

Тема: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Неопределенный интеграл и его свойства.

1.1. Первообразная функция

ОПР. Функция $y = F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на данном промежутке $(a;b)$, если для любого x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. Первообразной для функции

$$f(x) = x^2$$

на всей числовой оси является $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$C = \text{const}$ так как $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2.$

Теорема 1.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то на этом интервале она имеет первообразную.

Теорема 1.2. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – постоянная.

1.2. Неопределенный интеграл

ОПР. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Знак $\int$ называется **интегралом**, функция $f(x)$ – **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**, x – **переменной интегрирования**.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется **интегрированием** этой функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

2. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Таким образом,

**правильность интегрирования
проверяется дифференцированием!**

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Данное свойство называется **инвариантностью** неопределенного интеграла.

При вычислении неопределенного интеграла используют формулу:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

$$1. \int 0 \cdot du = C;$$

$$2. \int 1 \cdot du = u + C;$$

$$3. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$4. \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$$

$$6. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C;$$

$$7. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$8. \int e^u du = e^u + C;$$

$$9. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$10. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$11. \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tgu} + C;$$

$$12. \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctgu} + C;$$

$$13. \int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Вычисление интегралов с помощью преобразования подынтегрального выражения к табличной форме и использования свойств неопределенного интеграла называется непосредственным интегрированием.

Вспомогательные сведения

$$\begin{array}{ll} 1. & a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 3. \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \\ 2. & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad 4. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}. \end{array}$$

Пример 1. Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$1. \quad \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

$$2. \quad \int (2x + 7^x) dx = 2 \int x dx + \int 7^x dx = \frac{2x^2}{2} + \frac{7^x}{\ln 7} + C = x^2 + \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \int \sqrt{x^5} dx &= \int x^{5/2} dx = (\hat{o} \hat{i} \partial \hat{i} \acute{o} \ddot{e} \grave{a} (3)) = \\
 &= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \int \frac{dx}{x^2 + 16} &= \quad = (\hat{o} \hat{i} \partial \hat{i} \acute{o} \ddot{e} \grave{a} (13)) = \int \frac{dx}{x^2 + 4^2} = \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.
 \end{aligned}$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 25} \right| + C.$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

1.3. Основные методы вычисления неопределенных интегралов

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредствен-ным интегрированием.**

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция «подведения знака дифференциала»).

$$f'(u)du = d(f(u))$$

$$du = d(u + b), \quad b = \text{const};$$

Например:

$$du = \frac{1}{a} d(au + b), \quad a \neq 0, \quad a = \text{const};$$

$$\cos u du = d(\sin u).$$

Примеры

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (3x + 1)^9 dx &= \frac{1}{3} \int (3x + 1)^9 d(3x + 1) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{(3x + 1)^{10}}{10} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \frac{dx}{4x + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{d(4x + 5)}{4x + 5} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |4x + 5| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \int \cos\left(\frac{x}{5} + 7\right) dx &= 5 \int \cos\left(\frac{x}{5} + 7\right) d\left(\frac{x}{5} + 7\right) = \\ &= 5 \sin\left(\frac{x}{5} + 7\right) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл

$$\int f(u)du,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

$$t = 6x - 3$$

$$1. \quad \int (6x - 3)^5 dx = \left. dt = 6dx, dx = \frac{dt}{6} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{1}{6} \frac{t^6}{6} + C = (t = 6x - 3) =$$

$$= \frac{1}{36} (6x - 3)^6 + C.$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{5-7x} = \left| \begin{array}{c} t = 5-7x \\ dt = -7dx, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7} \ln|t| + C = (t = 5-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7} \ln|5-7x| + C.$$

$$3. \quad \int \sin\left(\frac{x}{2} - 8\right) dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} - 8, \\ dt = \frac{1}{2} dx, dx = 2dt \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = (t = \frac{x}{2} - 8) =$$

$$= -2 \cos\left(\frac{x}{2} - 8\right) + C.$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u dv = uv - \int v du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ –

дифференцируемые функции, называется

формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

более прост в вычислении, чем $\int v du$
 $\int u dv.$

Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{mx} dx, \int P_n(x)a^{mx} dx,$
 $\int P_n(x)\sin mx dx, \int P_n(x)\cos mx dx,$

где $P_n(x)$ – многочлен, m – число.

Здесь полагают $u = P_n(x),$

за dv обозначают остальные
сомножители.

2. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln x dx$, $\int P_n(x) \arcsin x dx$,
 $\int P_n(x) \arccos x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$.

Здесь полагают $P_n(x) dx = dv$

за u обозначают остальные

сомножители. $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$,

3. Интегралы вида

где a и b – числа.

e^{ax} .

За u можно принять функцию

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} 1. \int (2x + 5) \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x + 5, du = 2dx \\ dv = \cos x, v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\ &= (2x + 5) \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ &= (2x + 5) \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$