МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ФИЛИАЛ

КАФЕДРА АВИАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОСИСТЕМ И ПИЛОТАЖНО-НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ

ЛЕКЦИЯ № 4.1

по дисциплине **Электротехника**

ТЕМА № 4

Переходные процессы в линейных цепях

Вопросы лекции

4.1.1. Общие сведения о переходных процессах.

4.1.2. Законы коммутации.

4.1.3. Зависимые и независимые начальные условия.

4.1.4. Общая формула расчета переходных процессов с одним накопителем энергии.

4.1.1. Общие сведения о переходных процессах.

Переходным процессом называется электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима к другому.

Переходные процессы возникают только в тех цепях, где имеются накопители энергии: конденсаторы и катушки индуктивности. Переходные процессы появляются в результате коммутаций.

КОММУТАЦИЯ – это включения, отключения, переключения, мгновенное изменение параметров и т.д. В дальнейшем будем считать, что коммутация происходит мгновенно, а переходный процесс конечен, хотя переходные процессы быстропротекающие. Их длительность составляет сотые, тысячные доли секунды.

Переходные процессы возникают в электротехнических и радиотехнических устройствах, используемых на летательных аппаратах, если там есть коммутирующие устройства и накопители энергии, т.е. в электрических машинах (пуск, отключение, изменение режима работы), в автоматике – в системах САУ (автопилот, управление режимом авиадвигателя), в системах САР (регуляторы напряжения, температуры), в цифровых вычислительных машинах, электроизмерительных приборах и т.д.

Как правило, наличие переходных процессов нежелательно, ибо ведет к искажению нормального режима работы, к уменьшению их быстродействия.

Возникновение переходных процессов связано с невозможностью мгновенного изменения энергии электрического поля $W_Э = C\frac{u_c^2}{2}$, в конденсаторах и магнитного поля $W_Э = L\frac{i^2}{2}$, в индуктивных катушках в момент коммутации.

Скачкообразное изменение этих энергий приводит к необходимости иметь бесконечно большие мощности.

$$P_Э = \frac{d\,W_Э}{d\,t}, \qquad P_М = \frac{d\,W_М}{d\,t}$$

что в реальных условиях невозможно.

4.1.2. Законы коммутации

Существует два закона коммутации. Сформулируем их:

Первый закон коммутации.

В ветви с индуктивной катушкой ток и магнитный поток в момент коммутации не могут измениться скачком, а сохраняют те значения, которые они имели перед коммутацией, и дальше начинают изменяться с этих значений.

Но прежде, чем записать математически закон коммутации, введем некоторые обозначения.

Договоримся обозначать $t=0$ - момент времени, в который происходит коммутация, $t=0_-$ - момент времени непосредственно перед коммутацией, $t=0_+$ - момент времени после коммутации.

Тогда:

$$i_L(0_-)=i_L(0)=i_L(0_+) \quad (1)$$

Второй закон коммутации.

В ветви с конденсатором напряжение и заряд на нем не могут изменяться скачком в момент коммутации, а сохраняют те значения, которые имели до коммутации и изменяются в этих значениях, т.е.

$$u_C(0_-)=u_C(0)=u_C(0_+)$$

Переходные процессы можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений, которые необходимо решать.

Для этого могут использоваться следующие методы:

- классический;

- операторный;

- суперпозиционный с помощью интеграла Дюамеля.

При этом для интегрирования уравнений необходимо знать начальные условия.

4.1.3. Зависимые и независимые начальные условия

Начальные условия – это значения токов и напряжений при $t = 0$, т.е. в момент коммутации.

Следует различать ***независимые и зависимые*** начальные условия. Значение тока в катушке $i_L(0)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ в момент коммутации называют ***независимыми начальными условиями*** (Н.Н.У. при $t=0$). Они определяются из законов коммутации, т.е. из до коммутационных установившихся режимов.

Значения всех остальных токов и напряжений в начальный момент времени, т.е. при $t=0$, называют ***зависимыми начальными условиями*** (З.Н.У. при $t=0$). Их определяют по ранее найденным значениям независимых начальных условий из законов Кирхгофа, составленных для после коммутационных режимов).

Если к началу переходного процесса все токи и напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю, в схеме имеют место ***нулевые начальные условия.***

4.1.4. Общая формула расчета переходных процессов с одним накопителем энергии.

Исследование переходных процессов в линейных цепях ведется с помощью линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Классический метод исследования переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании интегро-дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы.

Поэтому в общем случае для исследуемой схемы приступают к составлению системы интегро-дифференциальных уравнений на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Уравнения составляют для схемы после коммутации, т.е. для после коммутационного режима. Составив систему уравнений, решают ее относительно одной интересующей нас переменной. При этом целесообразно эту переменную выбрать так, чтобы остальные переменные определялись через нее последовательным дифференцированием, а не интегрированием, т.к. дифференцирование функций выполняется значительно проще, чем интегрирование.

Полученное линейное, неоднородное дифференциальное уравнение необходимо решать. Как известно из курса математики, общее решение такого уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Применительно к расчету переходных процессов в электротехнических устройствах общее решение соответствует переходному току и напряжению, т.е. $i(t)$ или $u(t)$, частное решение неоднородного уравнения – установившемуся току или напряжению, т.е. $i_{уст}(t)$ или $u_{уст}(t)$, а общее решение однородного уравнения – свободной составляющей $i_{св}(t)$, $u_{св}(t)$ Тогда ток или напряжение в переходном режиме определяется:

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= i_{уст}(t) + i_{св}(t) \\ u(t) &= u_{уст}(t) + u_{св}(t) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

СПРАВКА

Однородное и неоднородное диф уравнение

Дифференциальное уравнение является однородным, если оно не содержит свободного члена(слагаемого, не зависящего от неизвестной функции.) Так, можно говорить, что уравнени $F(y, y', y'', \ldots) = G(x)$ - однородно, если В случае, если $G(x) \equiv 0$ оворят о неоднородном дифференциальном уравнении.

Общее и ча $G(x) \neq 0$ **шение однородного диф уравнения**

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций вида , зависящее от произвольной постоянной С, каждая из которых явля $y = \varphi(x, C)$ ем данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной С. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при конкретном значении произвольной постоянной С, включая .

$\pm\infty$

Общая формула расчета переходных процессов в электрических цепях с одним накопителем энергии

Простейшими линейными цепями являются цепи с одним накопителем энергии. В качестве накопителя энергии служит либо катушка индуктивности, либо конденсатор.

Большинство практически важных задач исследования переходных процессов в электрических цепях авиационного оборудования сводится именно к таким простейшим цепям.

Если в линейной цепи имеется один накопитель энергии, то переходный процесс в ней, вызванный коммутацией, описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = y \qquad (1)$$

где x - искомая функция (напряжение или ток);

y - заданная функция, определяемая характеристиками источника энергии;

τ - постоянная времени цепи, зависящая от параметров ее элементов.

Тогда общее решение уравнения (1), как это ранее определили запишется:

$$x(t) = x_{уст}(t) + x_{св}(t) \quad (2)$$

где $x(t)$ - переходный ток или напряжение;

$x_{уст}(t)$ - определяется методами расчета цепей постоянного или переменного тока. Это новое установившееся значение искомой величины после окончания переходного процесса;

$$x_{св}(t) = A e^{pt} \quad (3)$$

где A – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий;

p – корень характеристического уравнения, составленного по уравнению (1) при условии, что $p \doteqdot \frac{d}{dt}$ ($\doteqdot$ - образ или приблизительно равный) , т.е.

$$\tau p + 1 = 0 \quad (4)$$

Включение цепи *r*, *L* на постоянное напряжение

Задана схема электрической цепи (рис.1). По второму закону Кирхгофа для после коммутационного режима запишем:

$$u_r(t) + u_L(t) = U \quad (5)$$

или

$$r \cdot i(t) + L\frac{d\,i}{d\,t} = U \quad (6)$$

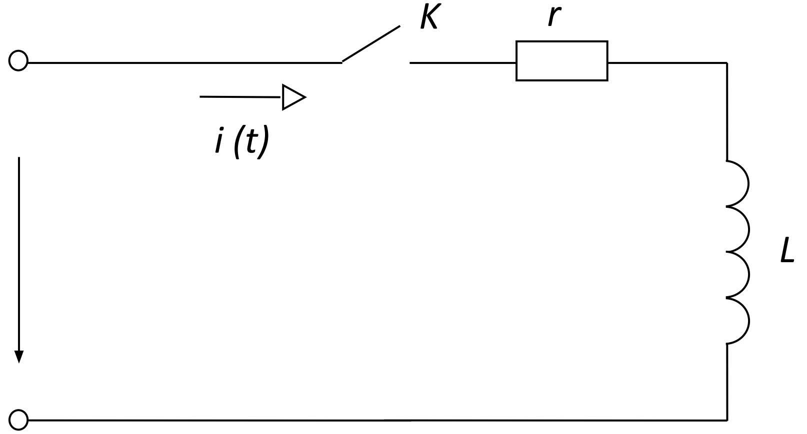

Рис.1

Уравнение (6) описывает переходный процесс, возникающий в цепи r, L в результате замыкания рубильника К.

Решение этого уравнения запишем в виде:

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{св}(t) \quad (7)$$

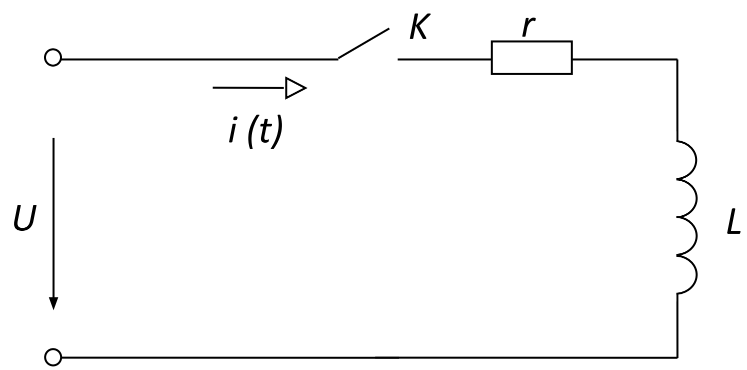

Рис.1

Найдем установившийся ток, т.е. ток в цепи после окончания переходного процесса:

$$(8)\quad i_{уст}(t) = \frac{U}{r}$$

Свободную составляющую будем находить в форме:

$$(9)\quad i_{св}(t) = A\,e^{pt}$$

где A – постоянная интегрирования;

p – корень характеристического уравнения $f(t)$.

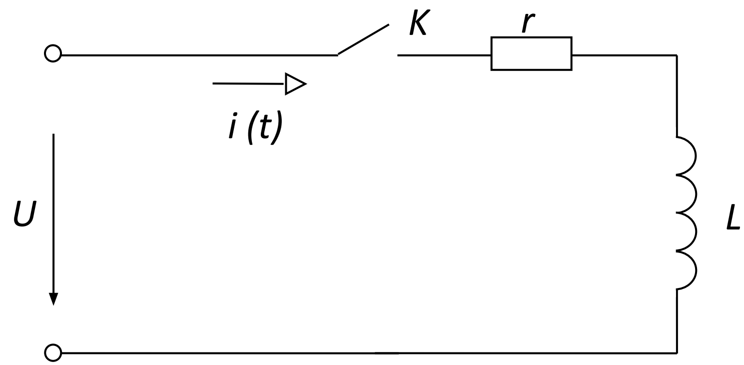

Рис.1

Характеристическое уравнение можно получить из уравнения (6),

где $\dfrac{d}{dt} \doteqdot p$, тогда $Lp + r = 0$,

откуда

$$p = -\frac{r}{L} \qquad (10)$$

Обозначим $\dfrac{1}{p} = \tau$ - постоянная времени цепи, характеризующая длительность переходного процесса.

Полагают, что за $(3 \div 5)\tau$ переходный процесс можно считать законченным. Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий, т.е. при $t=0$.

Уравнение (7) запишем:

$$i(0) = i_{уст}(0) + A \qquad (11)$$

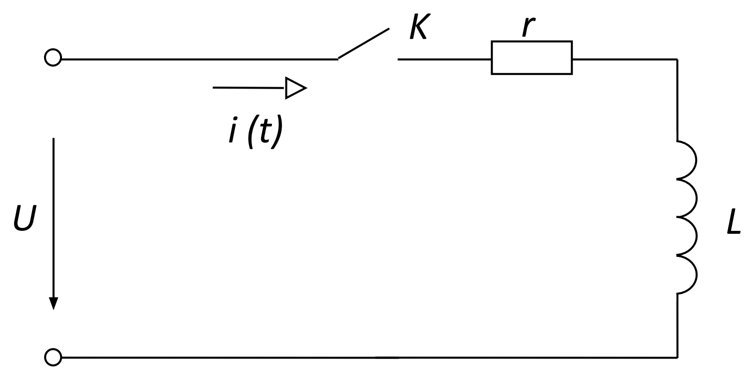

Рис.1

Значение $i(0)$ найдем по первому закону коммутации

$$i_L(0) = i_L(0_-) = i_L(0+) = 0$$

Тогда $0 = \dfrac{U}{r} + A$, откуда $A = -\dfrac{U}{r}$ (12)

Подставим значения $i_{уст}(t)$ из (8), p из (10), A из (12) в уравнение (7), получим:

$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (13)$$

Напряжение на катушке в переходном режиме определим по формуле:

$$u_L(t) = L\frac{d\,i}{d\,t}$$

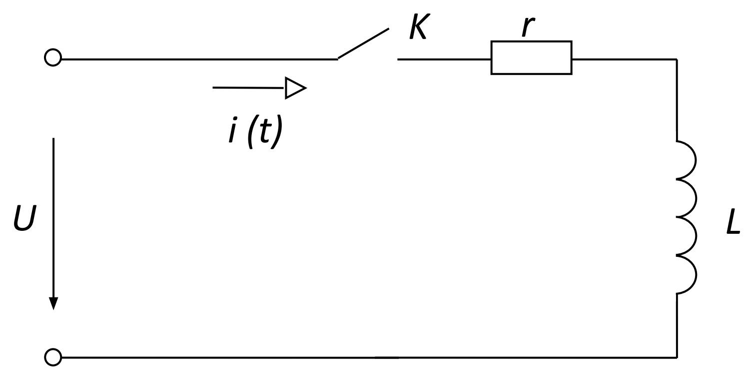

Рис.1

для чего, продифференцировав ток $i(t)$ из уравнения (13), получим:

$$u_L(t) = L\frac{U}{r}\cdot\frac{r}{L}e^{-\frac{r}{L}t} = U\,e^{-\frac{r}{L}t} = U\,e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (14)$$

Напряжение $$u_r(t) = r\cdot i\,(t) = U\,\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (15)$$

По уравнениям (13) и (14) построим графики (рис.2)

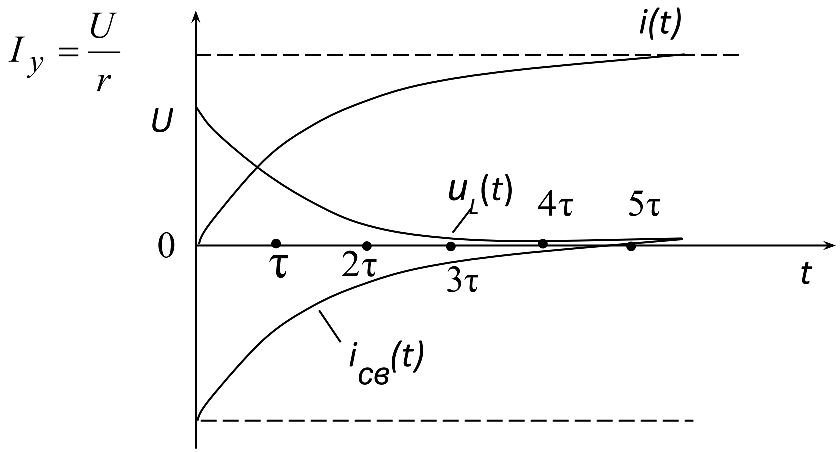

Рис.2

С энергетической точки зрения во время переходного процесса накапливается энергия магнитного поля в индуктивной катушке и тепловые потери в резисторе.

ОБОБЩЕНИЕ

Порядок расчета

1. Находим значения для *t=0_* *i(0-)* *u(0-)*
2. Находим значения для *t=0+* *i(0+)* *u(0+)*
3. Находим $i_{уст}$ $u_{уст}$
4. Решаем характеристическое уравнение *Zвх(з)=R+pL*, находя *p* *T=I1/pI*
5. Определяем зависимости от времени *i(t)* *u(t)*

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{св}(t) \quad i_{св}(t) = Ae^{pt}$$ т.к. $i(0) = i_{уст}(0) + A$ → *A=[i(0+)-iуст]*

$$i(t) = [i(0+) - iуст]e^{-t/\tau} + iуст$$

$$u(t) = [u(0+) - uуст]e^{-t/\tau} + uуст$$

6. Строим графики переходного процесса

Включение цепи r, L на синусоидальное напряжение

Схема электрической цепи с последовательным соединением r, L (рис.1) включена на синусоидальное напряжение.

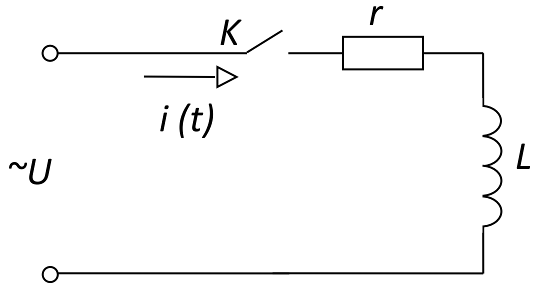

Рис.1

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \tag{1}$$

Переходный процесс можно описать дифференциальным уравнением

$$r\,i(t) + L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \tag{2}$$

Его решение можно записать:

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{св}(t) = i_{уст}(t) + A e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3}$$

Найдем установившиеся значения тока:

$$i_{уст}(t) = \frac{U_m}{z}\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) \tag{4}$$

где $z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ $\quad \varphi = arctg\frac{\omega L}{r}$ $\quad \frac{U_m}{z} = I_m$

Свободную составляющую запишем: $i_{св}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ (5)

а постоянную интегрирования A найдем из начальных условий:

$$i(0) = i_{уст}(0) + i_{св}(0) \tag{6}$$

Из первого закона коммутации

$$i_L(0) = i_L(0_-) = 0$$

Тогда из (6) имеем с учетом (4, 5) при $t = 0$:

$$0 = I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A \qquad (7)$$

Откуда

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi) = -\frac{U_m}{z}\sin(\psi_u - \varphi) \qquad (8)$$

Подставим значения из уравнений (4), (5),. и (8) в уравнение (3), запишем:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} \qquad (9)$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\,\omega\, I_m \cos(\omega t + \psi_u - \phi) + \qquad (10)$$

$$+[U_m \sin\psi_u - \omega\, L\, I_m \cos(\psi_u - \phi)]\, e^{-\frac{r}{L}t}$$

Рассмотрим влияние начальной фазы входного напряжения на характер переходного процесса.

1. Пусть в свободной составляющей тока (9)

$$\sin(\psi_u - \varphi) = 0, \;\; (\psi_u - \varphi) = 0, \;\; \psi_u = \varphi$$

Это означает, что свободная составляющая равна нулю.

Тогда в этом случае, когда $\psi_u = \varphi$, переходный процесс отсутствует и цепь из одного установившегося режима переходит в новый минуя переходный процесс, т.е. (рис.2).

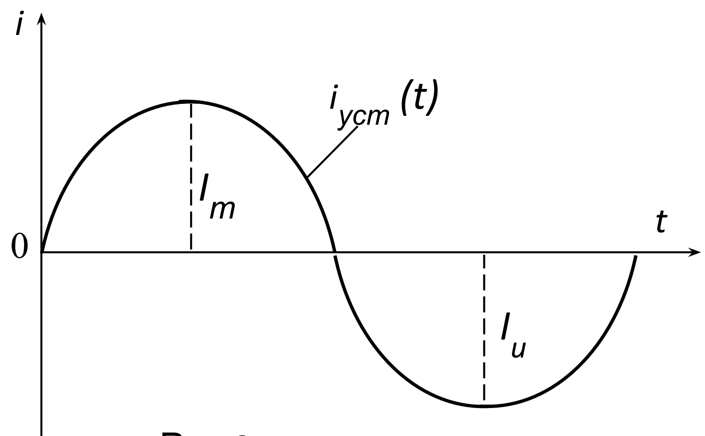

Рис.2

2. Если в уравнении (9) в свободной составляющей тока $\sin(\psi_u - \varphi) = \pm 1$, $(\psi_u - \varphi) = \pm \frac{\pi}{2}$, $\psi_u = \pm \frac{\pi}{2} + \varphi$, свободная составляющая имеет максимальное значение и в какой-то момент времени, обычно, когда $t = \frac{T}{2}$ переходный ток может достигать удвоенного значения амплитуды в установившемся режиме (рис.3).

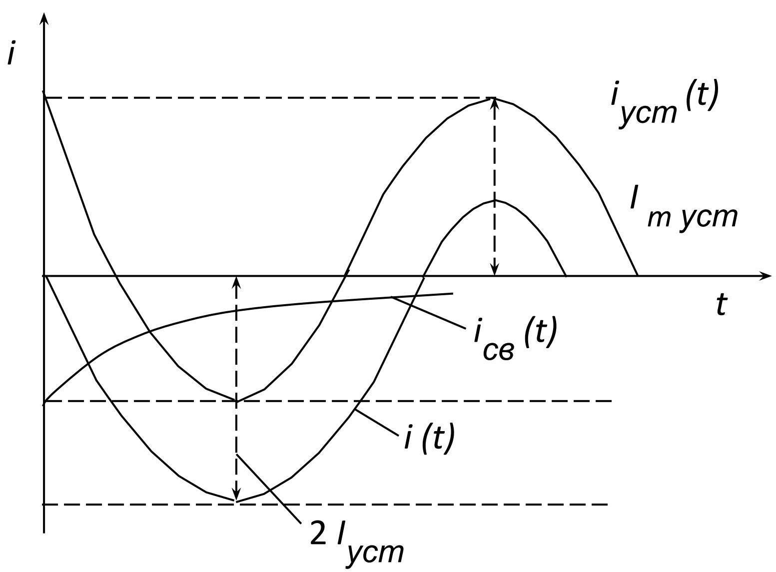

Рис.3

То есть в зависимости от того, в какой момент времени замкнут рубильник К и какое значение начальной фазы имеет входное напряжение, переходный процесс происходит по разному.

Начальная фаза оказывает существенное влияние на характер переходного процесса.

заключение

Таким образом, в результате рассмотрения материала вы получили знания :

- **о переходных процессах в целом;**
- **О законах коммутации;**
- **О зависимых и независимых начальных условиях;**
- **Об общей формуле расчета переходных процессов с одним накопителем энергии.**

Решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
нет действительных корней	$x = -\dfrac{b}{2a}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$