§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции $f(x)$ найти $f'(x)$.

Обратная задача: известна $f'(x)$, требуется найти $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$ определены на $X \subseteq \mathbb{R}$.*

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на X и $\forall x \in X$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x) .$$

ПРИМЕРЫ.

1) $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, т.к.

$$(\sin x)' = \cos x , \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

2) $F(x) = \ln|x|$ – первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем точки $x = 0$, т.к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

ВОПРОСЫ:

1) для любой ли функции существует первообразная;
2) если функция имеет первообразную, то будет ли она единственной?

ТЕОРЕМА 1 (о связи первообразных).

Пусть $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на* X.
Функция $\Phi(x)$ *будет первообразной для* $f(x)$ *на* X $\Leftrightarrow$ *функции* $\Phi(x)$ *и* $F(x)$ *на* X *связаны равенством*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C *– некоторое число.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество всех первообразных функции* $f(x)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(x)$ *и обозначают символом*

$$\int f(x)dx$$

Называют:

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

символ $\int$ – знак интеграла.

По определению и теореме 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием функции*** $f(x)$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке первообразную.

Замечание.

Производная от элементарной функции всегда является функцией элементарной.

Первообразная от элементарной функции может не быть функцией элементарной.

Интегралы от таких функций называются ***неберущимися***.

Неберущимися являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Замечание.

Неопределенный интеграл – множество функций. Свойство 1 утверждает, что производная каждой из них равна $f(x)$.
$\Rightarrow$ правильность интегрирования всегда можно проверить: достаточно продифференцировать результат. При этом должна получиться подынтегральная функция.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Замечание.

Имеем: $F'(x) \cdot dx = dF(x)$.

$\Rightarrow$ Подынтегральное выражение является реальным произведением – дифференциалом первообразной функции $F(x)$.

$\Rightarrow$ свойство 2 можно записать в виде

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

4. Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***непрерывно дифференцируемой*** *на промежутке* $X \subseteq \mathbb{R}$, *если* $f(x)$ *дифференцируема на* X, *причем ее производная* $f'(x)$ – *непрерывна на* X.

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной под знаком интеграла).
Пусть $\phi: T \to X$ *и* $x = \phi(t)$ – *непрерывно дифференцируема на* T, $f: X \to Y$ и $y = f(x)$ *непрерывна на* X.
Тогда функции $f(x)$ и $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ *интегрируемы на* X *и* T *соответственно, причем, если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Внесение функции под знак дифференциала – частный случай подстановки

СЛЕДСТВИЕ 4 теоремы 3 (об инвариантности формул интегрирования).

Любая формула интегрирования остается справедливой, если везде заменить переменную на непрерывно дифференцируемую функцию, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \phi(x)$ *– любая непрерывно дифференцируемая функция*

Например, так как

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

то

$$\int \cos(x^2+1)d(x^2+1) = \sin(x^2+1) + C,$$

$$\int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x + C$$

Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 5.
Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $X \subseteq \mathbb{R}$ *. Тогда на* X *существуют интегралы*

$$\int u dv \qquad \text{и} \qquad \int v du$$

и справедливо равенство

(1) $$\int u dv = uv - \int v du \,.$$

Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям***.

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

I. (циклический)

$$\int p_n(x)a^x dx$$

$$\int p_n(x)\cos xdx$$

$$\int p_n(x)\sin xdx$$

$$\int \underbrace{p_n(x)}_{U}\underbrace{e^x dx}_{dV}$$

II.

$$\int \ln x \cdot P_n(x)dx$$

$$\int arctgx \cdot P_n(x)dx$$

$$\int \underbrace{\arcsin x}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x)dx}_{dV}$$

III.

$$\int a^{mx}\cos nx\,dx$$

$$\int \underbrace{a^{mx}}_{U=a^{mx}}\underbrace{\sin nx\,dx}_{dV}$$