СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Военный учебный центр

ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В АСУ

Тема № 2. Автоматизация вторичной обработки РЛИ

Занятие № 5. Анализ сглаживания параметров линейной траектории по фиксированной выборке измеренных координат

Руководитель занятия:
доцент кафедры АСУ ВКС
капитан Тяпкин И.В.

Учебные вопросы:

1. **Физический смысл операции весового суммирования измеренных координат.**
2. **Показатель качества сглаживания и экстраполяции.**
3. **Расчет значений сглаживающей функции алгоритма оптимальной оценки параметров линейной траектории.**
4. **Синтез структурной схемы решающего устройства для оптимальной оценки параметров ЛО.**

Литература

1. В.Н. Ратушняк, С.В. Бейльман, И.В. Тяпкин. Основы обработки и передачи информации в автоматизированных системах управления. Часть II Вторичная обработка радиолокационной информации. – Красноярск: СФУ ВУЦ, 2021 – С. 67 - 83.
2. Справочник офицера воздушно-космической обороны / под. ред. С.К. Бурмистрова. – Тверь: ВА ВКО, 2008. – С.523–527.

Вопрос №1

Физический смысл операции весового суммирования измеренных координат.

Вначале обратим внимание на характер весовых коэффициентов сглаживания.

Анализ сглаживания проводился для параметров равномерного движения.

Для удобства анализа эти значения представлены на рис. 1

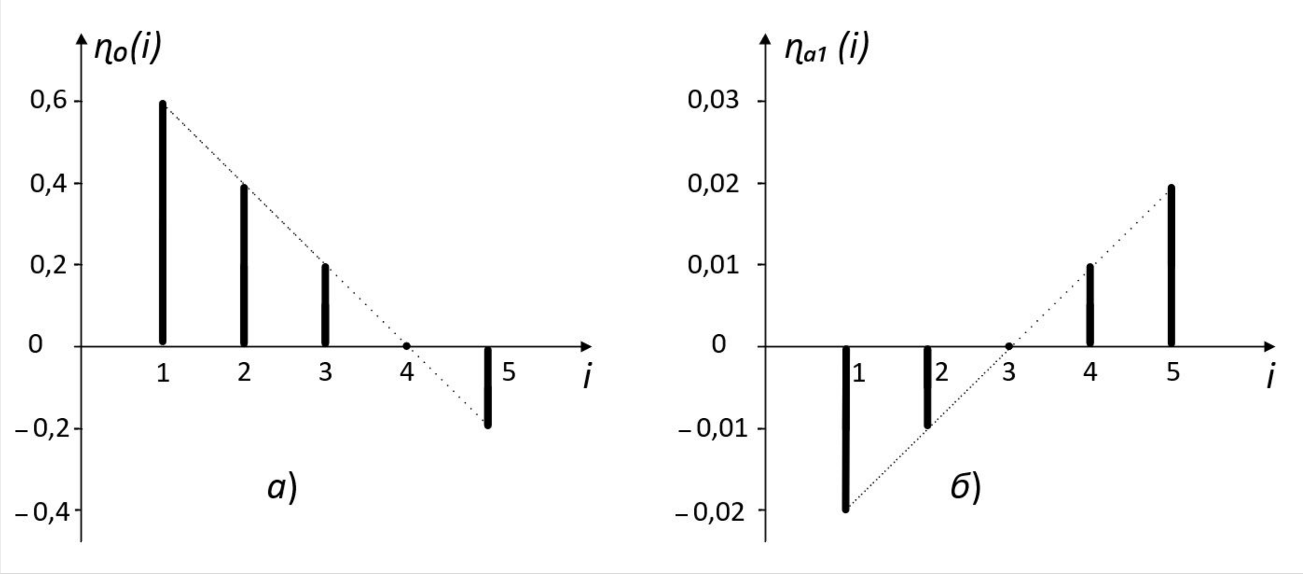


Рис. 1 Значения коэффициентов $\eta_o(i)$, $\eta_{a1}(i)$, при n=5, T_o=10 с.

Как следует из рис. 1, весовые коэффициенты $\eta_o(i)$, $\eta_{a1}(i)$ линейно зависят от порядкового номера измерения (от переменной i).

Весовые коэффициенты $\eta_o(i)$, используемые для оценки параметра a_o (начальной координаты траекторий), при изменении i от единицы до $2n/3$ принимают положительные значения, а для остальных i – отрицательные, включая ноль. Алгебраическая сумма весовых коэффициентов $\eta_o(i)$ при любых значениях n равна единице. Весовые коэффициенты $\eta_{a1}(i)$, используемые для оценки параметра a_1 (скорости), попарно симметричны: $\eta_{a1}(1)= -\eta_{a1}(n)$; $\eta_{a1}(2)= -\eta_{a1}(n-1)$. Поэтому алгебраическая сумма весовых коэффициентов $\eta_{a1}(i)$ при любых значениях n равна нулю.

Допустим, что после пяти измерений получена выборка координат $X=\|X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\|$. Каждая из измеренных координат содержит ее истинное значение $X(a,t_i)$ и погрешность измерения δX, т. е.

$$X_1 = X\left(a,t_1\right) + \delta X_1 = a_o + \delta X_1;$$

$$X_2 = X\left(a,t_2\right) + \delta X_2 = a_o + a_1 T_o + \delta X_2;$$

. . . .

$$X_5 = X\left(a,t_5\right) + \delta X_5 = a_o + 4a_1 T_o + \delta X_5.$$

Согласно приведенным соотношениям, измеренная координата содержит три составляющие – истинные параметры траектории a_0, a_1 и погрешность измерения δX_i:

$$X_i = a_o + (i-1)a_1 T_o + \delta X_i. \qquad (1)$$

Учитывая свойства весовых коэффициентов, выявим «механизм» оценивания параметров a_0, a_1 по фиксированной выборке измеренных координат X_i представленных выражением (1).

Подстановка выражения (1) позволяет записать сглаженное значение параметра a_0 в виде трех весовых сумм:

$$\bar{a}_o = \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) X_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) a_o + \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) \left[a_1 (i-1) T_o \right] + \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) \delta X_i.$$

Первая сумма определяет оценку начальной координаты траектории, равную истинному значению параметра a_0:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) a_o = a_o \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) = a_o,$$

Значение второй суммы

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_o(i)\left[a_1(i-1)T_o\right]=a_1T_o\sum_{i=1}^{n}\eta_o(i)[i-1]$$

оказывается равным нулю. Чтобы убедиться в этом, обратимся к рис. 1, *а*. Здесь для пятиэлементной выборки (для n=5) приведены значения весовых коэффициентов сглаживания $\eta_o(i)$. Как следует из рисунка, сумма произведений $\eta_{a1}(i)$ равна нулю.

Третья сумма $[\Sigma\eta_o(i)\delta X_i]$ определяет погрешность сглаживания параметра a_0. Характер этой суммы оценим графическим методом. Так как математические ожидания погрешностей измерения δX_i равны нулю, то их положительные и отрицательные значения равновероятны. Даже при небольшом размере анализируемой выборки весовое суммирование погрешностей δX_i приводит к их частичной компенсации.

Оценка параметра a_0 связана с тремя неделимыми процессами. ***Первый из них*** представляет фильтрацию параметра a_0, т. е. выделение значения интересуемого параметра из полученный выборки измеренных координат. Фильтрация использует свойство весовых коэффициентов сглаживания $\eta_o(i)$ – их алгебраическая сумма равна единице.

Второй процесс сводится к блокировке параметра a_1, которая направлена на получение оценки $\overline{a_0}$, не зависящей от параметра a_1 (скорости). Блокировка параметра a_1 использует свойство весовых коэффициентов $\eta_o(i)$, значения которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_o(i)[i-1] = 0.$$

Третий процесс представляет статистическую компенсацию погрешностей измерения δX_i, которая достигается за счет их весового суммирования. Эффективность компенсации тем выше, чем больше размер выборки измеренных координат. При больших значениях n

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} \eta_o(i)\delta X_i\right\} = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что выводы проведенного анализа справедливы для равномерного движения. Если реальная траектория отлична от линейной, например описывается квадратичной функцией

$$x(a,t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2,$$

то погрешности измерения δX_i при весовом суммировании также частично компенсируют друг друга. Однако ввиду отсутствия операции блокировки параметра a_2, получаемая оценка $\overline{a_0}$ будет отличаться от ее истинного значения a_0 на величину динамической погрешности

$$\Delta x_Д = \sum_{i=1}^{n} \eta_o(i) a_2 [i-1]^2 T_o^2 \neq 0.$$

Вопрос №2

Показатель качества сглаживания и экстраполяции.

Считаем, что модель траектории адекватна реальному движению. В таком случае оценки параметров траектории по фиксированной выборке измеренных координат являются несмещенными, эффективными и состоятельными, т. е. отвечают требованиям, предъявляемым к оптимальному оцениванию.

Свойство несмещенности $M\{\bar{R}\} = R$– математическое ожидание оценки параметра равно истинному значению параметра) вытекает из следующих рассуждений. Сглаженное значение параметра $\bar{R}$ (координаты, скорости, ускорения, экстраполированной координаты) является взвешенной суммой измеренных координат:

$$\bar{R} = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \dots + \eta_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i X_i .$$

Математическое ожидание суммы независимых измерений равно сумме математических ожиданий каждого из них:

$$M\left\{\overline{R}\right\} = M\left\{\eta_1 X_1\right\} + M\left\{\eta_2 X_2\right\} + \dots + M\left\{\eta_n X_n\right\} = \eta_1 M\left\{X_1\right\} + \eta_2 M\left\{X_2\right\} + \dots + \eta_n M\left\{X_n\right\}.$$

Математическое ожидание измеренной координаты при первичной обработке РЛИ равно ее истинному значению. Поэтому

$$M\left\{\overline{R}\right\} = \eta_1 X_{1\,\text{ист}} + \eta_2 X_{2\,\text{ист}} + \dots + \eta_n X_{n\,\text{ист}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i X_{i\,\text{ист}}.$$

Выражению $\sum \eta_i X_{i\,\text{ист}}$ соответствуют операции фильтрации параметра R, блокировки остальных параметров и статистической компенсации погрешностей измерения. Поскольку данная сумма не содержит погрешности измерения, то $\sum \eta_i X_{i\,\text{ист}} = R$, т. е. оценка $\bar{R}$ не будет смещенной.

Свойство эффективности ($D\{\delta\bar{R}\}=min$, дисперсия ошибки сглаживания параметра минимально возможна) непосредственно вытекает из принятого критерия оптимальности

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - x\left(\overline{a}, t_i\right)\right)^2 = \min,$$

согласно которому минимизируется статистический разброс ошибок измерения координат, являющихся причиной погрешности сглаживания параметра R.

Свойство состоятельности $P\{|\delta\bar{R}| \le \varepsilon\}=1$ при $n\to\infty$, т. е. с увеличением числа измерений абсолютное значение погрешности сглаживания монотонно уменьшается.

Сглаженное значение произвольного параметра R, получаемое в результате весового суммирования гауссовых случайных величин $(\eta_i X_i)$, также подчиняется нормальному закону распределения.

В силу несмещенности оценок весового суммирования математическое ожидание сглаженного параметра равно его истинному значению. Поэтому качество сглаживания параметра траектории характеризуется среднеквадратической погрешностью сглаживания: чем меньше среднеквадратическая погрешность сглаживания $\sigma\{\bar{R}\}$, тем выше точность оценки параметра R.

Вопрос №3

Расчет значений сглаживающей функции алгоритма оптимальной оценки параметров линейной траектории.

ЗАДАЧА № 1

Рассчитать и построить сглаженную траекторию ЛО по шести некоррелированным измерениям при условии:

1. **ЛО движется равномерно и прямолинейно по траектории, описываемой полиномом первой степени** $x(a, t) = a_0 + a_1 t = x_0 + V_x t$ **с векторами параметров:**

Вариант № 1	**Вариант № 2**	**Вариант № 3**
$\lVert a_k \rVert = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40000 \\ 100 \end{bmatrix}$	$\lVert a_k \rVert = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45000 \\ 500 \end{bmatrix}$	$\lVert a_k \rVert = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42000 \\ 300 \end{bmatrix}$

2. **Нижеуказанные измерения координаты** x_i **поступили в дискретные моменты времени, равные периоду обзора РЛС** $t_1 = t_2 = \ldots = t_6 = T_0 = 10''$:

М	**Вариант № 1**	**Вариант № 2**	**Вариант № 3**
x_1	**39 000**	**43 000**	**41 000**
x_2	**41 500**	**53 000**	**46 000**
x_3	**42 200**	**57 000**	**47 000**
x_4	**42 800**	**62 000**	**52 000**
x_5	**43 500**	**63 000**	**53 000**
x_6	**45 800**	**68 000**	**58 000**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Оптимальный алгоритм сглаживания координаты

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_0(i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)} x_i \quad \textbf{(14 – 2.3)}$$

Согласно выражению сглаженные значения координаты будут равны:

при n = 1

при n = 2

при n = 3

при n = 4

при n = 5

при n = 6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Оптимальный алгоритм сглаживания координаты

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_0(i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i-2n-2}{n(n+1)} x_i \quad \textbf{(14 – 2.3)}$$

Согласно выражению сглаженные значения координаты будут равны:

при n = 1

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i-2n-2}{n(n+1)} x_i = \frac{6\times1-2\times1-2}{1\times(1+1)} x_1 = \frac{2}{2} x_1 = x_1$$

при n = 2

$$\hat{x}_n = \frac{6\times1-2\times2-2}{2\times(2+1)} x_1 + \frac{6\times2-2\times2-2}{2\times(2+1)} x_2 = \frac{0}{6} x_1 + \frac{6}{6} x_2 = x_2$$

при n = 3

$$\hat{x}_n = -\frac{1}{6} x_1 + \frac{2}{6} x_2 + \frac{5}{6} x_3$$

при n = 4

$$\hat{x}_n = -\frac{4}{20} x_1 + \frac{2}{20} x_2 + \frac{8}{20} x_3 + \frac{14}{20} x_4$$

при n = 5

$$\hat{x}_n = -\frac{6}{30} x_1 + \frac{6}{30} x_3 + \frac{12}{30} x_4 + \frac{18}{30} x_5$$

при n = 6

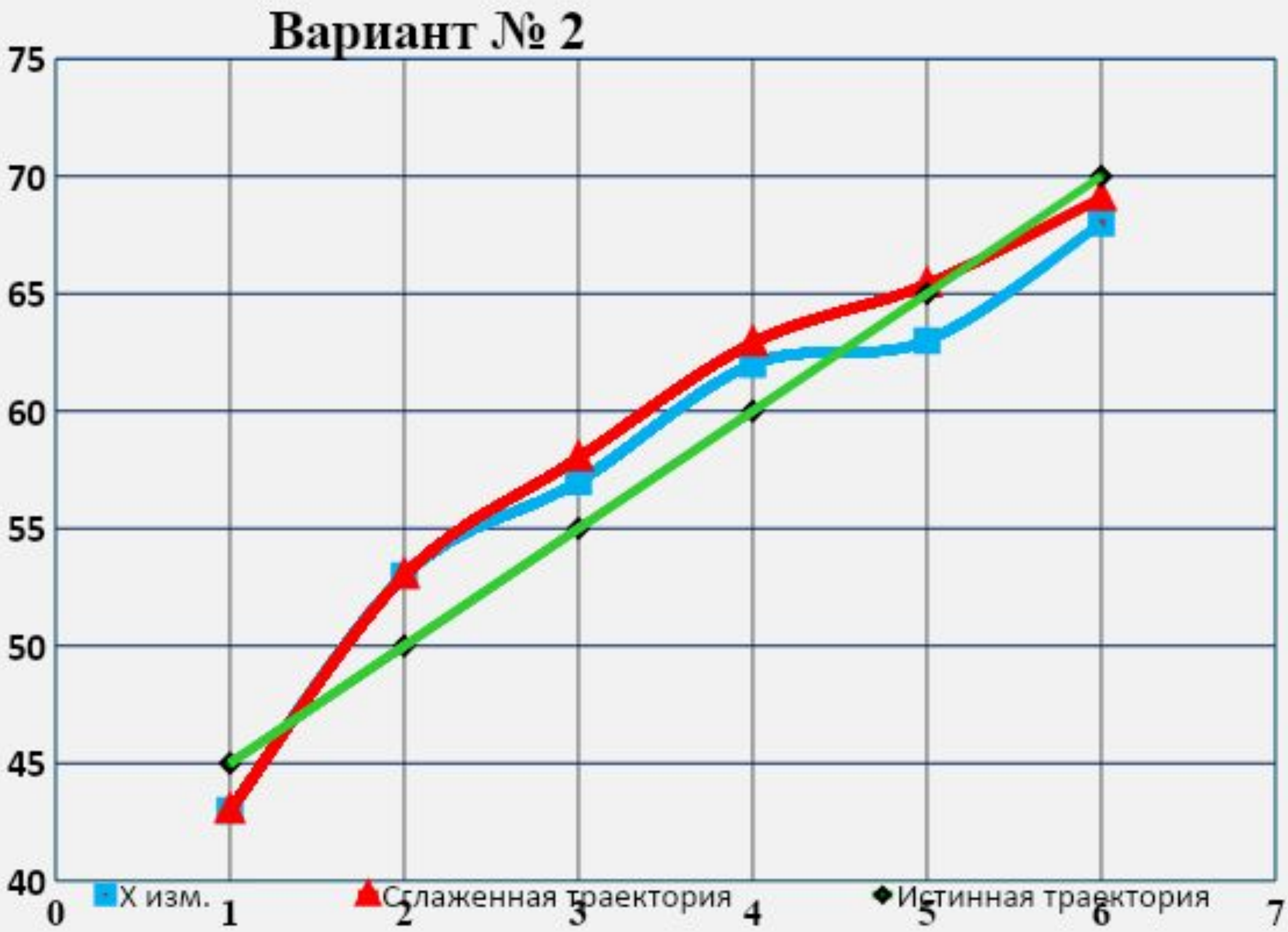
$$\hat{x}_n = -\frac{8}{42} x_1 - \frac{2}{42} x_2 + \frac{4}{42} x_3 + \frac{10}{42} x_4 + \frac{16}{42} x_5 + \frac{22}{42} x_6$$

Траектория № 1				Траектория № 2			Траектория № 3		
$x(t)$ = 40 км + 100 м/с t				$x(t)$ = 45 км + 500 м/с t			$x(t)$ = 42 км + 300 м/с t		
t_i	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$
t_1	40	39		45	43		42	41	
t_2	41	41,5		50	53		45	46	
t_3	42	42,2		55	57		48	47	
t_4	43	42,8		60	62		51	52	
t_5	44	43,5		65	63		54	53	
t_6	45	45,8		70	68		57	58	

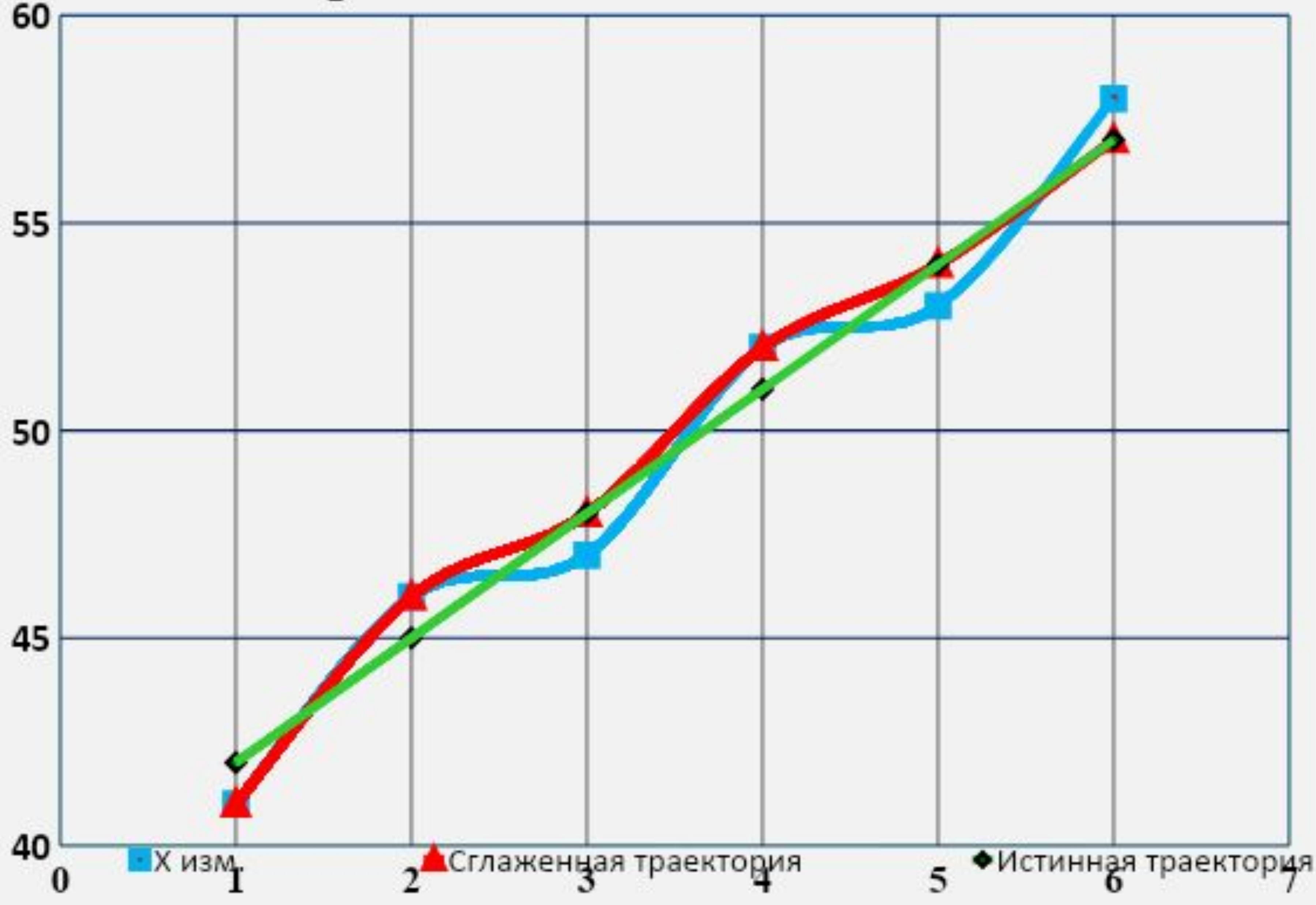
Траектория № 1				Траектория № 2			Траектория № 3		
$x(t)$ = 40 км + 100 м/с t				$x(t)$ = 45 км + 500 м/с t			$x(t)$ = 42 км + 300 м/с t		
t_i	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$	$X_{полин}$	$X_{изм}$	$X_{сгл}$
t_1	40	39	39	45	43	43	42	41	41
t_2	41	41,5	41,5	50	53	53	45	46	46
t_3	42	42,2	42,49	55	57	58	48	47	47,66
t_4	43	42,8	43,19	60	62	62,9	51	52	51,6
t_5	44	43,5	43,86	65	63	65,4	54	53	53,8
t_6	45	45,8	45,35	70	68	69,08	57	58	57,43

Вариант № 1

46
45
44
43
42
41
40
39
38
0
1
2
3
4
5
6
7
X изм
Сглаженная траектория
Истинная траектория


Вариант № 2
75
70
65
60
55
50
45
40
0
1
2
3
4
5
6
7
X изм.
Сглаженная траектория
Истинная траектория

Вариант № 3



60
55
50
45
40
0
1
2
3
4
5
6
7
X изм
Сглаженная траектория
Истинная траектория

ЗАДАЧА № 2

Рассчитать и построить весовые функции $\eta_0(i)$ и $\eta_1(i)$ оценок (измерений) координаты x и скорости V_x при количестве наблюдений n = 3, 4, 5, 6.

весовая функции $\eta_0(i)$ оценки координаты x

$$\eta_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)}$$

весовая функции $\eta_1(i)$ оценки скорости V_x.

$$\eta_1(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6(2i - n - 1)}{T_0(n^2 - 1)n}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

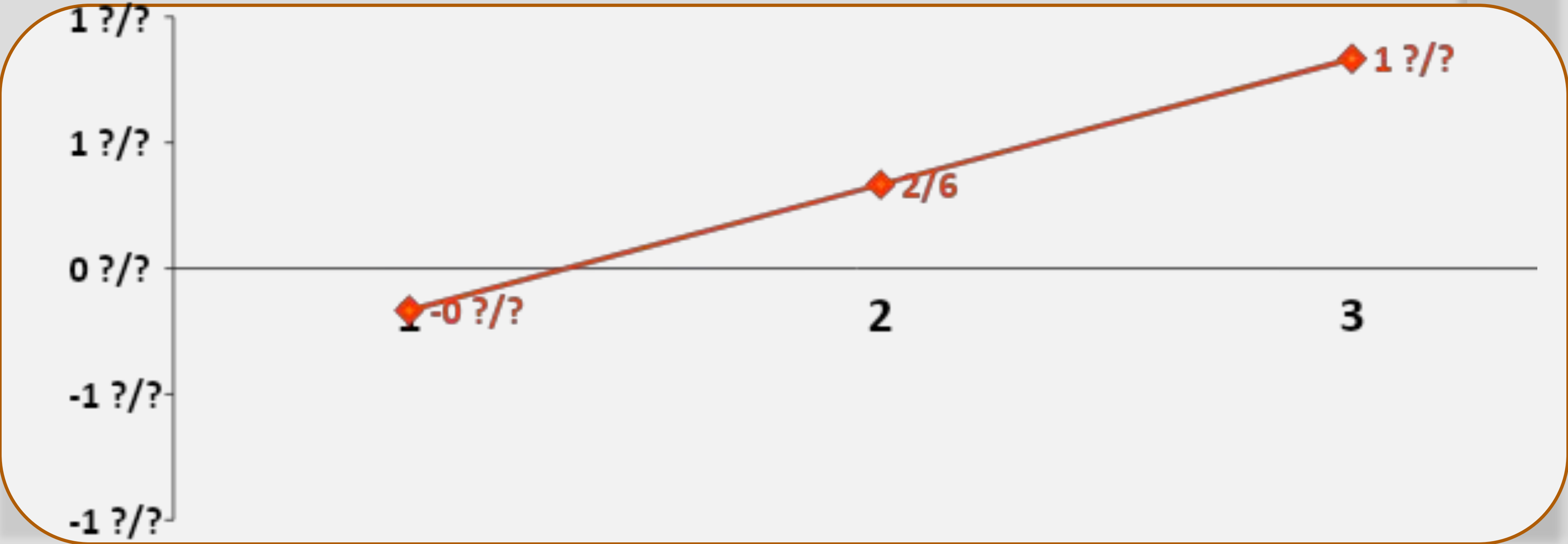
В соответствии с выражением

$$\eta_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)}$$

значения весовых коэффициентов функции $\eta_0(i)$ оценки координаты x будут равны:

при n = 3

$\eta_0(1)$ = - 1/6; $\eta_0(2)$ = 2/6; $\eta_0(3)$ = 5/6

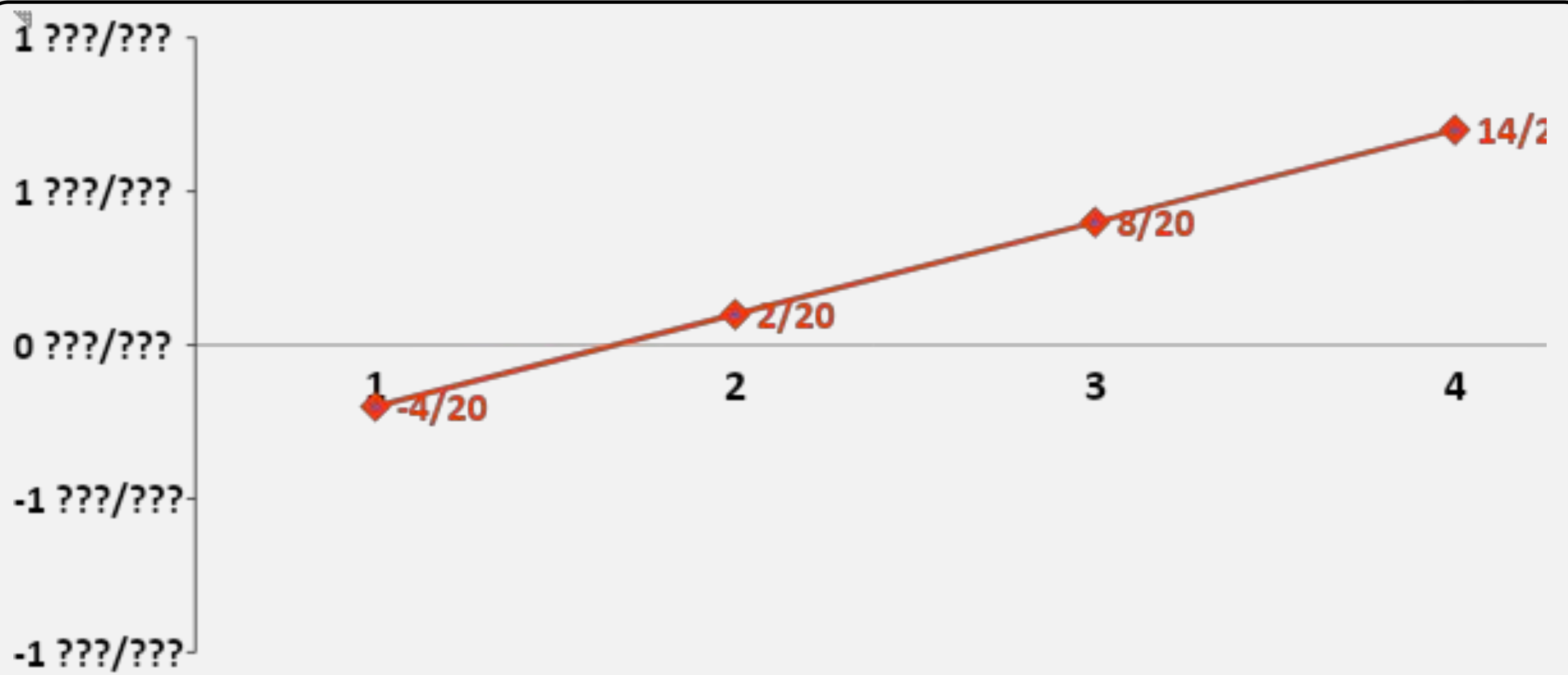


Значения весовых коэффициентов функции $\eta_0(i)$ оценки координаты x будут равны при $n = 4$:

$$\eta_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)}$$

при n = 4

$\eta_0(1) = -4/20$; $\eta_0(2) = 2/20$; $\eta_0(3) = 8/20$; $\eta_0(4) = 14/20$

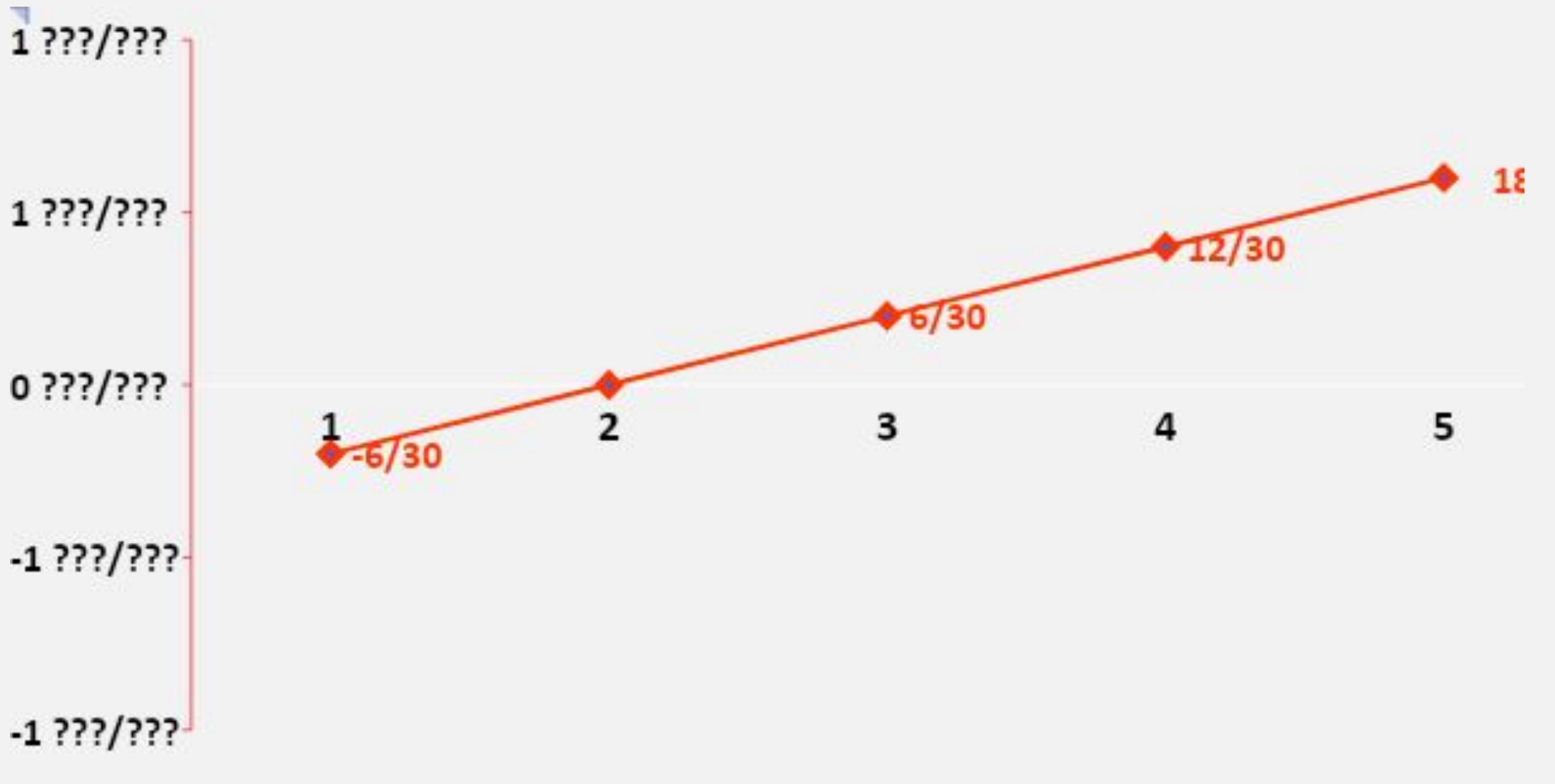


Значения весовых коэффициентов функции $\eta_0(i)$ оценки координаты x при n = 5 будут равны:

$$\eta_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6i - 2n - 2}{n(n+1)}$$

при n = 5

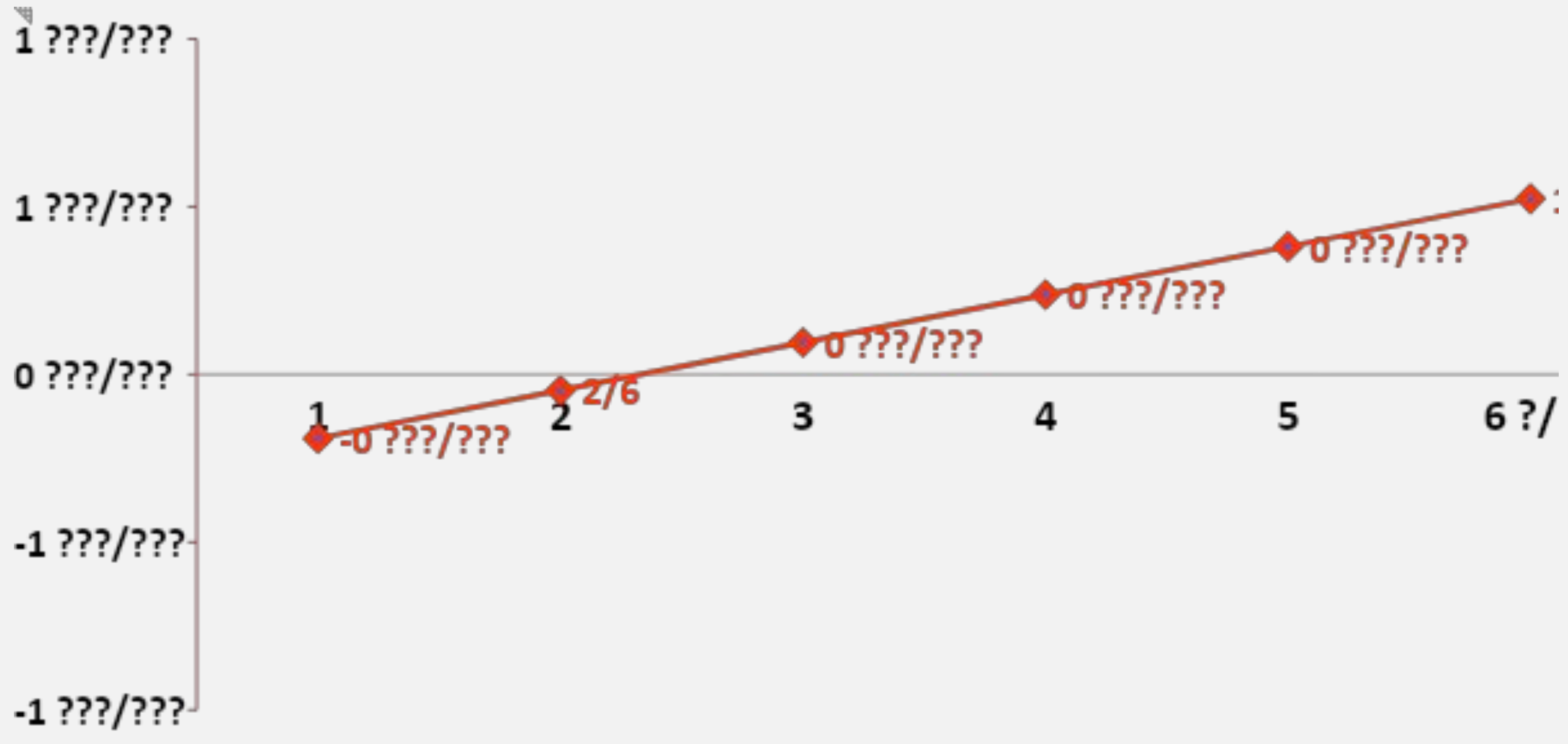
η_0(1) = - 6/30; η_0(3) = 6/30; η_0(4) = 12/30; η_0(5) = 18/30



Значения весовых коэффициентов функции $\eta_0(i)$ оценки координаты x будут равны:

при n = 6

$\eta_0(1) = -8/42$; $\eta_0(2) = -2/42$; $\eta_0(3) = 4/42$;
$\eta_0(4) = 10/42$; $\eta_0(5) = 16/42$; $\eta_0(6) = 22/42$



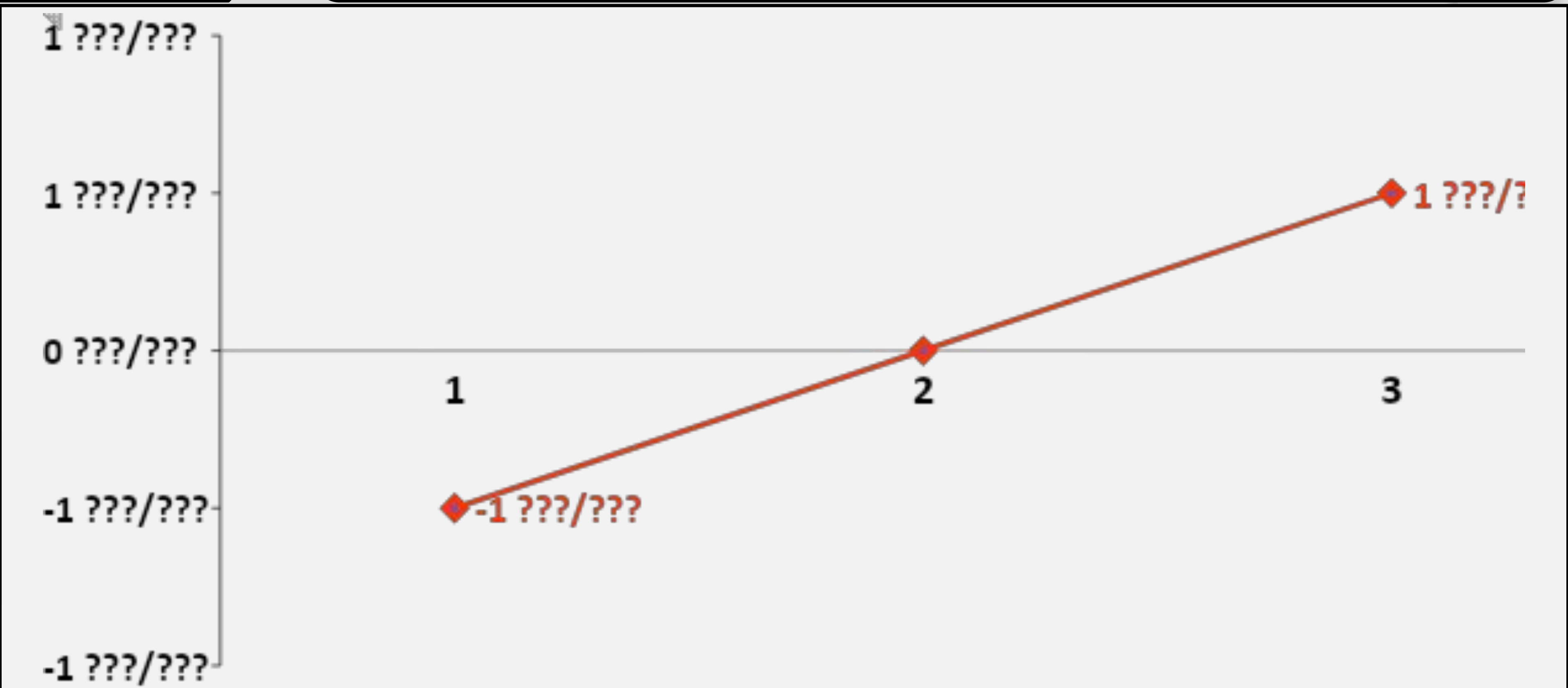
В соответствии с выражением

$$\eta_1(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6(2i-n-1)}{T_0(n^2-1)n}$$

значения весовых коэффициентов функции $\eta_1(i)$ оценки приращения координаты x (скорости) будут равны:

при n = 3

$\eta_1(1) = -(1/2)T_0$; $\eta_1(2) = 0$; $\eta_1(3) = (1/2)T_0$



ЗАДАЧА № 3

Определить дисперсию ошибок оценки параметра (сглаженной координаты) линейной траектории при числе равноточных измерений $n = 3, 4, 5, 6$.

Величина дисперсии ошибки сглаженной координаты *x*

$$\sigma^2_{\hat{x}_n} = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}\sigma^2_x$$

Величина дисперсии ошибки сглаженной координаты *x*

$$\sigma^2_{\hat{x}_n} = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}\sigma^2_x$$

при n = 3

$$\sigma^2_{\hat{x}_3} = \frac{2(2\times 3-1)}{3(3+1)}\sigma^2_x = \frac{10}{12}\sigma^2_x = \frac{5}{6}\sigma^2_x$$

при n = 4

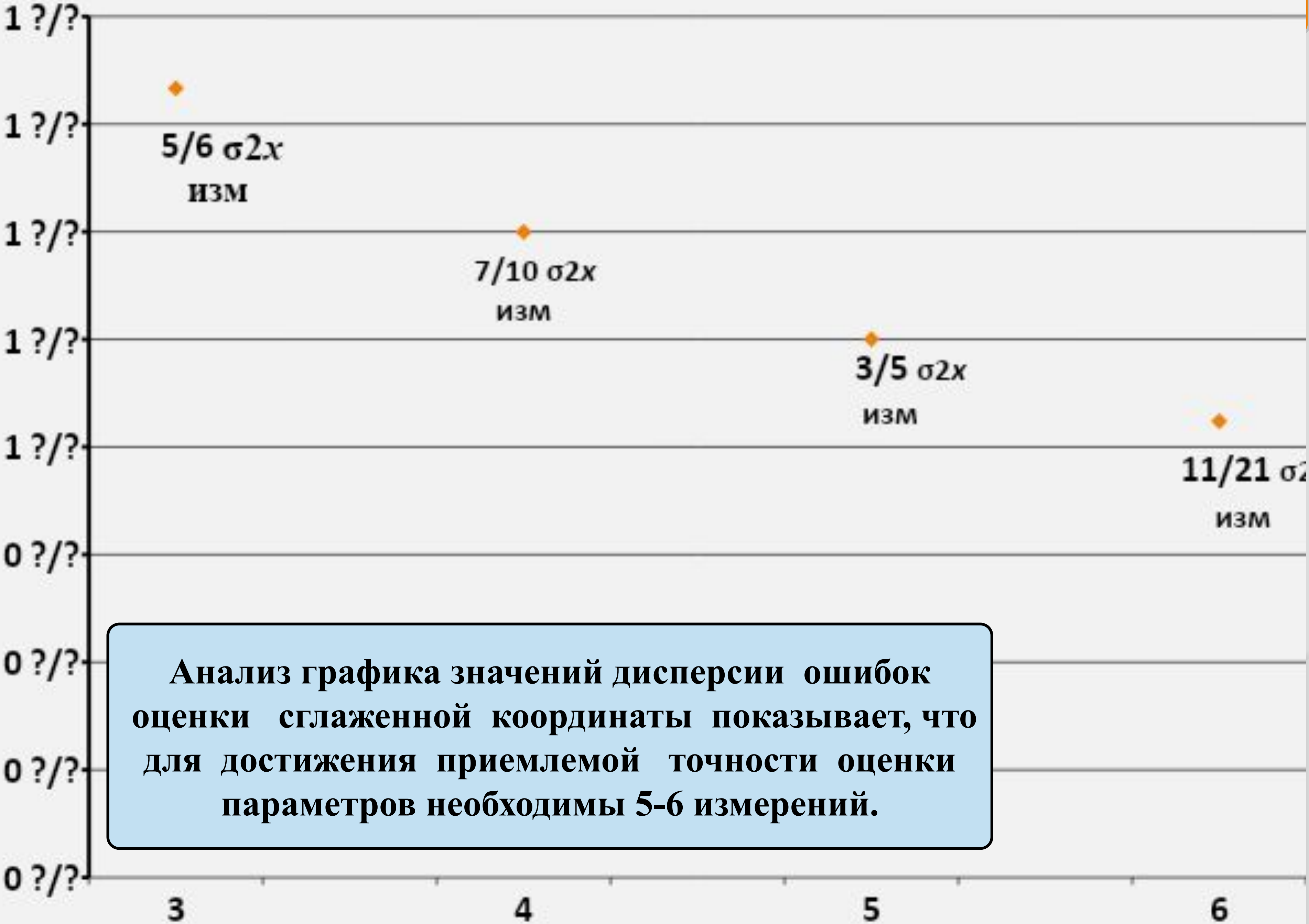
$$\sigma^2_{\hat{x}_4} = \frac{2(2\times 4-1)}{4(4+1)}\sigma^2_x = \frac{14}{20}\sigma^2_x = \frac{7}{10}\sigma^2_x$$

при n = 5

$$\sigma^2_{\hat{x}_5} = \frac{2(2\times 5-1)}{5(5+1)}\sigma^2_x = \frac{18}{30}\sigma^2_x = \frac{9}{15}\sigma^2_x$$

при n = 6

$$\sigma^2_{\hat{x}_6} = \frac{2(2\times 6-1)}{6(6+1)}\sigma^2_x = \frac{22}{42}\sigma^2_x = \frac{11}{21}\sigma^2_x$$



Анализ графика значений дисперсии ошибок оценки сглаженной координаты показывает, что для достижения приемлемой точности оценки параметров необходимы 5-6 измерений.

Вопрос №4

Синтез структурной схемы решающего устройства для оптимальной оценки параметров ЛО.

ЗАДАНИЕ № 1

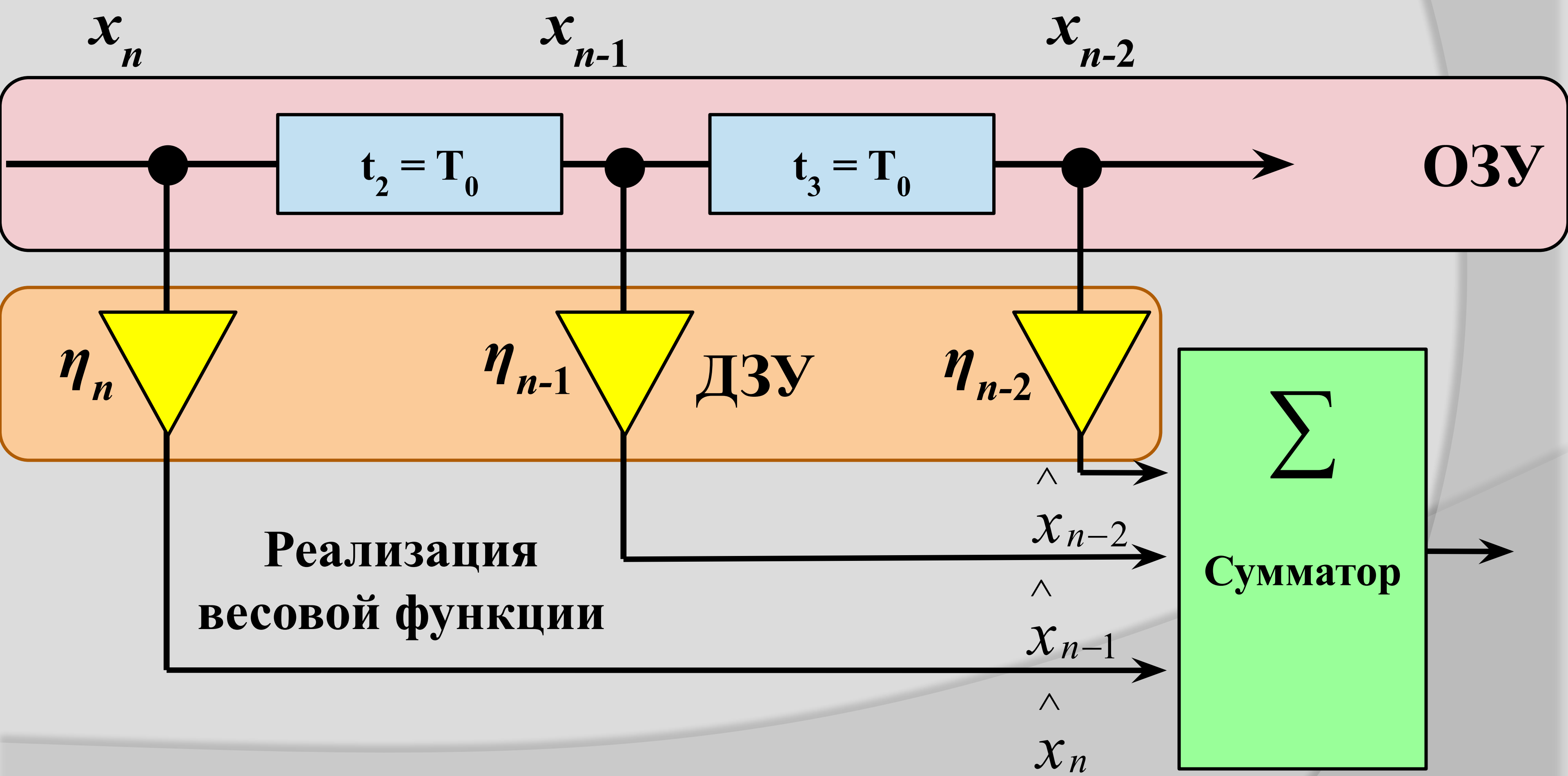
Синтезировать структурную схему решающего устройства, реализующего оптимальный алгоритм оценки параметров линейной траектории ЛО по трем последним измерениям координаты *x*.

В состав схемы решающего устройства входит:

1. Оперативное запоминающее устройство, предназначенное для хранения предыдущих измерений координаты *x*.
2. Долговременное запоминающее устройство, предназначенное для хранения в виде констант весовых функций.
3. Суммирующее устройство.

Измеренное на текущем (n-ом) обзоре взвешивается с весовым коэффициентом η_n.

Хранящиеся в ОЗУ измеренные значения координат, полученные в предыдущих ($n-1$) и ($n-2$) обзорах, после задержки на T_0 и $2T_0$ взвешиваются со своими весовыми коэффициентами.



Взвешенные значения координат одновременно поступают на вход суммирующего устройства.

С выхода суммирующего устройства сглаженное значение координаты поступают потребителю информации.

Для одновременной оценки координаты, скорости и экстраполированной координаты необходимо иметь три различных решающих устройства для реализации соответствующих алгоритмов.

Общие выводы:

1. Оценивание параметров траектории (a_0, a_1) предполагает использование всей совокупности измеренных координат $x = \| x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n \|$. В соответствии с изложенным рассмотренный метод оценивания параметров траектории именуется оптимальным сглаживанием по фиксированной выборке измеренных координат (КТ).

2. Каждой из измеренных координат при оценке параметров траектории соответствует свой «вес», определяемый значением весовых коэффициентов $\eta(i)$.

3. Значения весовых коэффициентов $\eta(i)$ зависят от числа измерений (n) и их порядкового номера (i).

4. Сглаживание по фиксированной выборке измеренных координат предусматривает *n* операций весового суммирования , что согласуется с принятыми допущениями и характером распределения истинных КТ.

5. Величина ошибок оценок параметров линейной траектории ЛО прямо пропорциональна точности измерения координат и обратно пропорциональна количеству измерений *n*.

6. Для вычисления значения сглаженной и экстраполированной координаты с точностью не ниже СКО необходимы 5-6 измерений. Рассмотренный метод наиболее полно учитывает статистику измерений, т.к. не накладываются ограничения на связи между измерениями в различных обзорах.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку задачи оценки параметров траектории.
2. Поясните вероятностный смысл функции правдоподобия.
3. К каким операциям сводится оценивание совокупности параметров согласно критерию максимального правдоподобия?
4. Поясните допущения на закон распределения измеренных координат при обосновании алгоритмов вторичной обработки РЛИ.
5. Сформулируйте условие критерия наименьших квадратов.
6. Поясните методику решения задачи оптимального оценивания параметров траектории.
7. Дайте характеристику соотношений для оценки параметров траектории по фиксированной выборке измеренных координат.
8. Какие параметры траектории подлежат оцениванию при равноускоренном движении?
9. Поясните физический смысл весового суммирования измеренных координат при оценивании параметров траектории.
10. Поясните понятия несмещенности, эффективности и состоятельности оценок параметров траектории.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ