G изоморфен геометрическому графу G' в R^n, то G' называется ***геометрической реализацией*** графа G в пространстве R^n.



R 3

R 2



Граф R^2 является геометрической реализацией графа R^3

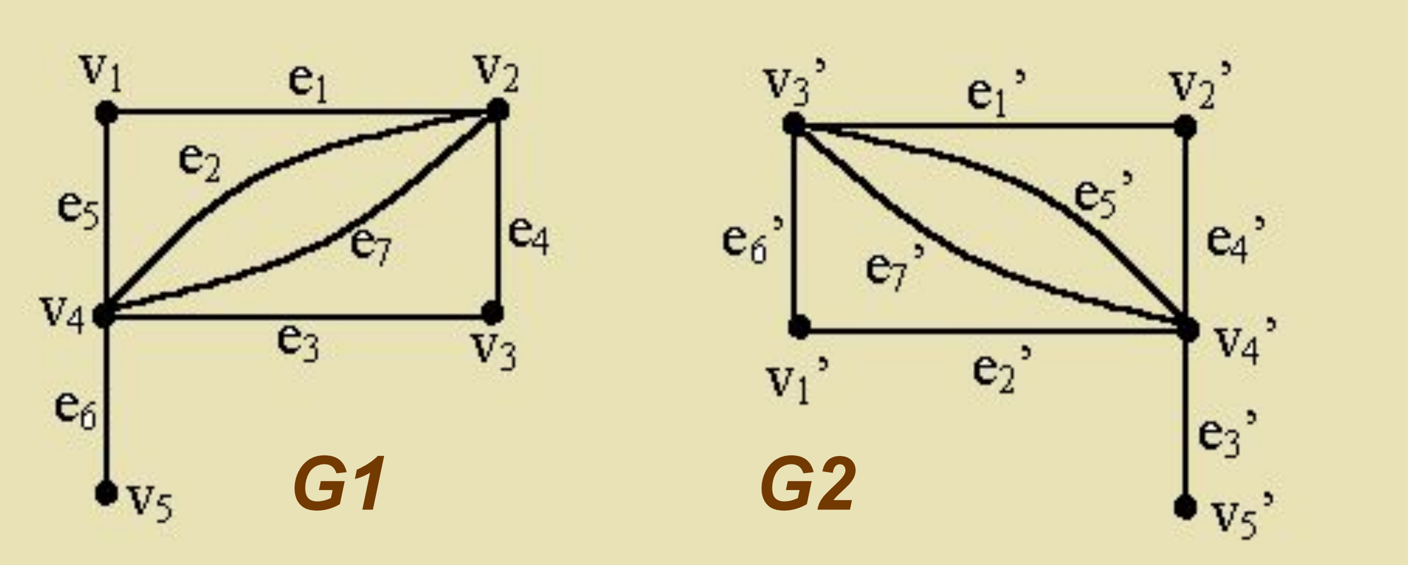
Пример изоморфных графов

Соответствие вершин:

$v_1 \leftrightarrow v_2', v_2 \leftrightarrow v_3', v_3 \leftrightarrow v_1', v_4 \leftrightarrow v_4', v_5 \leftrightarrow v_5'$;

Соответствие ребер:

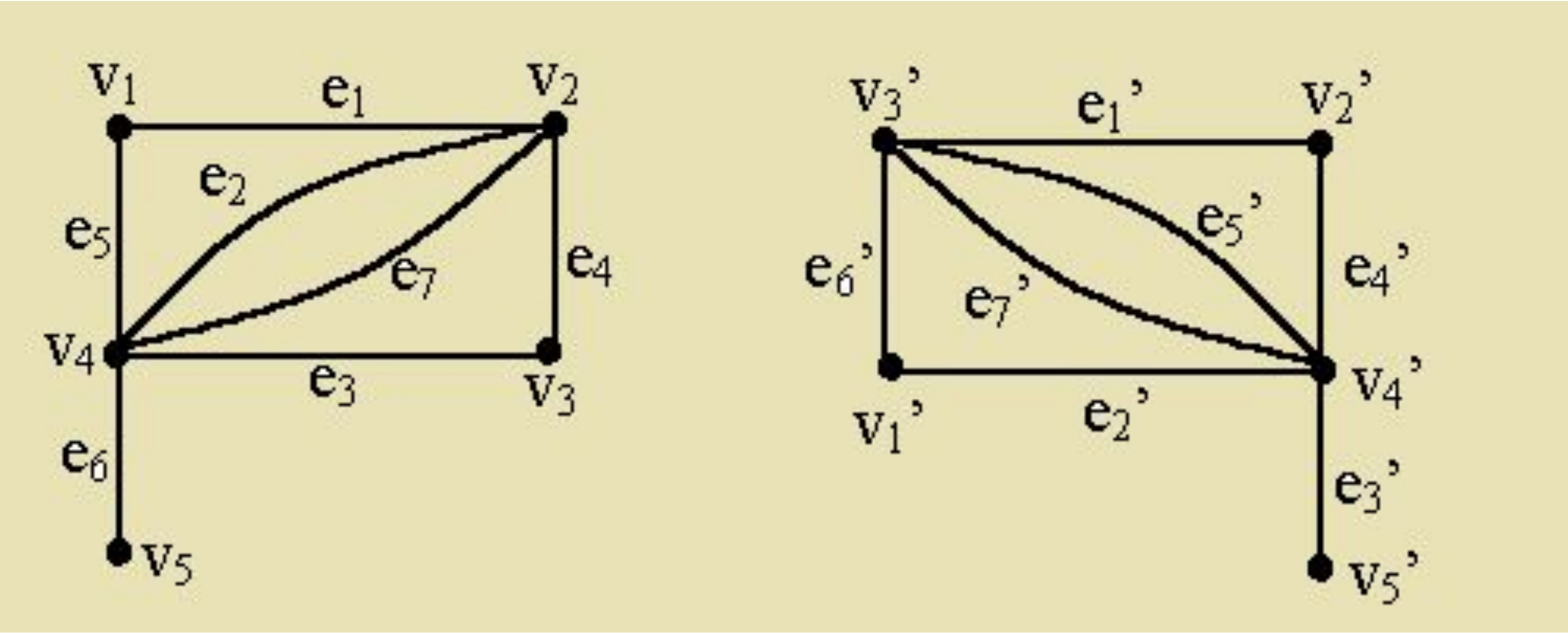
$e_1 \leftrightarrow e_1'$, $e_3 \leftrightarrow e_2'$, $e_5 \leftrightarrow e_4'$, $e_2 \leftrightarrow e_5'$, $e_4 \leftrightarrow e_6'$, $e_6 \leftrightarrow e_3'$.



G1 и ***G2*** – изоморфные графы

Изоморфизм как отношение эквивалентности на множестве графов

Отношение изоморфизма является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно.

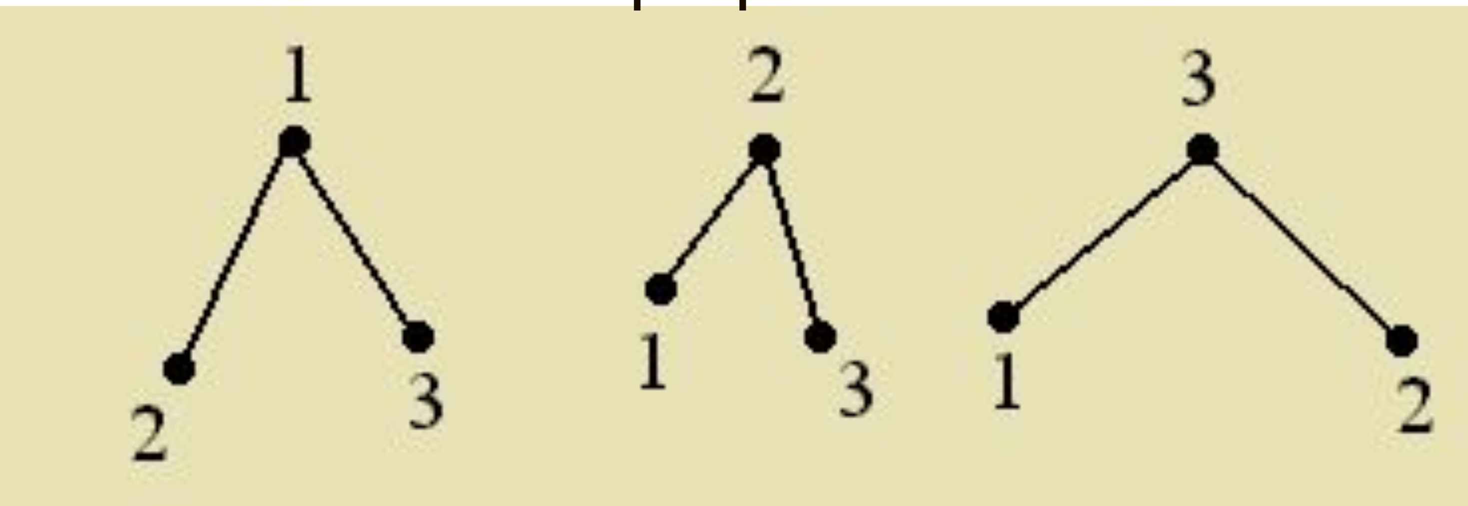


Помеченный и абстрактный графы

Граф порядка ***n*** называется ***помеченным***, если его вершинам присвоены некоторые метки (например номера ***1, 2, …, n***).

Абстрактный (или ***непомеченный***) граф – это класс изоморфных графов.

Помеченные графы:



Характеристики графов

Характеристики расстояний в графах

Пусть $G(X)$ – конечный или бесконечный ориентированный граф. **Отклонением** $d(xi, xj)$ его вершины xi от вершины xj называется длина кратчайшего пути из xi в xj:

$d(xi, xj) = \min \{l[Sk(xi, xj)]\}$.

Отклонение $d(xi, xj)$ удовлетворяет следующим аксиомам метрического пространства:

1. $d(xi, xj) \geq 0$;
2. $d(xi, xj) = 0 \Leftrightarrow xi = xj$;
3. $d(xi, xj) + d(xj, xk) \geq d(xi, xk)$ – неравенство треугольника и не удовлетворяет четвертой аксиоме, а именно:
4. $d(xi, xj) \neq d(xj, xi)$, так как граф ориентирован.

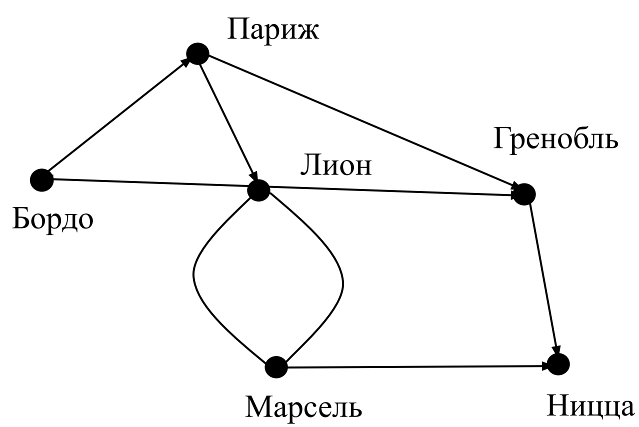
Необходимо отметить, что если $xj \notin G(xi)$, то $d(xi, xj) = \infty$.

Характеристики графов

Отклоненностью вершины xi называется наибольшее из отклонений d(xi, xj) по всем xj:

$$d(x_i) = \max_{x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\} = \max_{x_j \in X} \{\min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}$$

В качестве примера рассмотрим схему первой (1870 г.) сети связи для почтовых голубей



Характеристики графов

- Граф, представляющий ее, изображен на рис, а матрица отклонений и вектор отклоненностей – в таблицах соответственно.

Таблица. Вектор отклонений

Города	П	Б	Л	Г	М	Н
$d(x_i)$	2	3	2	∞	3	∞

Таблица. Отклонения d(xi, xj)

Города	**П**	**Б**	**Л**	**Г**	**М**	**Н**
Париж	0	2	1	1	2	2
Бордо	1	0	2	2	3	3
Лион	2	1	0	1	1	2
Гренобль	∞	∞	∞	0	∞	1
Марсель	3	2	1	2	0	1
Ницца	∞	∞	∞	∞	∞	0

Характеристические числа графов

Решение многих технических задач методами теории графов сводится к определению тех или иных характеристик графов, поэтому полезно знакомство со следующими характеристиками.

Цикломатическое число. Пусть G(X) – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Цикломатическим числом графа G называется число

$$\mu(G) = m - n + k.$$

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу базисных (независимых) циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическим числом можно пользоваться для определения числа независимых контуров.

Характеристические числа графов

Хроматическое число. Пусть p – натуральное число. Граф G(X) называется p-хроматическим, если его вершины можно раскрасить различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково. Наименьшее число p, при котором граф является p-хроматическим, называется хроматическим числом графа и обозначается $\gamma(G)$.

Если $\gamma(G) = 2$, то граф называется **бихроматическим**. Необходимым и достаточным условием того, чтобы граф был бихроматическим, является отсутствие в нем циклов нечетной длины.

Хроматическое число играет важную роль при решении задачи наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. Однако его определение, за исключением $\gamma(G) = 2$, представляет собой довольно трудную задачу, требующую применения ЭВМ.

Характеристические числа графов

Множество внутренней устойчивости. Множество $S \subset X$ графа $G(X)$ называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины из S не являются смежными, то есть для любого $x \in S$ имеет место:

$$G(x) \cap S = \varnothing.$$

Множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов, называется **наибольшим** внутренне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется числом **внутренней устойчивости** графа G. Наибольшее внутренне устойчивое множество играет важную роль в теории связи.

Множество внешней устойчивости. Множество $T \subset X$ графа $G(X)$ называется внешне устойчивым, если любая вершина, не принадлежащая T, соединена дугами с вершинами из T, то есть для любого $x \notin T$ имеет место: $G(x) \cap T \neq \varnothing$.

Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число элементов, называется **наименьшим** внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется **числом внешней устойчивости** графа $G(X)$.

Эйлеровы и гамильтоновы графы

Цель – исследование вопросов построения эйлеровых и гамильтоновых циклов для решения задач оптимизации на графах

Содержание:

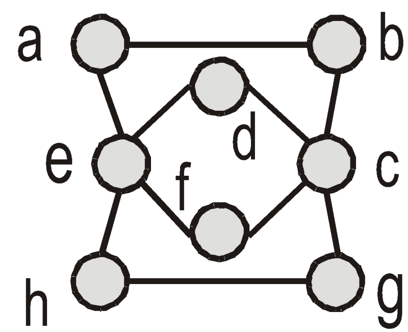
- Понятие эйлерова цикла и графа
- Критерии и алгоритмы определения эйлеровых графов
- Применение эйлеровых графов
- Гамильтоновы циклы и графы
- Методы определения гамильтоновых циклов
- Применение гамильтоновых графов
- Сравнительный анализ эйлеровых и гамильтоновых графов

Определение эйлерова цикла и графа

- Граф называется **эйлеровым**, если он содержит эйлеров цикл
- **Эйлеров цикл** – замкнутый маршрут, который включает каждое ребро графа только один раз (вершины могут повторяться)

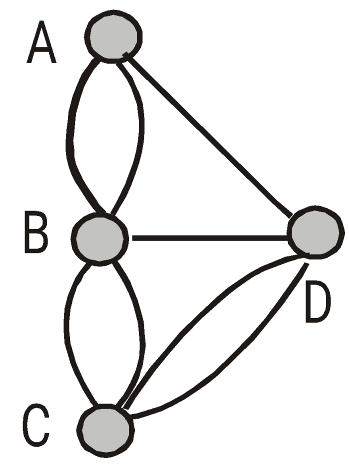
- **Пример**

- abcdefcghea



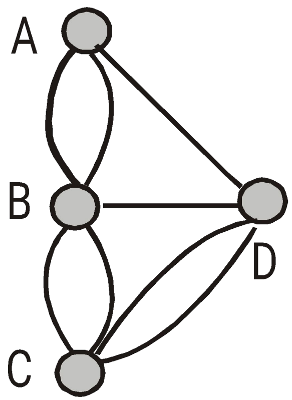
Эйлерова цепь

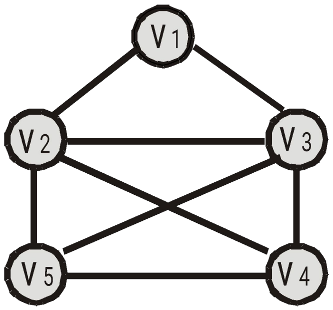
- Задача может быть решена в другой постановке: если в граф добавить еще одно ребро, то можно составить маршрут, включающий каждое из ребер только один раз, который начинается в одной из вершин и заканчивается в другой
- ABCDCBDAB
- ABDCDABCB
- Такой маршрут представляет собой **эйлерову цепь**
- Граф, содержащий эйлерову цепь, называется **полуэйлеровым**



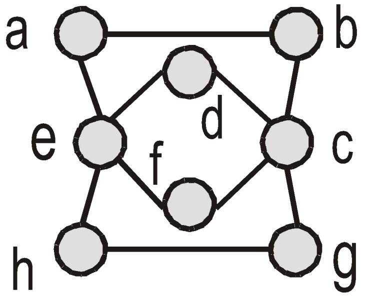
Критерий эйлеровости графа. 1

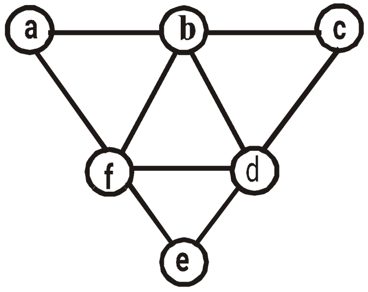
- **Эйлеровы цепи и степени вершин**





- **Эйлеровы циклы и степени вершин**





Критерий эйлеровости графа. 2

- **Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень:**

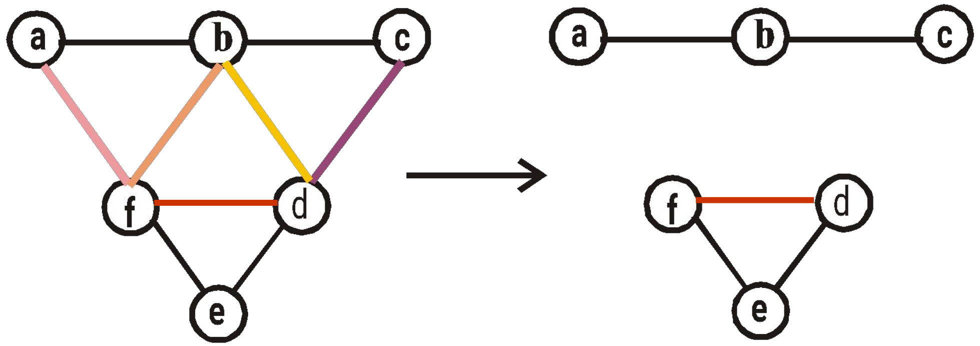
$$G=\langle V,U\rangle \text{ эйлеров} \Leftrightarrow \forall v \in V \; \deg v = 2n,\; n \in N$$

- **Если в графе имеется две вершины нечетной степени, то существует эйлерова цепь, которая начинается в одной из них и заканчивается в другой. При этом граф называется полуэйлеровым**

Алгоритм Флери

- Алгоритм построения эйлерова цикла:

1. Выбор произвольной вершины p с последующим вычеркиванием пройденного ребра
2. Запрещается проход по ребру, если его удаление приводит к разбиению графа на два компонента связности



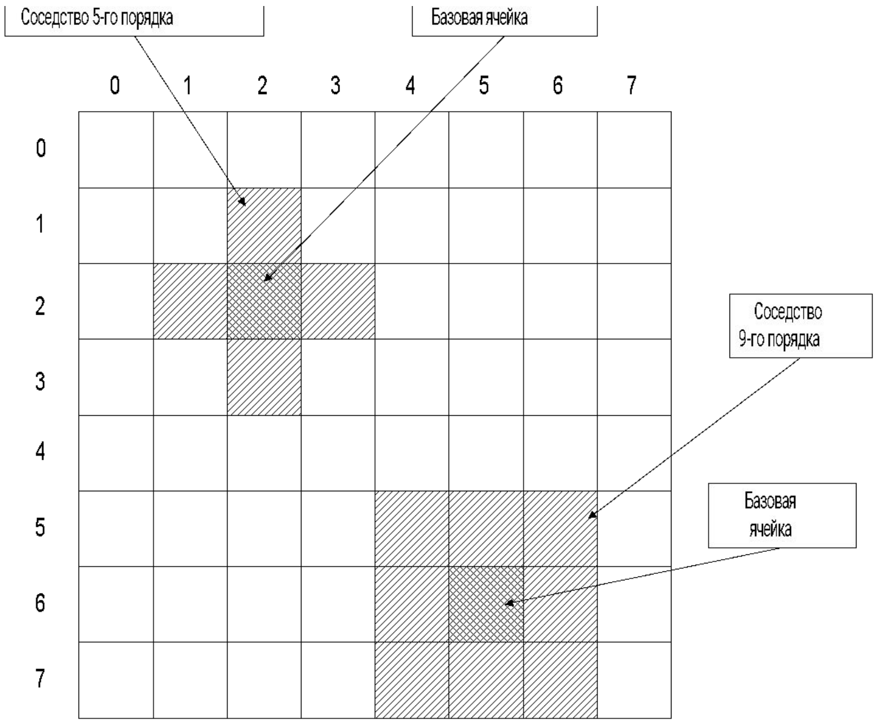
Применение эйлеровых графов

Эйлеровы графы применяются в задачах:

- **доставки** (товаров, почты, услуг), где требуется определить маршрут, проходящий один раз по каждой из улиц. Задача состоит в нахождении пути, минимизирующего общую длину, время или стоимость;
- **инспектирования распределенных систем**, где необходима проверка электрических, телефонных, железнодорожных, других линий;
- **коммунального хозяйства** и планирования;
- **теории игр** и в головоломках;
- **компьютерной инженерии и управления**

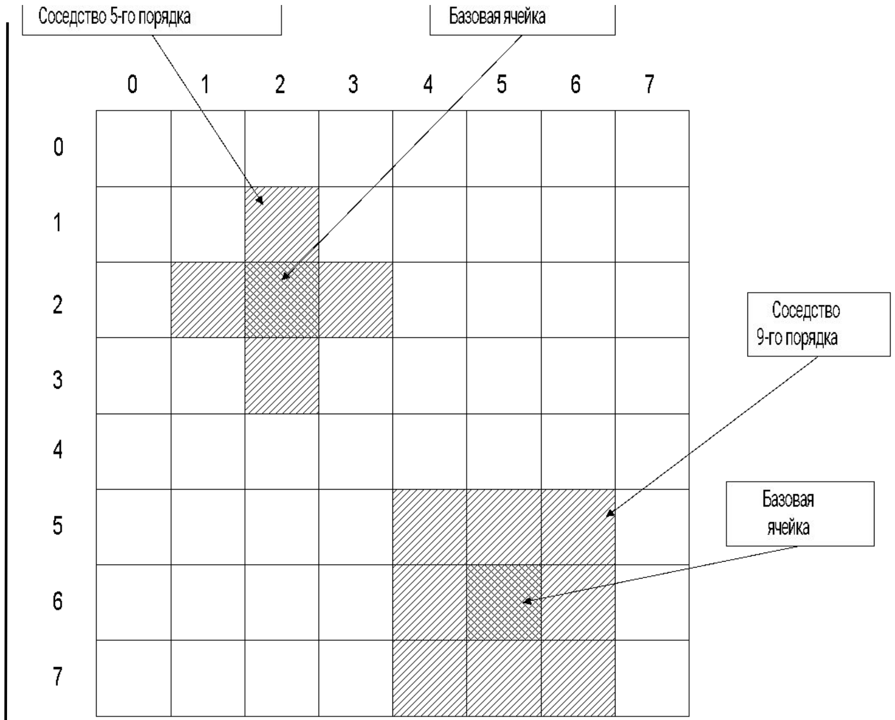
Применение эйлеровых графов в задачах КИУ: методы обнаружения отказов в соседствах взаимодействующих ячеек

- Определение негативного влияния соседних ячеек памяти на запоминание информации в тестируемой ячейке осуществляется путем построения графовой модели и решения на ней **задачи построения эйлерова цикла**
- **Базовая** запоминающая ячейка
- **Соседство взаимодействующих ячеек пятого порядка**
- **Соседство взаимодействующих ячеек девятого порядка**
- Смежные ячейки
- Будем рассматривать два типа смежных ячеек, расположенных **по кресту** и **по квадрату** относительно базовой



Применение эйлеровых графов в задачах КИУ (компьютерной инженерии и управления)

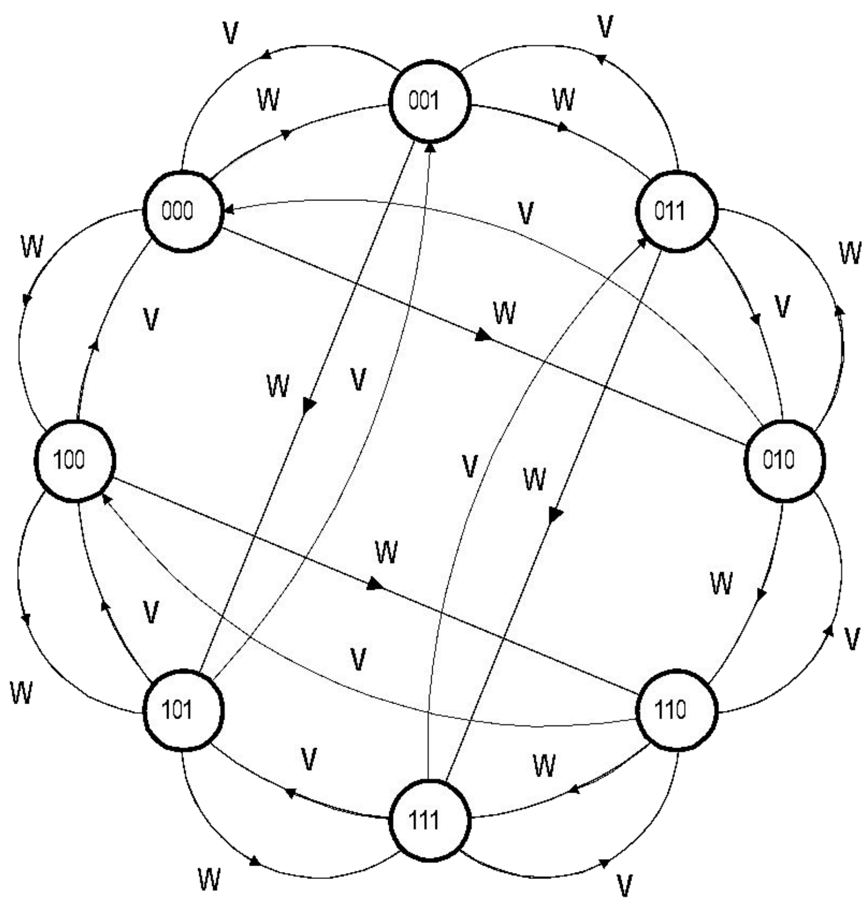
- **Смежные образцы** – комбинации состояний смежных ячеек
- Рассматриваются смежные образцы для соседства взаимодействующих ячеек 5-го и 9-го порядков
- Пассивные смежные образцы (ПСО)
- Активные смежные образцы (АСО)



Соседства взаимодействующих ячеек 5-го и 9-го порядков

Эйлеров обход двоичного куба. 1

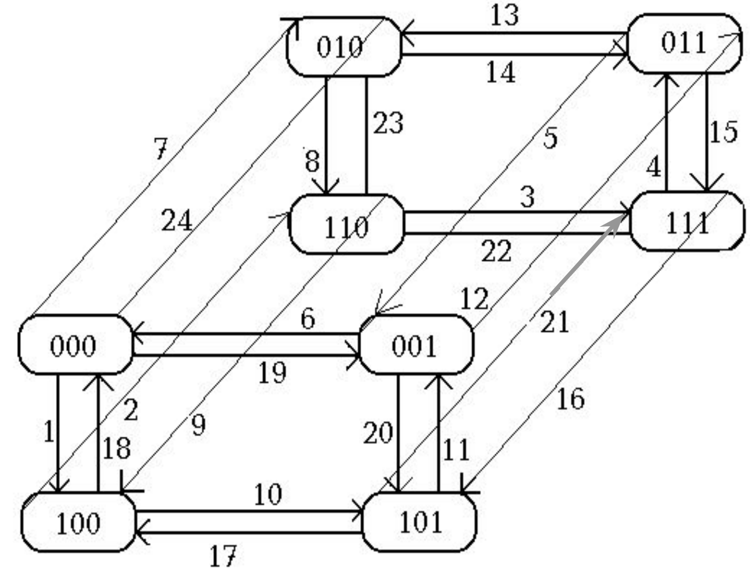
Все АСО и ПСО можно сформировать при помощи графа, дуги которого соединяют состояния запоминающих ячеек, различающиеся только в одной позиции. Формирование всех АСО и ПСО эквивалентно нахождению контура графа, в котором каждая дуга встречается только один раз. Такие контуры называются **эйлеровыми**.

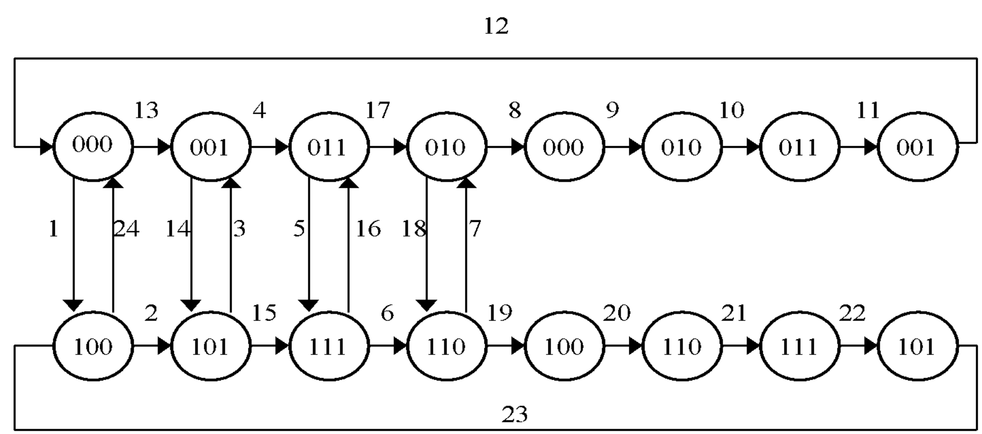


Направленный граф для трех запоминающих ячеек

Эйлеров обход двоичного куба. 2

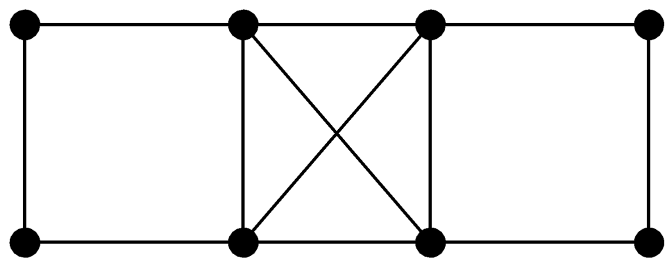
№ набора	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	0	0	1
7	0	0	0	1	0	1	1	0



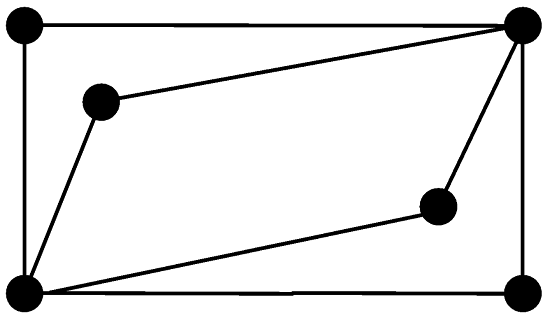


Гамильтоновы циклы в графах

- Граф называется **гамильтоновым**, если он имеет гамильтонов цикл
- **Цикл** называется **гамильтоновым**, если он содержит каждую вершину только один раз, при этом не обязательно все ребра графа должны включаться в обход



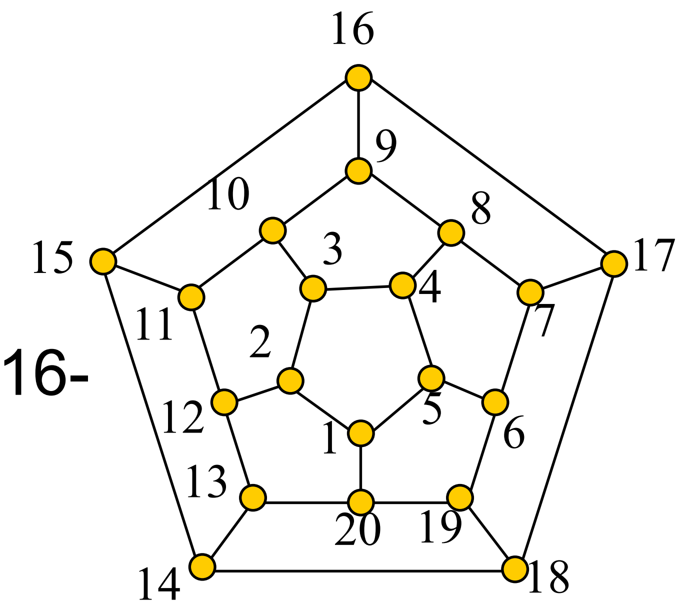
Гамильтонов граф



Негамильтонов граф

Историческая справка

- Понятие гамильтонова цикла впервые появилось в связи с задачей о кругосветном путешествии, которую рассматривал Уильям Гамильтон: обойти все вершины графа − столицы различных стран − по одному разу и вернуться в исходный пункт
- Для 20 государств задача представляет обход всех вершин додекаэдра
- 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-1



Методы определения гамильтоновых циклов: метод перебора Робертса и Флореса. 1

- Для графа **G=<V,U>** составляется матрица переходов **$M=||m_{ij}||$** размера **k×n**:

$k=\max \deg^{-} v_i$, $v_i \in V$, $n=|V|$

m_{ij} – i-я вершина v_q, если в графе существует дуга из вершины v_i в вершину v_q. Вершины можно упорядочить произвольно, образовав элементы j-го столбца матрицы M.

- К составляемой гамильтоновой цепи добавляется первая вершина в столбце v_1 (например, вершина a). Затем к цепи добавляется первая возможная вершина (например, **b**) в столбце **a**, затем **c** – в столбце **b** и т.д.
- Под возможной понимается вершина, еще не принадлежащая гамильтоновой цепи **S**, добавление которой не приводит к преждевременному замыканию цикла.

Метод перебора Робертса и Флореса. 2

- На r-м шаге имеем **$S=\{ v_1, a, b, c, \ldots , v_{r-1}, v_r \}$**. Существуют две причины, препятствующие включению очередной вершины:

1. В столбце **v_r** нет возможной вершины;
2. Цепь, определяемая множеством **S**, имеет длину **n-1**, т. е. является гамильтоновой, тогда
   а) в графе существует замыкающая дуга **(v_r,v_1)**, следовательно, найден гамильтонов цикл;
   б) в графе не существует замыкающей дуги **(v_r,v_1)**, следовательно, гамильтонов цикл не может быть получен.

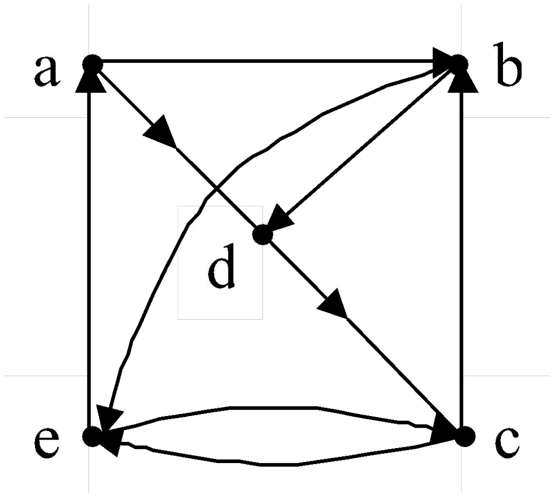
   В случаях 1 и 2б) следует предпринять возвращение.
   Гамильтоновы циклы, найденные к этому моменту, являются всеми гамильтоновыми циклами в графе

Пример реализации метода перебора

- Для графа G=<V,U> составляется матрица переходов M

$$M = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & b & d & b & c & a \\ 2 & d & e & e & - & c \end{array}$$

- По матрице переходов строятся гамильтоновы цепи из вершины a



a b d c e a

a d c b e a

Применение гамильтоновых графов. Связь с задачей коммивояжера

- Задача о нахождении гамильтонова цикла на взвешенном графе известна как задача коммивояжера

Приложения:

- задачи упорядочивания или планирования операций;
- составление расписаний;
- выполнение операций на ЭВМ;
- проектирование электрических и компьютерных сетей;
- управление автоматизированными линиями;
- тестирование ОЗУ и распределенной памяти;
- синтез тестов проверки цифровых систем;
- диагностирование неисправностей вычислительных систем и сетей

Сравнительный анализ и связь эйлеровых и гамильтоновых графов

Эйлеровы графы

- Определены необходимые и достаточные условия существования эйлеровых циклов
- Существуют эффективные алгоритмы отыскания эйлеровых циклов
- Эйлеровы графы встречаются редко
- Эйлеровы графы менее востребованы

Гамильтоновы графы

- Критерии не известны, но достаточные условия существуют
- Алгоритмы поиска гамильтонова цикла в графе достаточно трудоемки
- Почти все графы, встречающиеся в теории и практике, гамильтоновы
- Гамильтоновы графы более востребованы на практике