

Военно-инженерный институт

**Дисциплина
«РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ»**

Часть 1. Теоретические основы радиолокации

Лекция №7

ОБНАРУЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ С ИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

Раскрыть содержание алгоритма оптимального обнаружения сигналов с полнотью известными параметрами, структуру соответствующих устройств и методику оценки качества обнаружения этих сигналов.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ

1. Отношение правдоподобия и алгоритм одноканального обнаружения сигнала с известными параметрами на фоне квазибелого шума.
2. Оценка качества обнаружения.

3

1. Отношение правдоподобия и алгоритм одноканального обнаружения сигнала с известными параметрами на фоне квазибелого шума

$$\hat{A}_{\text{опт}}[y(t)] = \begin{cases} 1 & \text{при} \\ 0 & \text{при} \end{cases} \quad \begin{cases} l[y(t)] \geq l_0, \\ l[y(t)] < l_0. \end{cases} \quad l[y(t)] = \frac{P_{\text{сп}}[y(t)]}{P_{\text{п}}[y(t)]}.$$

Полагая, что спектры сигнала и помехи ограничены сверху частотой $f_{\text{макс}}$, непрерывную реализацию входного сигнала $y(t)$ в соответствии с теоремой Котельникова можно представить совокупностью дискретных значений $y_k(t_k)$, следующих через интервалы $\Delta t = 1/2\Delta f_{\text{макс}}$. Это позволяет свести различные реализации функции $y(t)$ к многомерным случайным величинам $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$$P_{\text{п}}(Y) = P_{\text{п}}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$P_{\text{с}}(Y) = P_{\text{с}}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n),$$

где $x_k, (k = \overline{1, n})$ - дискретные значения сигнала.

4

$$l[Y] = \frac{P_n(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)}{P_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

Отношение правдоподобия для сигнала с полностью известными параметрами

Из некоррелированности отдельных дискрет помехи между собой следует, что

$$P_{\Pi}(Y) = P_{\Pi}(y_1) \cdot P_{\Pi}(y_2) \cdot \dots \cdot P_{\Pi}(y_n).$$

$$P_n(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N_{\text{макс}} f} e^{-\frac{y_k^2}{2N_{\text{макс}} f}} = \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi \cdot N_0}} e^{-\frac{y_k^2 \cdot \Delta t}{\sigma_{\Pi}^2}} \quad (1)$$

$\sigma_{\Pi}^2 = N_0 f_{\text{макс}}$

$$P_{\text{сп}}(y_k) = \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi \cdot N_0}} e^{-\frac{(y_k - x_k)^2 \cdot \Delta t}{N_0}}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k x_k^2 \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt =$$

$$l(Y) = \frac{P_{\text{сп}}(Y)}{P_{\Pi}(Y)} = e^{-\frac{1}{N_0} \sum_k x_k^2 \Delta t} \cdot e^{\frac{2}{N_0} \sum_k x_k y_k \Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k x_k y_k \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = Z, \quad (3)$$

5

$$l[y(t)] = e^{-\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0} Z[y(t)]} \quad (4)$$

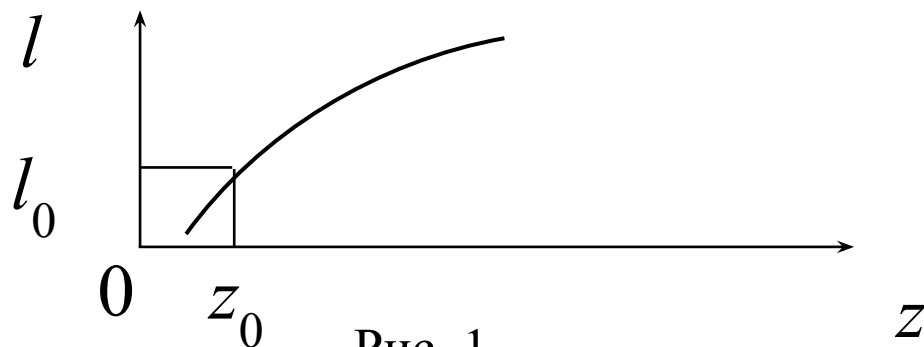
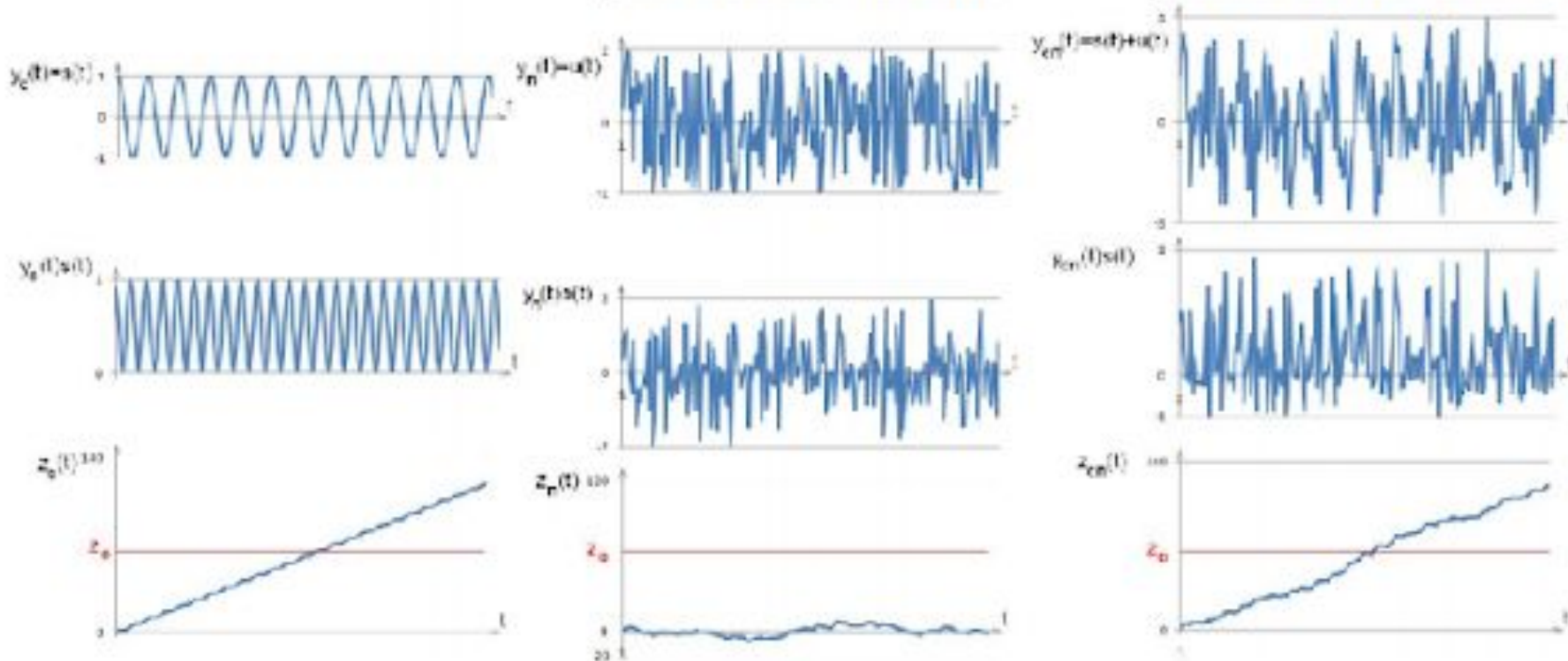


Рис. 1.

Из монотонности связи $l[y(t)]$ и $Z[y(t)]$ следует, что сравнение $l[y(t)]$ с порогом l_0 эквивалентно сравнению $Z[y(t)]$ с порогом Z_0 . Значение этого порога может быть получено путем логарифмирования (4) при условии $l[y(t)] = l_0$:

$$\ln l_0 = \ln \left[e^{-\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0} Z_0} \right] = -\frac{\mathcal{E}}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z_0 \quad Z_0 = \frac{N_0}{2} \ln l_0 + \frac{1}{2}$$

$$\hat{A}_{\text{опт}} [y(t)] = \begin{cases} \text{при} & Z[y(t)] \geq Z_0, \\ \text{при} & Z[y(t)] < Z_0. \end{cases}$$

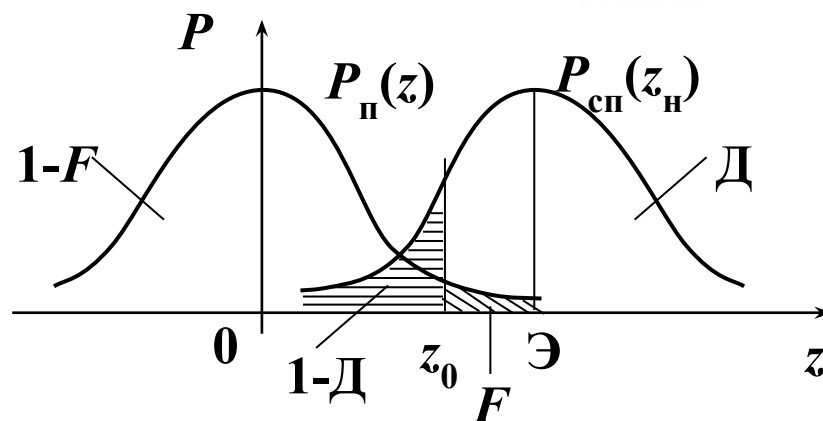


а) для сигнала без помех

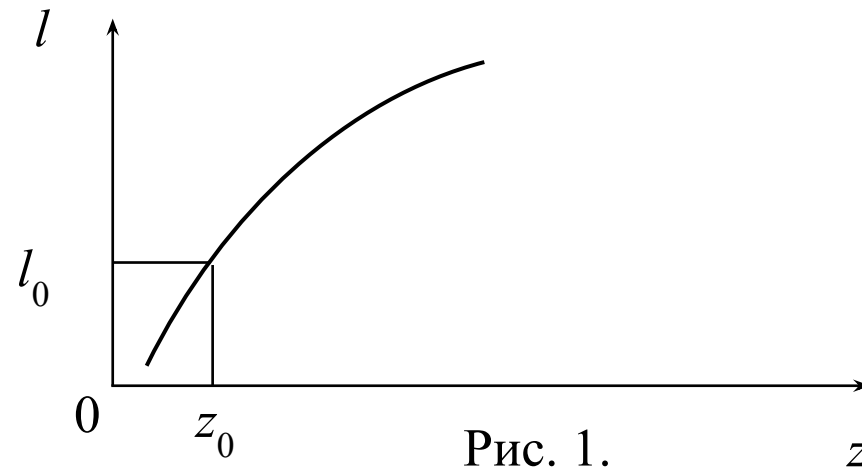
б) для помехи

в) для смеси помехи и сигнала

Иллюстрация формирования корреляционного интеграла Z от времени t



6 Анализ (4) показывает, что для сигнала с полностью известными параметрами отношение правдоподобия является монотонной функцией корреляционного интеграла $Z[y(t)]$ (рис. 1).



Из монотонности связи $l[y(t)]$ и $Z[y(t)]$ следует, что сравнение $l[y(t)]$ с порогом l_0 эквивалентно сравнению $Z[y(t)]$ с порогом Z_0 . Значение этого порога может быть получено путем логарифмирования (4) при условии $l[y(t)] = l_0$:

$$Z_0 = \frac{N_0}{2} \ln l_0 + \frac{1}{2}$$

Таким образом,

алгоритм обнаружения заключается в определении по наблюдаемой реализации $y(t)$ корреляционного интеграла $Z[y(t)]$ и сравнении его с порогом.

7

Структурная схема простейшего по принципу действия обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами представлена на рис.2. Она состоит из умножителя, интегратора и порогового устройства (ограничителя по минимуму). На умножитель подается опорное колебание $x(t)$, соответствующее ожидаемому сигналу, и принятый сигнал $y(t)$. Непосредственное интегрирование произведения $x(t) \cdot y(t)$ дает корреляционный интеграл. Такой обнаружитель называется корреляционным. Величина корреляционного интеграла сравнивается с порогом z_0 порогового устройства. Опорное колебание $x(t)$ может вырабатываться специальным гетеродином в зависимости, например, от установленного времени запаздывания t_3 , пропорционального дальности до цели. Опорный сигнал может получаться также непосредственно от передатчика радиолокатора через линию задержки на время t_3 . В общем случае зависимость $x(t)$ от t_3 обозначим как $x(t, \alpha)$, т.е. $\alpha = t_3$.

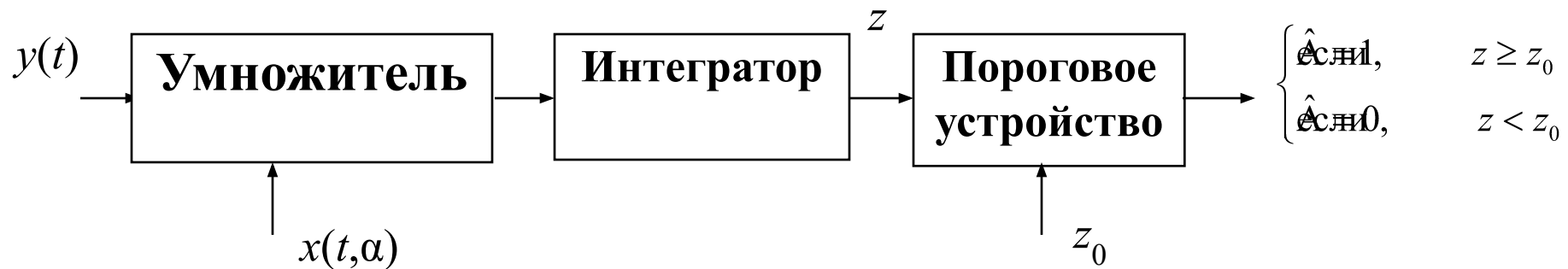


Рис. 2.

ВЫВОД

Обнаружитель когерентных сигналов с известными параметрами должен по наблюдаемой реализации вычислять интеграл и сравнивать его с порогом. Сигнал, подаваемый на умножитель обнаружителя должен соответствовать ожидаемому сигналу и подаваться в схему с учетом времени поступления отраженного от цели сигнала.

Определим статистические характеристики корреляционного интеграла

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot x(t) dt$$

Полагаем, что шум $n(t)$ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием

$$M[n(t)] = \bar{n}(t) = 0.$$

При $y(t) = n(t)$ получим

$$M[z] = \int_{-\infty}^{\infty} M[n(t)]x(t) dt = 0.$$

При наличии сигнала $y(t) = x(t) + n(t)$

$$M[z] = \int_{-\infty}^{\infty} \{M[n(t)]x(t) + x^2(t)\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot M[n(t)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt =$$

где \mathcal{E} - энергия сигнала.

1
0
Дисперсия Z одинакова в отсутствие и при наличии сигнала и

равна

$$M \left[(z - M(z))^2 \right] = M \left[z^2 \right] = M \left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t)x(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)x(\tau) d\tau \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[n(t)n(\tau) \right] x(t)x(\tau) dt d\tau$$

Корреляционная функция «белого» шума

$$M \left[n(t)n(\tau) \right] = \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau),$$

где N_0 - спектральная плотность шума.

Учитывая фильтрующее свойство дельта-функции, находим

$$M \left[z^2 \right] = \frac{N_0 \mathcal{E}}{2} = \sigma_0^2.$$

Поскольку величина Z является линейной комбинацией входных величин $n(t)$ и $x(t)$, то она также распределена по нормальному закону.

Тогда, если принимается только шум, то $P_{\Pi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_0^2}}.$

Одно из важных свойств дельта-функции – так называемое *фильтрующее свойство* – состоит в том, что если дельта-функция присутствует под интегралом в качестве множителя, то результат интегрирования будет равен значению остального подынтегрального выражения в той точке, где сосредоточен дельта-импульс:

Если значение t_0 не попадает в интервал интегрирования, интеграл равен нулю.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

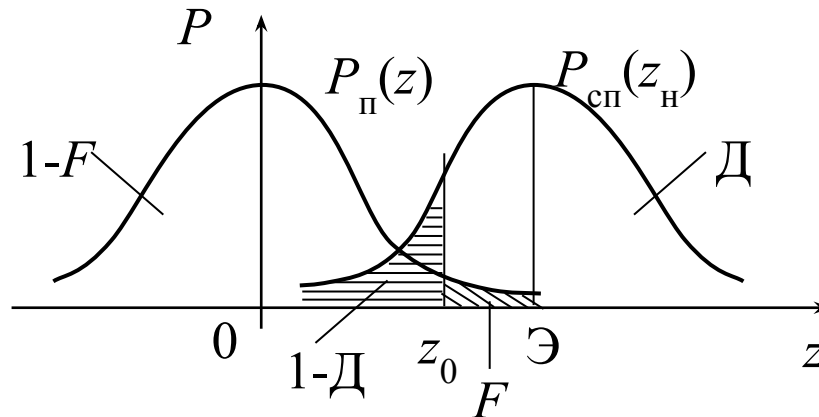
1 Если на входе есть и сигнал, и шум, то получаем распределение с средним $\bar{z} = \Theta$

$$P_{\text{СП}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \nu_0} e^{-\frac{(z-\Theta)^2}{2\nu_0^2}}.$$

Кривая $P_{\text{СП}}(z) = P_{\text{П}}(z-\Theta)$ представляет собой сдвинутую на величину Θ кривую $P_{\text{П}}(z)$.

Показатели качества обнаружения РЛ сигнала определяются следующими выражениями:

$$D = \int_{z_0}^{\infty} P_{\text{СП}}(z) dz; \quad F = \int_{z_0}^{\infty} P_{\text{П}}(z) dz. \quad (5)$$



$$P_{\Pi} \left(z_{\text{H}} = \frac{z}{v_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} e^{-\frac{z_{\text{H}}^2}{2}}; \quad (6)$$

$$P_{\alpha} \left(z_{\text{H}} = \frac{z}{v_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} e^{-\frac{(z_{\text{H}}-q)^2}{2}},$$

Вводя нормированное значение корреляционного интеграла $z_{\text{H}} = z/v_0$ и учитывая, что $D[z_{\text{H}}] = 1$, получим

где $q = \frac{\mathfrak{E}}{v_0} = \sqrt{\frac{2\mathfrak{E}}{N_0}}$ - параметр обнаружения сигнала (отношение сигнал/шум на выходе схемы оптимальной обработки).

Подставляя соотношения (6) в (5), приходим к равенствам

$$D = \int_{q_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} e^{-\frac{(z_{\text{H}}-q)^2}{2}} dz_{\text{H}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(q - q_0); \quad (7)$$

$$F = \int_{q_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} e^{-\frac{(z_{\text{H}})^2}{2}} dz_{\text{H}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi(q_0), \quad (8)$$

где $q_0 = z_0/v_0$ - нормированный уровень порога;

1
3

$$\Phi(U) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^U e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad - \text{интеграл вероятности.}$$

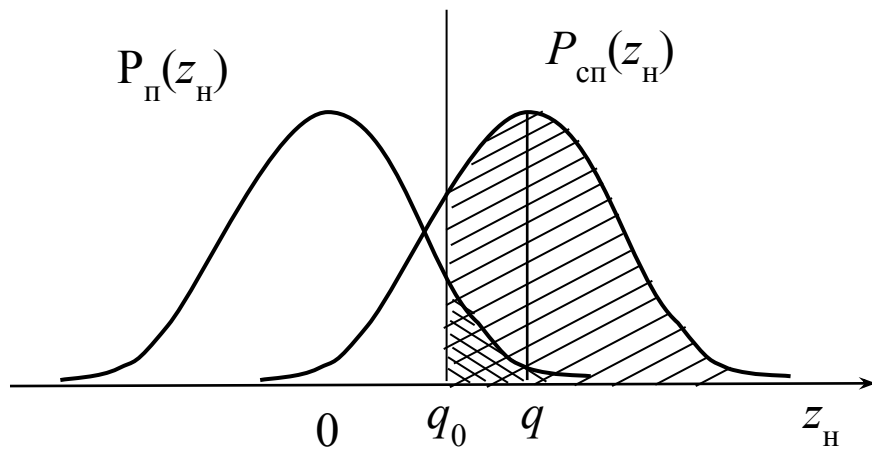
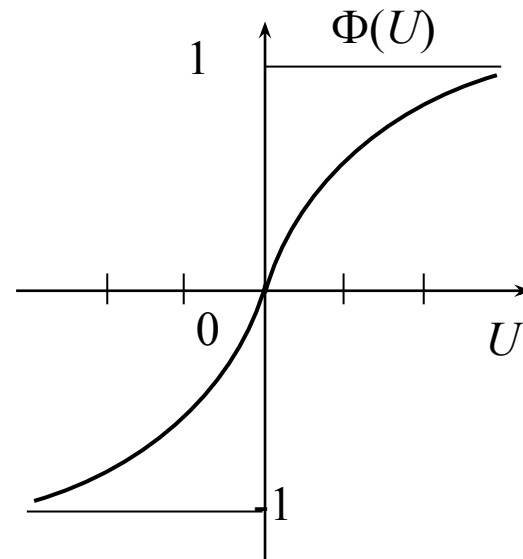
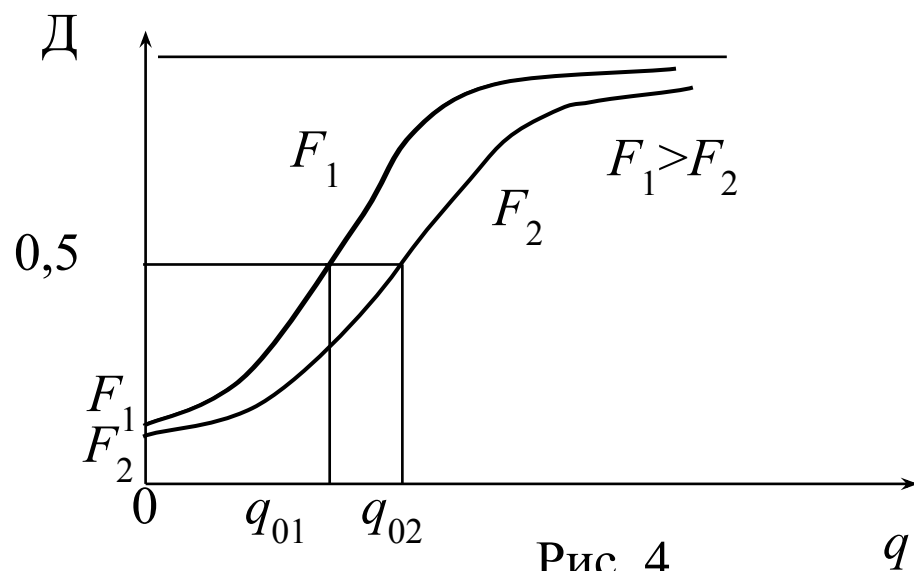


Рис. 3.



Из уравнения (8) следует, что условная вероятность ложной тревоги определяется только величиной порога q_0 . Функция $D(q)$ при $F = \text{const}$ определяет кривые обнаружения сигнала (рис. 4).



Задавая F по соотношению (8), определяем q_0 , а затем, зная q_0 , с помощью (7) строим графики $D(q)$. Из приведенных на рис. 4 кривых следует, что для обеспечения одной и той же D при меньшем F нужна большая энергия сигнала.

Заключительная часть

1. Оптимальный обнаружитель должен вычислять корреляционный интеграл и сравнивать с порогом.
2. Качество обнаружения сигналов не зависит от их формы и определяется энергетическим отношением сигнал/шум.

Задание на самостоятельную подготовку:

Отработать материал лекции в соответствии с рекомендованной литературой.

Л 1/о с. 134-140;

Л 1/д с. 97-104;

Д 2/д с. 126-130.