

Понятие первообразной. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной

Задача. Известен закон изменения скорости тела $v(t)$, требуется найти закон изменения координаты $x(t)$ данного тела.

Решение: Скорость – это производная от пройденного пути (физический смысл производной). Таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции (производной) **восстановить** функцию.

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция $f(x)$ и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию $F(x)$, чтобы .

$$F'(x) = f(x)$$

Дано: $v(t) = x$

Найти: $x(t) - ?$

Решение:

$$x'(t) = v(t)$$

$$x(t) = \frac{x^2}{2}$$

Проверка:

$$x'(t) = \left(\frac{x^2}{2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = v(t)$$

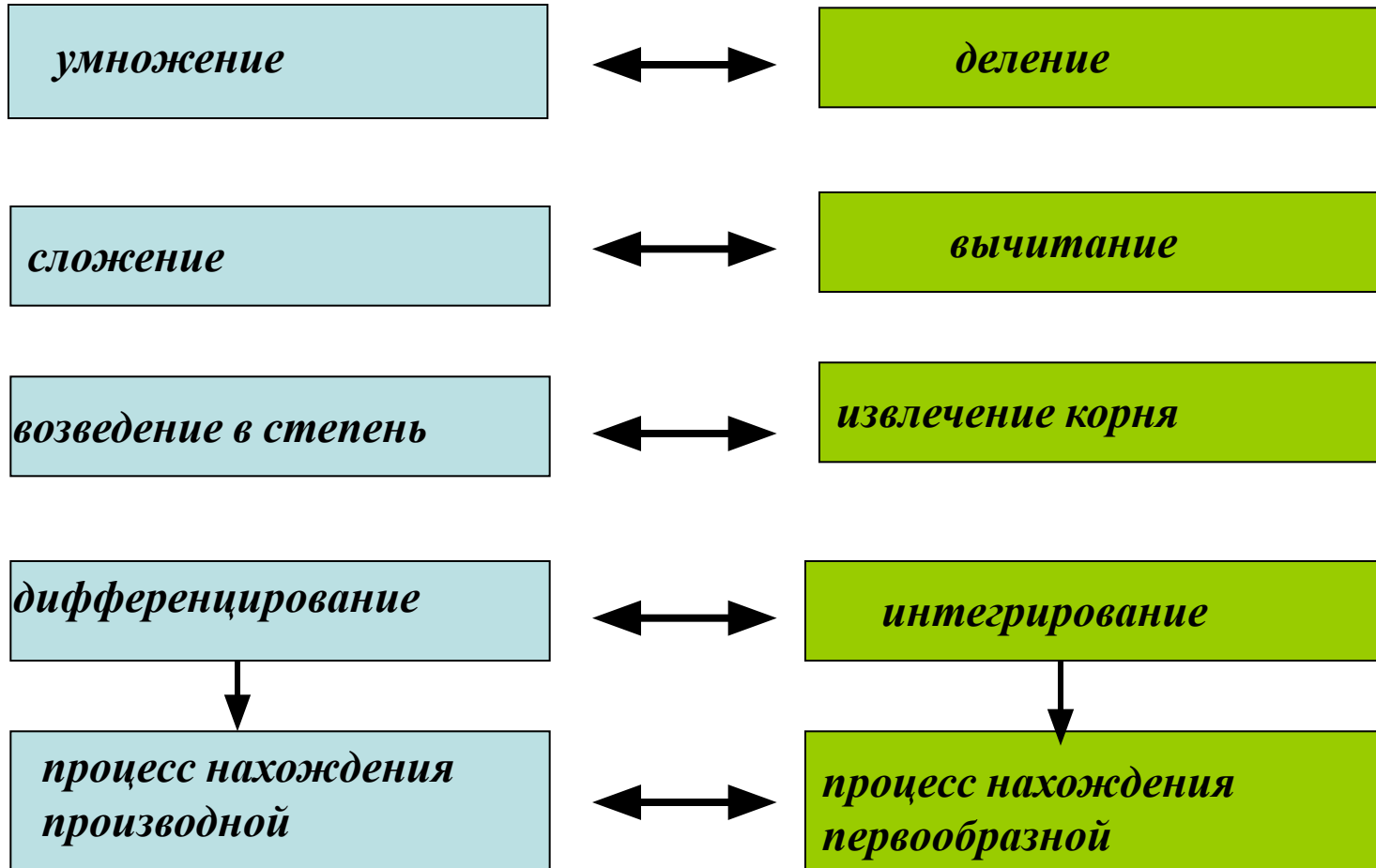
Определение. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции** $y = f(x)$ на заданном промежутке X , если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$

Пример : Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $x \in (0; +\infty)$, так как для любого x из этого промежутка выполняется равенство $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Теорема. Пусть $F(x)$ какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда функция $F(x) + C$, где C – произвольная константа, тоже будет **первообразной функции $f(x)$** на этом промежутке.

Пример. Так для функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ первообразной будет являться любая функция из множества $F(x) = \sqrt{x} + C$, где $C = const$ (просто подставляйте конкретные числовые значения). Так как $(\sqrt{x} + C)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$

Взаимно-обратные операции



Основная задача интегрирования: записать все первообразные для данной функции. Решить её- значит представить первообразную в таком общем виде: $F(x)+C$

Пример 1. Найти **все** первообразные для заданных функций.

1) $f(x) = 5 \sin x$

$$F(x) = -5 \cos x + C$$

Проверка: $F'(x) = (-5 \cos x + C)' = -5 \cdot (-\sin x) + 0 = 5 \sin x = f(x)$

Постоянный множитель выносится за знак первообразной

2) $f(x) = 12x^3 + 8x - 1$

$$F(x) = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot x + C$$

$$F(x) = 3x^4 + 4x^2 - x + C$$

Проверка: $F'(x) = (3x^4 + 4x^2 - x + C)' = 12x^3 + 8x - 1 = f(x)$

Первообразная суммы равна сумме первообразных

Пример 2. Для функции $y = f(x)$ найдите **первообразную** $y = F(x)$, которая принимает данное значение в указанной точке.

$$f(x) = \frac{1}{2-3x}, \quad F\left(\frac{1}{3}\right) = 5$$

Решение.

1. Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$

Первообразной для функции

2. Чтобы найти значение постоянной C , воспользуемся начальными условиями

служит функция

$$y = \frac{1}{k} F(kx + b)$$
$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 5$$

3. Одна из первообразных имеет вид

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln|2 - 3x| + C$$

$$5 = -\frac{1}{3} \cdot \ln\left|2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right| + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln|2 - 3x| + C$$

$$5 = -\frac{1}{3} \cdot \ln\left|2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right| + C \quad 5 = -\frac{1}{3} \cdot \ln 1 + C$$

$$5 = C$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \ln|2 - 3x| + 5$$

Определение. Множество всех первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение

Сам процесс отыскания множества первообразных $F(x) + C$ - **интегрированием**

Интегрирование – это восстановление функции $F(x) + C$ по её производной $f(x)$ (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$



Пример. Найти неопределенный интеграл

$$1) \int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} \right) dx$$

Решение: Воспользуемся первым и вторым правилом интегрирования

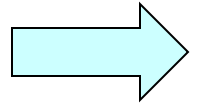
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$1) \int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} \right) dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{5}{x^3} dx = 3 \int \frac{dx}{x} + 5 \int x^{-3} dx$$

Теперь воспользуемся таблицей интегралов



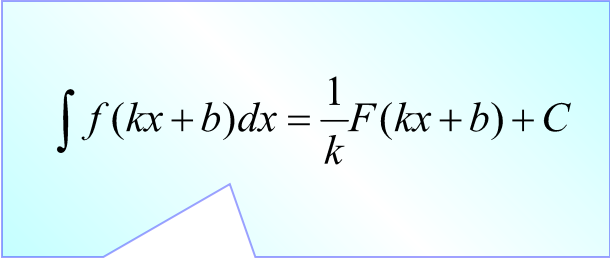
$$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^3} \right) dx = 3 \ln x + 5 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = 3 \ln x - \frac{5}{2x^2} + C$$

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$2) \int e^{5x-2} dx$$

Решение: Воспользуемся третьим правилом интегрирования

$$\int e^{5x-2} dx = \frac{1}{5} e^{5x-2} + C$$


$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$$