Понятие первообразной. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной

Задача. Известен закон изменения скорости тела $v(t)$, требуется найти закон изменения координаты ***x(t)*** данного тела.

Решение: Скорость – это производная от пройдённого пути (**физический смысл производной**). Таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции (**производной**) ***восстановить*** функцию.

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция ***f(x)*** и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию ***F(x)*** , чтобы .

$$F'(x) = f(x)$$

Дано: $v(t) = x$

Найти: $x(t) - ?$

Решение:

$$x'(t) = v(t)$$

$$x(t) = \frac{x^2}{2}$$

Проверка:

$$x'(t) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = v(t)$$

Определение. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции** $y = f(x)$ на заданном промежутке ***X***, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$

Пример : Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $x \in (0;+\infty)$, так как для любого x из этого промежутка выполняется равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Теорема. Пусть *F(x)* какая-нибудь первообразная для функции *f(x)* на некотором промежутке . Тогда функция *F(x) + C,* где *C* – произвольная константа, тоже будет ***первообразной функции*** *f(x)* на этом промежутке.

Пример. Так для функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ первообразной будет являться любая функция из множества $F(x) = \sqrt{x} + C$, где *C* = *const* (просто подставляйте конкретные числовые значения). Так как $\left(\sqrt{x} + C\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0$

Взаимно-обратные операции

умножение	*деление*
сложение	*вычитание*
возведение в степень	*извлечение корня*
дифференцирование	*интегрирование*
процесс нахождения производной	*процесс нахождения первообразной*

***Основная задача интегрирования*: записать <u>все</u> первообразные для данной функции. Решить её- значит представить первообразную в таком общем виде: F(x)+C**

Пример 1. Найти ***все*** первообразные для заданных функций.

1) $f(x) = 5\sin x$

$$F(x) = -5\cos x + C$$

<u>Проверка:</u> $F'(x) = (-5\cos x + C)' = -5\cdot(-\sin x) + 0 = 5\sin x = f(x)$

Постоянный множитель выносится за знак первообразной

2) $f(x) = 12x^3 + 8x - 1$

$$F(x) = 12\cdot\frac{x^4}{4} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 1\cdot x + C$$

$$F(x) = 3x^4 + 4x^2 - x + C$$

Первообразная суммы равна сумме первообразных

<u>Проверка:</u> $F'(x) = (3x^4 + 4x^2 - x + C)' = 12x^3 + 8x - 1 = f(x)$

Пример 2. Для функции $y = f(x)$ найдите **первообразную** $y = F(x)$, которая принимает данное значение в указанной точке.

$$f(x) = \frac{1}{2-3x}, \quad F\left(\frac{1}{3}\right) = 5$$

Решение.

1. Найдем общий вид первообразных для функции *f(x)*

$$F(x) = -\frac{1}{3}\cdot \ln|2-3x| + C$$

2. Чтобы найти значение постоянной С, воспользуемся начальными условиями $F\left(\frac{1}{3}\right) = 5$

Первообразной для функции $y = f(kx+b)$ служит функция

$$y = \frac{1}{k}F(kx+b)$$

5

$\frac{1}{3}$

$$F(x) = -\frac{1}{3}\cdot \ln|2-3x| + C$$

0

$$5 = -\frac{1}{3}\cdot \ln\left|2-3\cdot\frac{1}{3}\right| + C \qquad 5 = -\frac{1}{3}\cdot \ln 1 + C$$

$$5 = C$$

3. Одна из первообразных имеет вид

$$F(x) = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + 5$$

Определение. Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение

Сам процесс отыскания множества первообразных $F(x)+C$ - **интегрированием**

Интегрирование – это восстановление функции $F(x)+C$ по её производной $f(x)$ (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Пример. Найти неопределенный интеграл $1)\int\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)dx$

Решение: Воспользуемся первым и вторым правилом интегрирования

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$$

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$$

$$1)\int\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)dx=\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{5}{x^3}dx=3\int\frac{dx}{x}+5\int x^{-3}dx$$

Теперь воспользуемся таблицей интегралов

$$\int\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)dx=3\ln x+5\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=3\ln x-\frac{5}{2x^2}+C$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $2)\int e^{5x-2}dx$

Решение: Воспользуемся третьим правилом интегрирования

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

$$\int e^{5x-2}dx = \frac{1}{5}e^{5x-2}+C$$