Лекция 13

Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом.

Переход от изображений к оригиналам.

Формула разложения

Структуры записи операторного сопротивления ветви и комплексного сопротивления этой же ветви

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \qquad \left(-j\frac{1}{\omega C_k} = \frac{1}{j\omega C_k}\right)$$

тождественны, и выражение для операторного сопротивления $Z_k(p)$ можно получить через комплексное сопротивление Z_k путем замены $j\omega$ на p.

Сопоставляя выражения законов Кирхгофа в операторной форме с их выражением в комплексной форме:

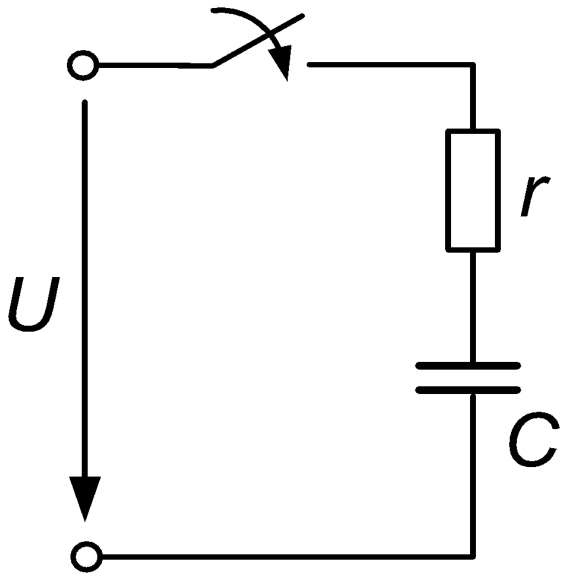
$$\sum \dot{I}_k = 0 \qquad \sum \dot{E}_k = \sum \dot{I}_k Z_k$$

мы видим, что при нулевых начальных условиях законы Кирхгофа в операторной форме одинаковы по виду с этими законами в комплексной форме.

Поэтому при нулевых начальных условиях методы расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичны методам расчета установившихся режимов комплексным методом.

При нулевых начальных условиях входное операторное сопротивление сколь угодно сложного пассивного двухполюсника можно получить из комплексного сопротивления этого двухполюсника заменой $j\omega$ на p.

Пример 1. При включении цепи ***r*, *C*** на постоянное напряжение при $\boldsymbol{u_C(0+) = 0}$ имеем



$$I(p) = \frac{U/p}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{r}\frac{1}{p + \frac{1}{rC}}.$$

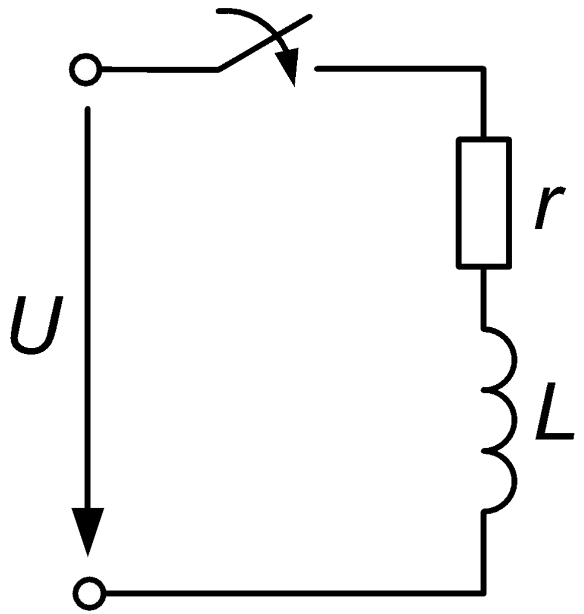
Пользуясь изображением функции

$$e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha},$$

можно записать

$$i(t) = \frac{U}{r} e^{-\frac{1}{rC}t}.$$

Пример 2. При включении цепи ***r, L*** на постоянное напряжение *U*=const имеем



$$U(p) = \frac{U}{p};$$

$$Z(p) = r + pL,$$

а следовательно при нулевом начальном условии i(0+)=0 операторное изображение тока:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

$$I(p)=\frac{U(p)}{Z(p)}=\frac{U/p}{r+pL}=\frac{U}{r}\cdot\frac{1}{p\left(1+p\dfrac{L}{r}\right)}=$$

$$=\frac{U}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p\left(1+p\dfrac{L}{r}\right)}\right)=\frac{U}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1+p\dfrac{L}{r}-1}{p\left(1+p\dfrac{L}{r}\right)}\right)=$$

$$=\frac{U}{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\dfrac{r}{L}+p}\right).$$

Пользуясь изображениями функций

$$A \risingdotseq \frac{A}{p} \quad \text{и} \quad e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha},$$

можно записать для искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей.

Обратное преобразование
(переход от изображений к оригиналам)

При решении задач электротехники используют:

1. Обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)e^{pt}\,dp,$$

где $p = \sigma_0 + j\eta$

2. Таблицы соответствия оригиналов и изображений (приводятся в справочниках);

3. Формулу разложения.

При расчете переходных процессов изображение можно представить в виде рациональной дроби, представляющей собой отношение двух полиномов параметра *p*:

$$X(p)=\frac{M(p)}{N(p)}=\frac{a_0p^m+a_1p^{m-1}+...+a_m}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+...+b_n}. \quad (159)$$

Переход от изображения *X(p)* к функции времени (оригиналу) *x(t)*, т.е. обратное преобразование, осуществляется с помощью **формулы разложения.**

В случае простых (некратных) корней знаменателя выражение ***(159)*** можно представить в виде суммы простых дробей, для которых известны оригиналы:

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n}, \qquad (*)$$

где A_1, A_2 … A_n – неизвестные пока коэффициенты;

p_1, p_2 … p_n – корни знаменателя, т.е. корни уравнения N(p)=0.

Умножим левую и правую части ***(*)*** на $(p – p_1)$ и рассмотрим предел полученного выражения при $p \rightarrow p_1$

$$\lim_{p \to p_1} \frac{M(p)(p-p_1)}{N(p)} =$$

$$= \lim_{p \to p_1} \frac{A_1\left(p-p_1\right)}{p-p_1} + \lim_{p \to p_1} \frac{A_2\left(p-p_1\right)}{p-p_2} + \ldots + \lim_{p \to p_1} \frac{A_n\left(p-p_1\right)}{p-p_n}.$$

Предел левой части – неопределенность $\frac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{p \to p_1} \frac{M'(p)(p-p_1)+M(p)}{N'(p)} = \frac{M(p_1)}{N'(p_1)}.$$

В правой части остается A_1.

$$A_1 = \frac{M(p_1)}{N'(p_1)}; \quad A_2 = \frac{M(p_2)}{N'(p_2)}; \quad A_n = \frac{M(p_n)}{N'(p_n)}.$$

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1. Расчет установившегося режима до коммутации. Определение $i_L(0-)$, $u_C(0-)$.
2. Формирование уравнения для нахождения изображения. **Два способа.**

а) Составление дифференциальных уравнений для послекоммутационного состояния цепи для мгновенных значений токов и напряжений.

Переход к алгебраическим уравнениям для изображений с помощью преобразования Лапласа.

б) Составление операторной схемы замещения и запись для нее операторных уравнений.

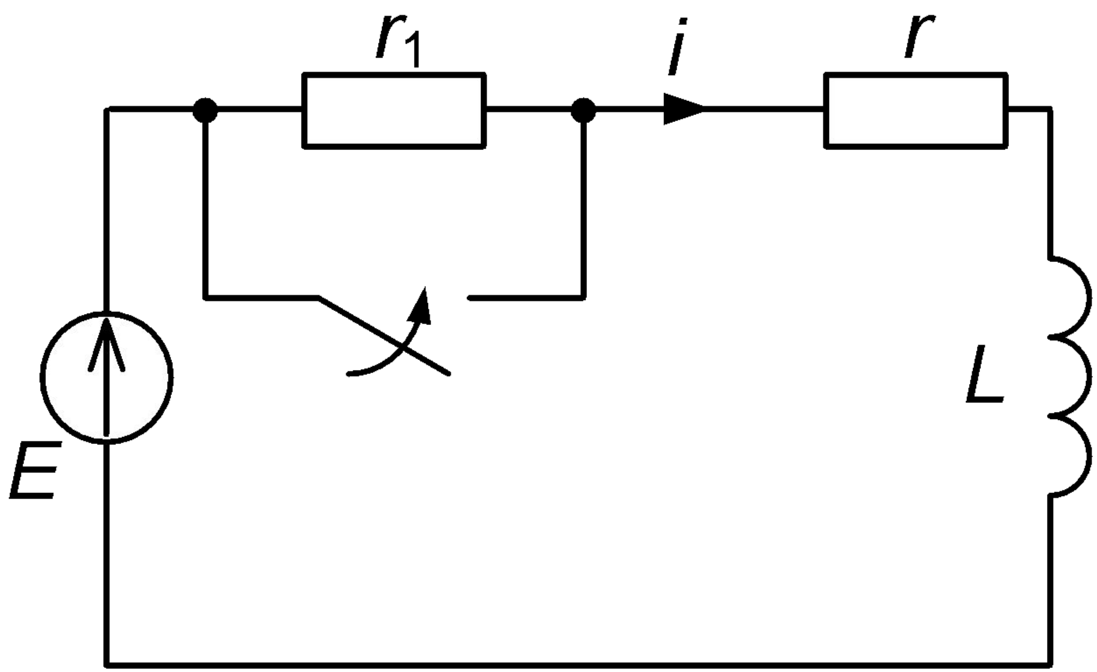
Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1. Расчет установившегося режима до коммутации. Определение $i_L(0-)$, $u_C(0-)$.
2. Формирование уравнения для нахождения изображения. **Два способа.**
3. Нахождение изображения искомого тока или напряжения.
4. Переход от изображения $I(p)$ или $U(p)$ к оригиналу $i(t)$ или $u(t)$ с помощью таблицы соответствия или формулы разложения.

Операторный метод расчета переходных процессов

(примеры расчета)

Пример 1



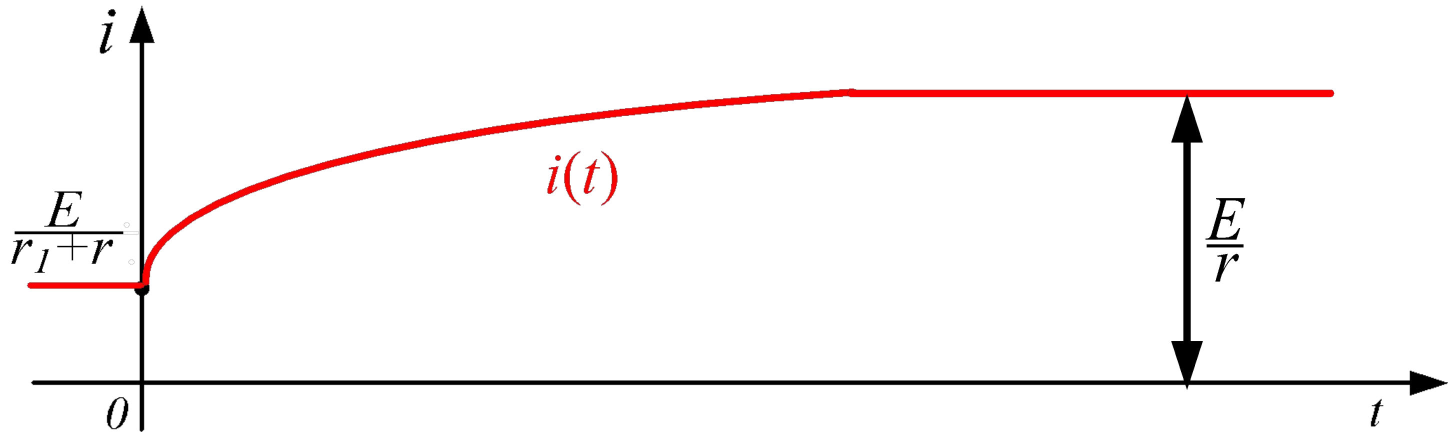
Дано:

E = const;

r_1, r, L.

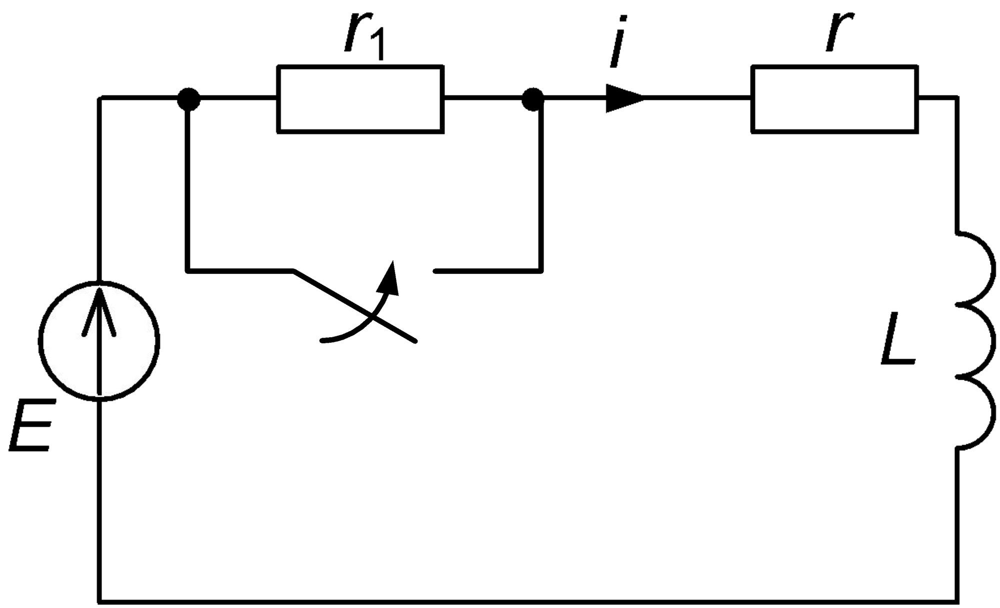
Найти:

$i(t)$



1. Установившийся режим до коммутации

$$t \le 0$$



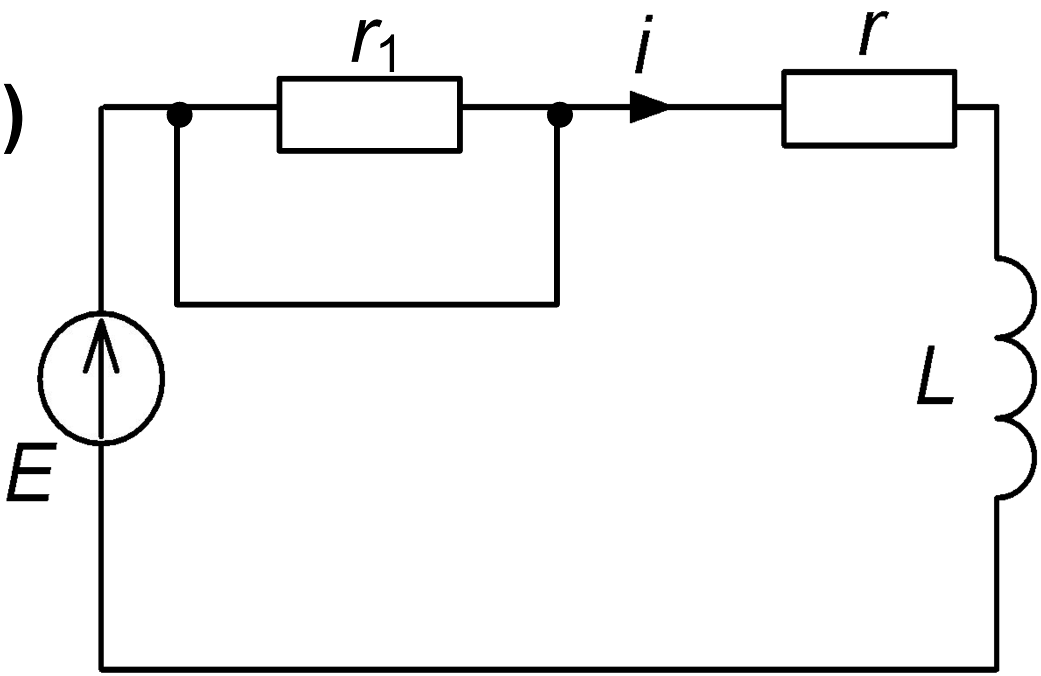
$$I = \frac{E}{r_1 + r};$$

$$i(0-) = \frac{E}{r_1 + r};$$

$$i(0+) = i(0-).$$

2. Составление уравнений для изображений и их решение относительно искомой неизвестной

а)



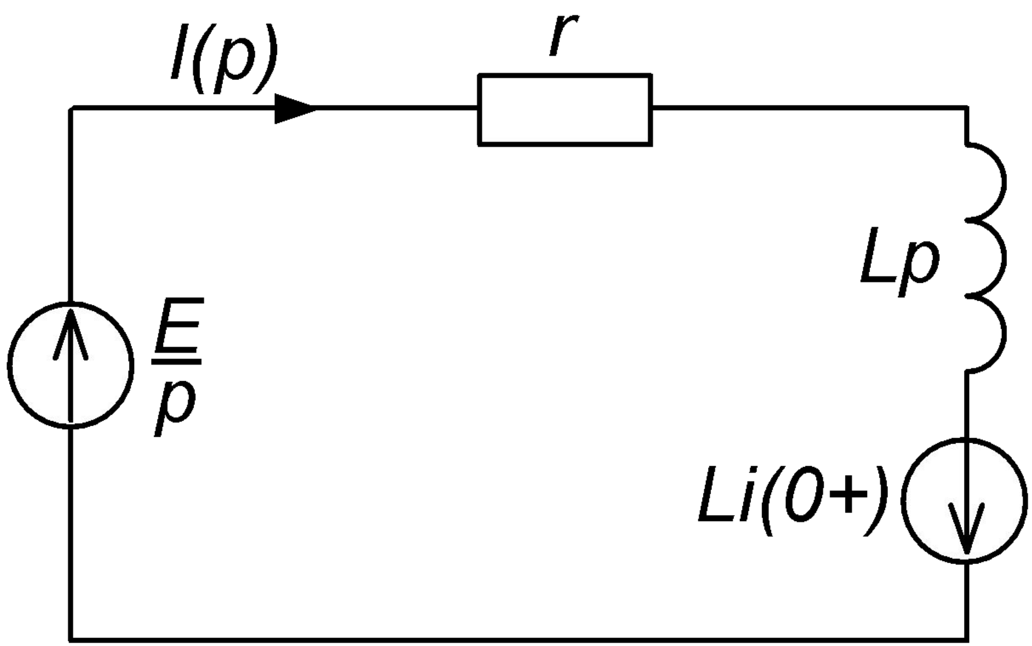
$$t \geq 0$$

$$u_r + u_L = E;$$

$$ri + L\frac{di}{dt} = E;$$

$$rI(p) + LpI(p) - Li(0+) = \frac{E}{p}.$$

б) Операторная схема замещения:



$$rI(p)+LpI(p)=\frac{E}{p}+Li(0+).$$

3. Нахождение изображения искомой неизвестной величины

$$rI(p) + LpI(p) = \frac{E}{p} + Li(0+);$$

$$I(p) = \frac{\dfrac{E}{p} + Li(0+)}{r + Lp} = \frac{E + Lpi(0+)}{p\left(r + Lp\right)} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

4. Нахождение оригинала *i(t)*, по формуле разложения

$$i(t)=\sum\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}e^{p_k t};$$

$$N(p)=0;$$

$$p(r+Lp)=0;$$

$$p_1=0; \qquad p_2=-\frac{r}{L}.$$

$$M(p) = E + Lpi(0+);$$

$$M(p_1) = E;$$

$$M(p_2) = E + L\left(-\frac{r}{L}\right)\frac{E}{r_1 + r} = E - \frac{Er}{r_1 + r};$$

$$N'(p) = r + 2Lp;$$

$$N'(p_1) = r;$$

$$N'(p_2) = r + 2L\left(-\frac{r}{L}\right) = -r.$$

$$i(t)=\frac{M(p_1)}{N'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{M(p_2)}{N'(p_2)}e^{p_2 t}=$$

$$=\frac{E}{r}+\frac{E-E\dfrac{r}{r+r_1}}{-r}e^{-\frac{r}{L}t}=$$

$$=\frac{E}{r}+\left(\frac{E}{r+r_1}-\frac{E}{r}\right)e^{-\frac{r}{L}t};$$

$$i(0)=\frac{E}{r_1+r};\qquad i(\infty)=\frac{E}{r}.$$