

# **Тема: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

**Неопределенный интеграл и его  
свойства.**

# 1.1. Первообразная функция

ОПР. Функция  $y = F(x)$  называется первообразной для функции на данном промежутке  $(a;b)$ , если для любого  $x$  из этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. Первообразной для функции

$$f(x) = x^2$$

на всей числовой оси является  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$C = const$  так как  $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2.$

**Теорема 1.1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на данном интервале, то на этом интервале она имеет первообразную.

**Теорема 1.2.** Если функция  $F(x)$  является первообразной функции  $f(x)$  на  $(a;b)$ , то множество всех первообразных для  $f(x)$  задается формулой  $F(x)+C$ , где  $C$  – постоянная.

## 1.2. Неопределенный интеграл

**ОПР.** Совокупность всех первообразных  $F(x) + C$  для данной функции  $f(x)$  называется ее неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Знак  $\int$  называется **интегралом**, функция  $f(x)$  – **подынтегральной функцией**,  $f(x)dx$  – **подынтегральным выражением**,  $x$  – **переменной интегрирования**.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется **интегрированием** этой функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования.

# ***Основные свойства неопределенного интеграла***

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$***d \int f(x)dx = f(x)dx***$$

2. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Таким образом,

**правильность интегрирования  
проверяется дифференцированием!**

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$



4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

6. Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

где  $u = \varphi(x)$  – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Данное свойство называется **инвариантностью** неопределенного интеграла.

При вычислении неопределенного интеграла используют формулу:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a \neq 0.$$

# Таблица простейших интегралов

$$1. \int 0 \cdot du = C;$$

$$2. \int 1 \cdot du = u + C;$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$4. \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$$

$$6. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C;$$

$$7. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$8. \int e^u du = e^u + C;$$

$$9. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$10. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$11. \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tgu} + C;$$

$$12. \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctgu} + C;$$

$$13. \int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Вычисление интегралов с помощью преобразования подынтегрального выражения к табличной форме и использования свойств неопределенного интеграла называется непосредственным интегрированием.

### Вспомогательные сведения

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 3. \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n};$$
$$2. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad 4. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

**Пример 1.** Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \frac{dx}{x^5} &= \int x^{-5} dx = \left( \hat{o} \hat{i} \check{o} \hat{i} \acute{o} \check{e} \grave{a} (3) \right) = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \\ &= -\frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int (2x + 7^x) dx &= 2 \int x dx + \int 7^x dx = \\ \left( \hat{o} \hat{i} \check{o} \hat{i} \acute{o} \check{e} \hat{u} (3), (7) \right) &= 2 \frac{x^2}{2} + \frac{7^x}{\ln 7} + C = x^2 + \frac{7^x}{\ln 7} + C. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 3. \quad \int \sqrt{x^5} dx &= \int x^{5/2} dx = (\hat{o} \hat{i} \hat{d}\hat{i} \hat{o}\hat{e}\hat{a} (3)) = \\
 &= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \int \frac{dx}{x^2+16} &= (\hat{o} \hat{i} \hat{d}\hat{i} \hat{o}\hat{e}\hat{a} (13)) = \int \frac{dx}{x^2+4^2} = \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.
 \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 25} \right| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

# **1.3. Основные методы вычисления неопределенных интегралов**

## **Непосредственное интегрирование**

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредствен-ным интегрированием.**

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция «подведения знака дифференциала»).

$$\int f'(u) du = d(\text{под } f(u) \text{ знак дифференциала}).$$

$$du = d(u + b), \quad b = \text{const};$$

Например:

$$du = \frac{1}{a} d(au + b), \quad a \neq 0, \quad a = \text{const};$$

$$\cos u du = d(\sin u).$$

# Примеры

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (3x + 1)^9 dx &= \frac{1}{3} \int (3x + 1)^9 d(3x + 1) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{(3x + 1)^{10}}{10} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \frac{dx}{4x + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{d(4x + 5)}{4x + 5} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |4x + 5| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \int \cos\left(\frac{x}{5} + 7\right) dx &= 5 \int \cos\left(\frac{x}{5} + 7\right) d\left(\frac{x}{5} + 7\right) = \\ &= 5 \sin\left(\frac{x}{5} + 7\right) + C. \end{aligned}$$

# Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла  $\int f(x)dx$  в другой интеграл

$$\int f(u)du,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (6x - 3)^5 dx &= \left. \begin{array}{l} t = 6x - 3 \\ dt = 6dx, dx = \frac{dt}{6} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{1}{6} \frac{t^6}{6} + C = (t = 6x - 3) = \\ &= \frac{1}{36} (6x - 3)^6 + C. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2. \quad \int \frac{dx}{5-7x} &= \left. \begin{array}{c} t = 5 - 7x \\ dt = -7dx, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7} \ln|t| + C = (t = 5 - 7x) = \\ &= -\frac{1}{7} \ln|5 - 7x| + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \sin\left(\frac{x}{2} - 8\right) dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} - 8, \\ dt = \frac{1}{2} dx, dx = 2dt \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = \left( t = \frac{x}{2} - 8 \right) =$$

$$= -2 \cos\left(\frac{x}{2} - 8\right) + C.$$

# Интегрирование по частям

Формула  $\int u dv = uv - \int v du,$

где  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  –

дифференцируемые функции, называется

**формулой интегрирования по частям.**

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

более прост в вычислении, чем  $\int v du$   
 $\int u dv.$

# Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида  $\int P_n(x)e^{mx} dx$ ,  $\int P_n(x)a^{mx} dx$ ,  
 $\int P_n(x)\sin mx dx$ ,  $\int P_n(x)\cos mx dx$ ,

где  $P_n(x)$  – многочлен,  $m$  – число.

Здесь полагают  $u = P_n(x)$ ,

за  $dv$  обозначают остальные  
сомножители.

2. Интегралы вида  $\int P_n(x) \ln x dx$ ,  $\int P_n(x) \arcsin x dx$ ,  
 $\int P_n(x) \arccos x dx$ ,  $\int P_n(x) \arctg x dx$ ,  $\int P_n(x) \text{arcctg} x dx$ .

Здесь полагают  $P_n(x) dx = dv$

за  $u$  обозначают остальные

сомножители.  $\int e^{ax} \cos b x dx$ ,  $\int e^{ax} \sin b x dx$ ,

3. Интегралы вида

где  $a$  и  $b$  – числа.

$e^{ax}$ .

За  $u$  можно принять функцию

**Пример.** Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} 1. \int (2x + 5) \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x + 5, du = 2dx \\ dv = \cos x, v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\ &= (2x + 5) \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ &= (2x + 5) \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$