Первообразная и неопределенный интеграл

Определение:

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Определение:

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C,}$$

где $F'(x) = f(x)$,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$\int$ – знак неопределенного интеграла,

$F(x) + C$ – множество всех первообразных,

C – постоянная интегрирования.

Замечание:

Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Равенство $\int \left(3x^2 + 4\right)dx = x^3 + 4x + C$ верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

Свойства неопределенного интеграла

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx\,, \quad a \neq 0$$

Таблица интегралов

1) $\int 0 dx = C, \quad C = const$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ В частности: $\int dx = x + C$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ В частности: $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

В частности: $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

В частности: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad a \neq 0$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенного интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Вычислить интеграл $\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx$

$$\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx=\int 2x^4dx+\int 3\sin x\,dx-\int 5e^x dx=$$

$$=2\cdot\int x^4dx+3\cdot\int\sin x\,dx-5\cdot\int e^x dx=2\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1}+3\cdot\left(-\cos x\right)-5\cdot e^x+C=$$

$$=\frac{2}{5}x^5-3\cos x-5e^x+C.$$

2. Правило поправочного коэффициента

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\ .}$$

Пример:

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3\cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

3. Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\boxed{\int u dv = uv - \int v du\ .}$

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$,

б) $\int x^n e^x dx$,

в) $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$,

г) $\int x^n \ln x dx$.

При вычислении интегралов

а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$,

в) и г) обозначают за u функцию $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, тогда $dv = x^n dx$.

Примеры:

$$1.\ \int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C\ .$$

$$2.\ \int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\ .$$

4. Метод замены переменной

$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$, где $x = \varphi(t)$, а t – новая переменная.

Пример:

$$\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}} = \left| \begin{array}{l} t = \sin 3x - 4 \\ dt = 3\cos 3x\, dx \\ \cos 3x\, dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^{1/5}} = \frac{1}{3}\frac{5}{4}t^{4/5} + C = \frac{5}{12}\sqrt[5]{(\sin 3x - 4)^4} + C.$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$, содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример:

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Преобразуем x^2+4x+5, выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем:

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 = \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1 = (x+2)^2+1.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Интегрирование рациональных функций

Пример:

$$\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right)}\,dx \boxed{=}$$

$$\frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right)} = \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$7x - x^2 - 4 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & -12 = A(-3)(-4) \Rightarrow A = -1 \\ x=2 & \quad 6 = B\cdot 3\cdot(-1) \Rightarrow B = -2 \\ x=3 & \qquad 8 = C\cdot 4\cdot 1 \Rightarrow C = 2 \end{array}$$

$$\boxed{=} - \int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{x-3} = -\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

Пример:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2} 2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt \boxed{=}$$

$$2\int \frac{tdt}{1+t^2} = \left| \begin{matrix} z = 1+t^2 \\ dz = 2tdt \end{matrix} \right| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \ln|z| = \ln(t^2+1) + C;$$

$$2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C;$$

$$\boxed{=} \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Интегрирование функций, с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Пример:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{3t^2 + 6t - 1} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \dfrac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}t + \sqrt{3} + 2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \sqrt{3} + 2}\right| + C.$$