Перпендикулярность прямой и плоскости

Учебник Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.
«Геометрия 10» § 9

Перпендикулярность прямой и плоскости

Опр. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º.

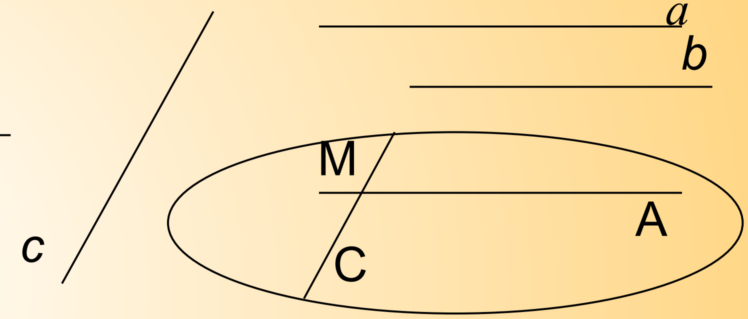
$$\left(a\hat{;}b\right) = 90^0$$

$$a \perp b$$

$$a \cap b = O \qquad a \dot{-} b$$

Лемма Если одна из 2-х параллельных прямых, перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

$$\frac{a \parallel b \quad a \perp c}{b \perp c}$$



<u>**Доказательство**</u>

$$1. M, M \notin a, M \notin b, M \notin c$$

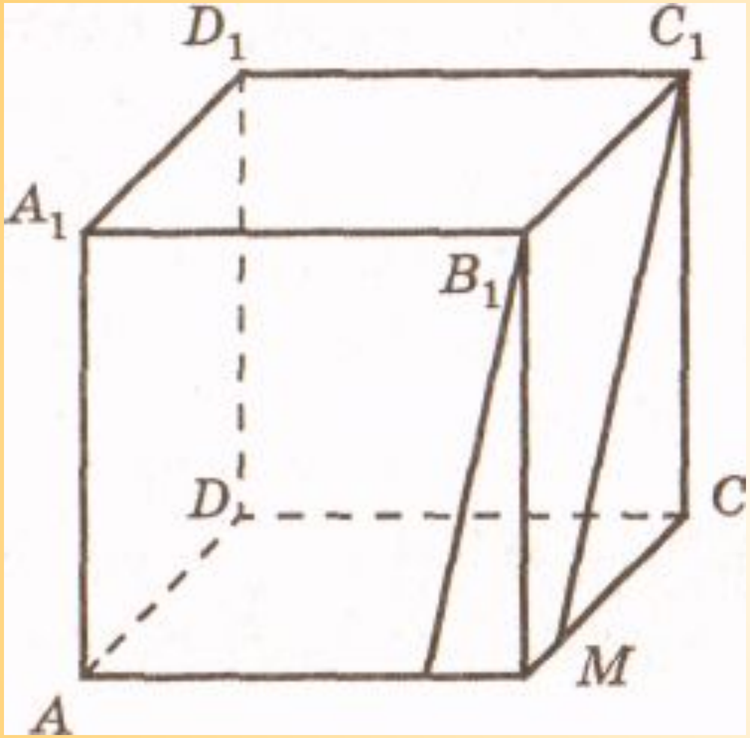
$$2. MA \parallel a, MC \parallel c$$

$$a \perp c \Rightarrow \angle AMC = 90^0$$

$$3. a \parallel MA$$

Задача №1

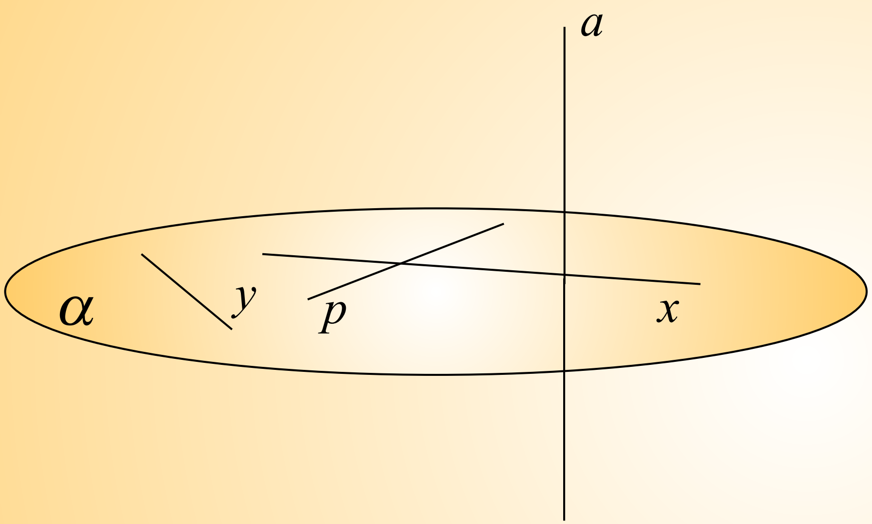
Дано: $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – параллелепипед,
$\angle ДАВ=90^0$, $\angle AA_1B_1=90^0$,
$\angle A_1Д_1Д=90^0$



Доказать:
1) $AA_1 \perp BC$;
2) $AB \perp BC$;
3) $CД \perp A_1Д_1$;
4) $BC \perp ДД_1$.

Прямая перпендикулярная плоскости

Опр. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна к ***<u>любой</u>*** прямой, лежащей в этой плоскости.

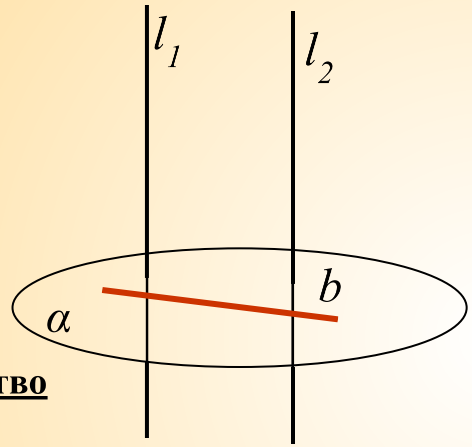


Утверждение: Если прямая перпендикулярна плоскости, то она её пересекает.

Теоремы о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Th 14 Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая, перпендикулярна этой плоскости.

$$\frac{\begin{array}{c} l_1 \parallel l_2 \\ l_1 \perp \alpha \end{array}}{l_2 \perp \alpha}$$

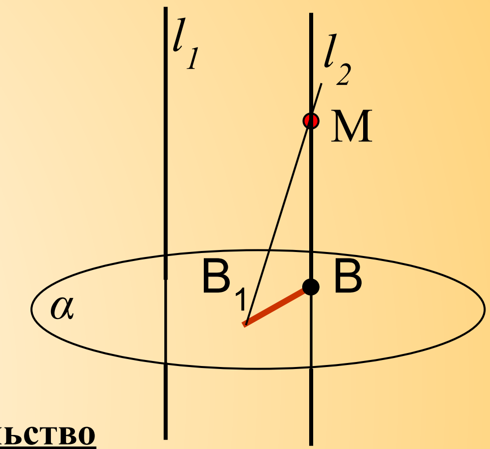


<u>Доказательство</u>

$$l_1 \perp \alpha \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 \perp b \\ l_1 \parallel l_2 \end{array}\right| \Rightarrow l_2 \perp b \Rightarrow l_2 \perp \alpha$$

Th 15 Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

$$\frac{\begin{array}{c} l_1 \perp \alpha_2 \\ l_2 \perp \alpha \end{array}}{l_1 \parallel l_2}$$



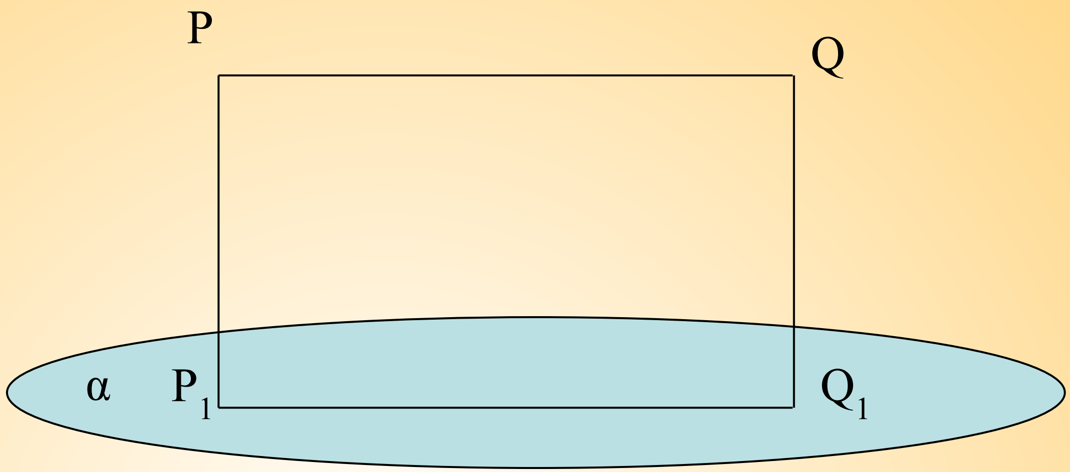
<u>Доказательство</u>

1. $M \in l_2$
2. $MB_1 \parallel l_1 \Rightarrow MB_1 \perp \alpha$
3. $MB_1 \perp BB_1$

   $MB \perp BB_1$ (следует из определения)

Задача №2

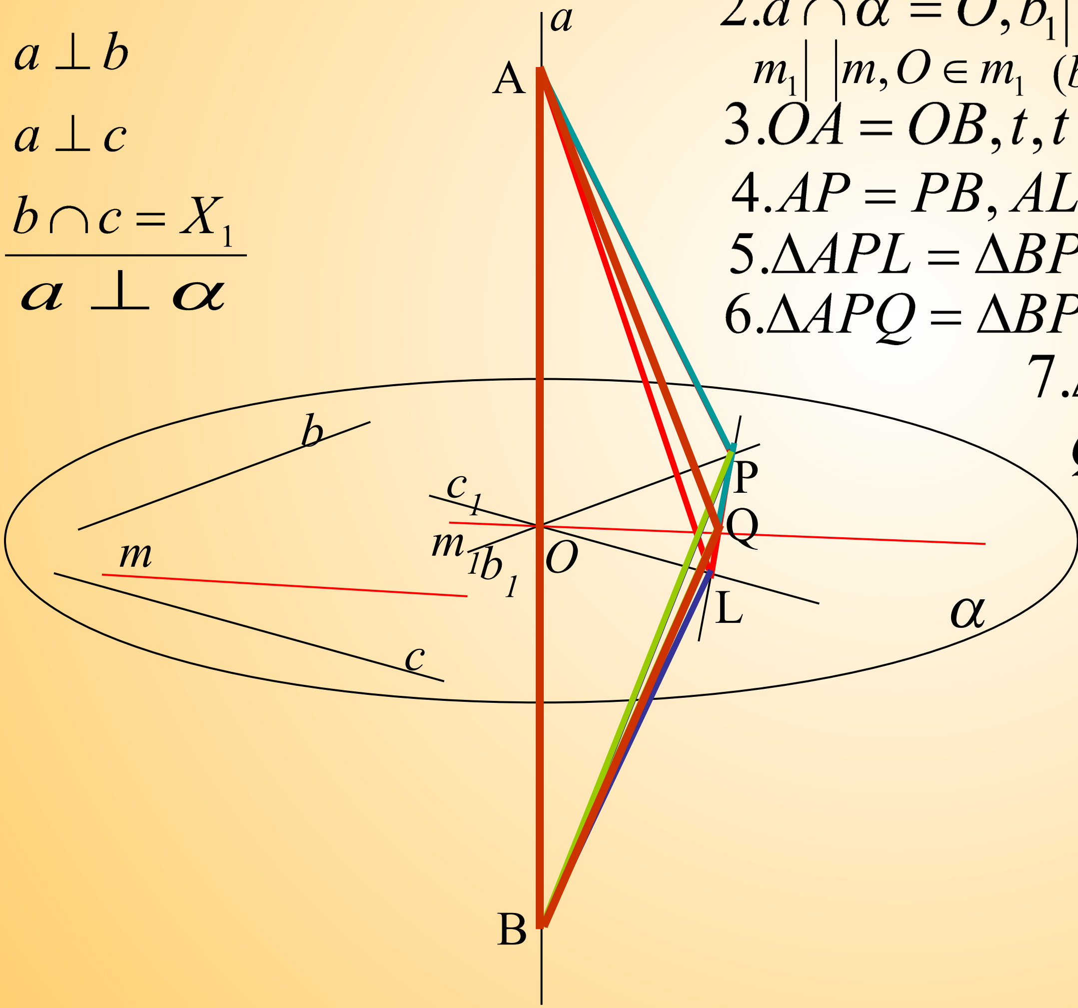
$$\frac{PQ \parallel \alpha \quad PP_1 \perp \alpha \quad QQ_1 \perp \alpha}{PQ = P_1Q_1}$$



Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Th 13 Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

$$\begin{array}{l} b \subset \alpha \\ c \subset \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \\ b \cap c = X_1 \\ \hline a \perp \alpha \end{array}$$



Доказательство

$1.\, m - произвольно, m \subset \alpha$

$2.\, a \cap \alpha = O, b_1 \parallel b, c_1 \parallel c, O \in b_1, O \in c_1$

$m_1 \parallel m, O \in m_1 \;\; (b_1 \parallel b, b \perp a \Rightarrow b_1 \perp a)$

$3.\, OA = OB, t, t \cap b_1 = P, t \cap c_1 = L, t \cap m_1 = Q$

$4.\, AP = PB, AL = LB$

$5.\, \Delta APL = \Delta BPL \Rightarrow \angle APL = \angle BPL$

$6.\, \Delta APQ = \Delta BPQ \Rightarrow AQ = BQ$

$7.\, \Delta AQB - равнобедренный$

$QO - медиана \Rightarrow QO - высота$

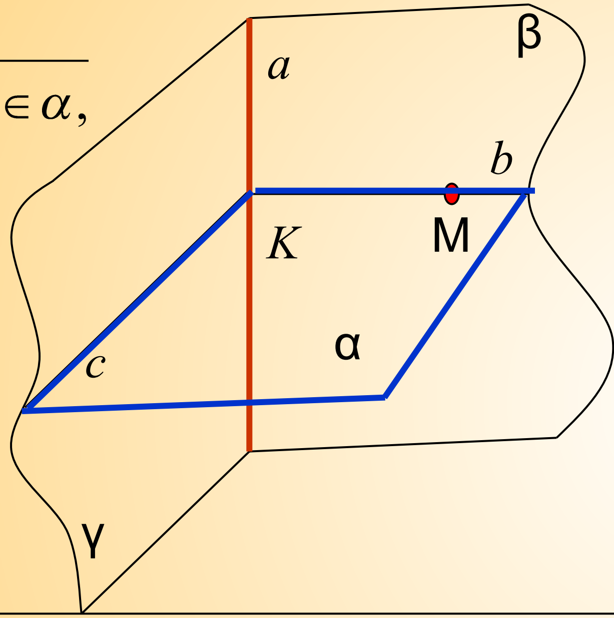
$m_1 \perp a$

$$8.\, \left.\begin{array}{l} m_1 \parallel m \\ m_1 \perp a \end{array}\right| \Rightarrow m \perp a \xrightarrow{o} a \perp \alpha$$

Построения

I. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной прямой и притом только одну.

$$\frac{a, M}{\exists! \alpha, M \in \alpha,\ a \perp \alpha}$$



Построение

$I. M \notin a$

$1. \beta : M \in \beta, a \subset \beta$

$b \perp a, M \in b, b \cap a = K$

$2. \gamma : a \subset \gamma, \gamma \neq \beta$

$c \perp a, K \in c$

$3. \alpha : b \subset \alpha, c \subset \alpha, b \cap c = K$

$4. a \perp \alpha (по\_признаку)$

Единственность

$5. \exists \delta, a \subset \delta, M \in \delta,$ $\Rightarrow \delta \cap \beta = b_1$

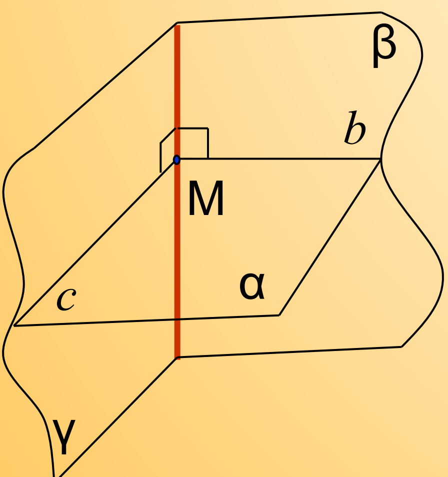
$\delta \perp a$ (т.к. M –их общая точка)

$b_1 \perp a (a \perp \delta, b_1 \subset \delta)$

$6. в\_плоскости\_\beta\_через\_точку\_M\_b_1 \perp a, b \perp a,$

$что\_невозможно.$

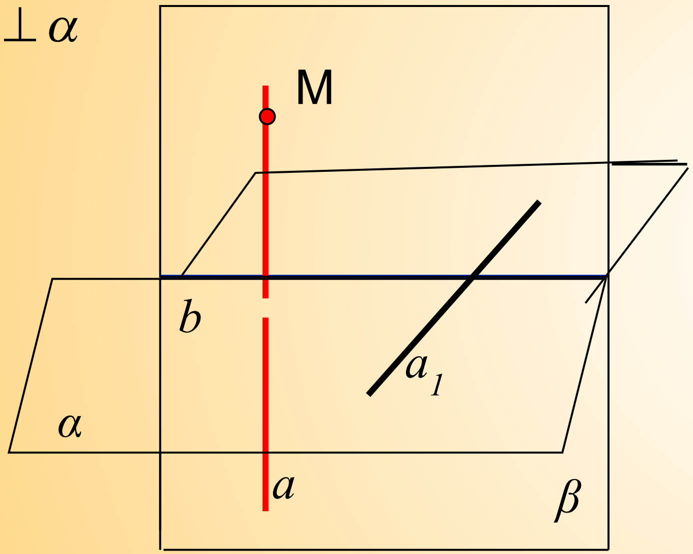
$II. M \in a$



Построения

II. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости и притом только одну.

$$\frac{\alpha, M}{\exists! a, M \in a, \; a \perp \alpha}$$



Построение

$I. M \notin a$

$1. a_1, a_1 \subset \alpha$

$2. \beta, M \in \beta, \beta \perp a_1$

$3. \beta \cap \alpha = b$

$4. a, M \in a, a \subset \beta, a \perp b$

$5. a \perp \alpha$ _(по _ признаку)

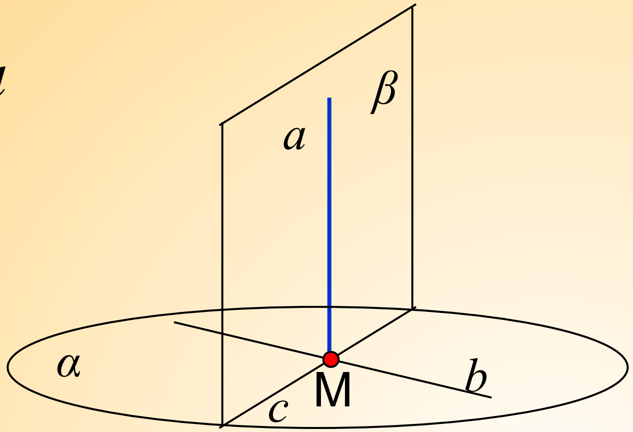
Единственность

$6. \exists c, c \perp \alpha, M \in c$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 7. c \perp \alpha \\ \quad a \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel c \\ \qquad a \cap c = M \end{array}\right| \Rightarrow a = c$$

Построения

$II. M \in a$



Построение

$1. b, b \subset \alpha, M \in b$

$2. \beta : M \in \beta, \beta \perp b$

$(по\_задаче\_№1)$

$\beta \cap \alpha = c, c \perp b$

$3. a, a \subset \beta, M \in a, a \perp c$

$4. a - искомая$

Единственность

Задача №1

ΔABC – равносторонний

ΔAB_1C_1

$BB_1 \perp AB_1C_1$

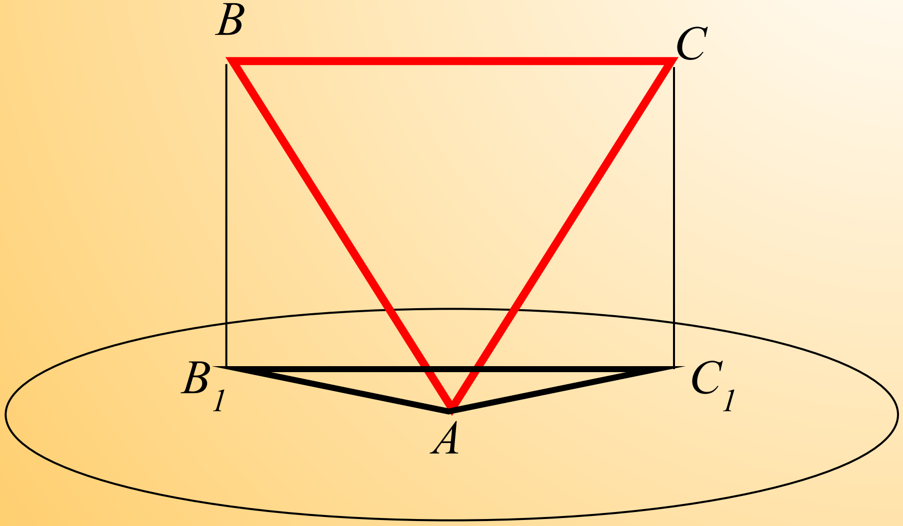
$CC_1 \perp AB_1C_1$

$B_1C_1 \subset \alpha$

$BB_1 = CC_1$

$\angle BAB_1 = 30^0$

$B_1C_1 - ?$



Задача №2

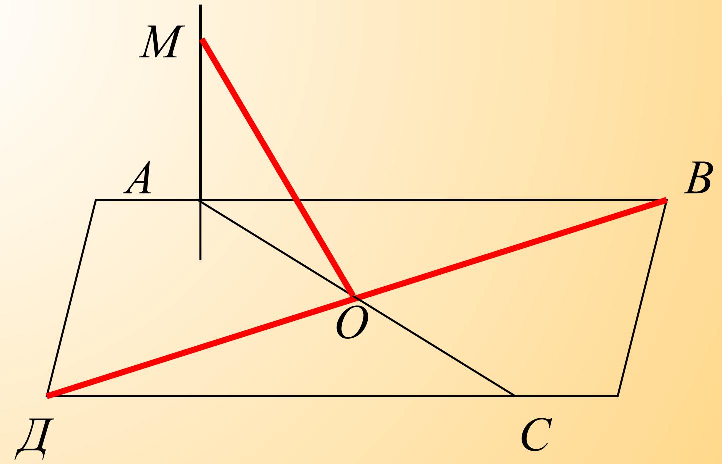
$АВСД$ – квадрат

$AC \cap BД = O$

$AM \perp ABC$

$1) BД \perp AMO$

$2) MO \perp BД$



<u>**Домашнее задание**</u>   **1. § 15 - 18 стр. 34 - 38,**
2. задачи 116, 119, 122, 123, 125.