Раздел 3.

Математическое моделирование дискретных систем

1. Проблема управления потоками товаров и услуг

Сфера услуг

- обслуживание клиентов в банке
- регистрация пассажиров в аэропорту
- предоставление мест в гостинице

Менеджмент и администрирование

- Рассмотрение предложений о купле-продаже товаров и услуг и принятие решений

Логистика

- организация товароприёмных и товароотпускных работ

Марке

- планир мощно сбыта

Информационные услуги

- обеспечение доступа клиентов к сайту фирмы

Очередь к складскому терминалу

Очередь к пункту обслуживания

Очередь к администра-тору

«Очередь» клиентов, ожидающих, когда товар будет произведён

«Очередь» запросов к сайту

1. Проблема управления потоками товаров и услуг

Сфера услуг

- обслуживание клиентов в банке
- регистрация пассажиров в аэропорту
- предоставление мест в гостинице

Менеджмент и администрирование

- Рассмотрение предложений о купле-продаже товаров и услуг и принятие решений

Логистика

- организация товароприёмных и товароотпускных работ

Маркетинг

- планирование мощностей каналов сбыта

Информационные услуги

- обеспечение доступа клиентов к сайту фирмы

1.

ЗАДАЧИ

Овладеть терминологией ТМО в степени, достаточной для понимания специальной литературы

Научиться распознавать типичные ситуации в бизнесе, связанные с запросами на обслуживание, сводимые к типовым моделям ТМО

Научиться соизмерять ущерб, связанный с возникновением очереди, с затратами на его предотвращение

Научиться находить в литературе и применять на практике модели управления потоками товаров и услуг, подходящие к ситуациям, связанным с бизнесом, в котором вы участвуете

2. ТМО: предмет и основные понятия

Предмет теории массового обслуживания

- Статистические характеристики систем, представимых в форме двух или более взаимодействующих потоков событий с заданными распределениями вероятностей

Запрос на обслуживание (требование, транзакт)

- Событие, создающее потенциальную возможность благоприятного (желаемого) эффекта для порождающей его системы

Обслуживающая система (узел)

- Система, порождающая события, комплементарные запросам на обслуживание определённого типа и реализующие связанный с ними полезный эффект

2.

Поток заявок

- последовательность транзактов, упорядоченная по времени их возникновения

Обслуживание

- Процесс взаимодействия транзакта с узлом
  - Характеризуется затратами времени на обслуживание

Очередь

- множество транзактов, ожидающих обслуживания

Ожидание

- Состояние транзакта между моментом возникновения и моментом начала обслуживания
- Состояние узла в период, когда отсутствуют транзакты, претендующие на обслуживание

2.

Поток заявок

- **Регулярный** — Транзакты возникают через одинаковые промежутки времени
- **Ординарный** — Можно указать достаточно малый интервал *t*, для которого возникновение транзакта окажется редким событием
- **Стационарный** — Вероятность возникновения транзакта в течение интервала *t* остаётся постоянной с течением времени
- **Без последействия** — Вероятность возникновения транзакта не зависит от того, давно ли возникали другие транзакты

Простейший (пуассоновский) поток

Никогда не может быть процессом без последействия

2.

- Для моделирования систем массового обслуживания важно знать характер потока заявок.
- Для многих потоков в справочниках можно найти формулы для расчёта характеристик СМО.
- Ошибка в определении характера потока заявок приводит к ошибке в оценке параметров СМО и, как следствие, либо к избыточным вложениям в их создание, либо к неработоспособности СМО.

Поток Пальма

Стационарный ординарный поток, в котором длительность промежутков времени между возникновением транзактов является независимой случайной величиной

Поток Эрланга порядка *k*

Продолжительность промежутков между возникновением транзактов представляет собой сумму *k* независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону

Поток Пуассона (простейший)

Характеризуется:

- экспоненциальным (показательным) распределением продолжительности промежутков между возникновением транзактов
- пуассоновским распределением вероятности возникновения *n* транзактов за период *t*

Плотность распределения интервала времени между возникновением двух транзактов в потоке Эрланга

$$f(\tau) = \frac{\lambda(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda\tau}$$

λ – среднее число заявок в единицу времен   и

k – порядок потока Эрланга

τ – длительность промежутка времени

Дискретное распределение Пуассона

$$p(k,\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$$

λ – среднее число заявок в единицу времени

k – число транзактов, возникших в течение промежутка времени τ

Экспоненциальное распределение

$$F(\tau) = \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t} \cdot \tau}$$

t – средняя продолжительность времени между транзактами

τ – заданный промежуток времени между транзактами

$F(\tau)$ – вероятность того, что промежуток времени между транзактами не превысит величины τ

2.

- Некоторые важные закономерности
  - СМО заданной мощности обработает:
    - больше всего заявок, если поток регулярный
    - меньше заявок, если нерегулярный поток не является потоком без последействия;
    - меньше всего заявок, если поток является потоком без последействия
  - Поток заявок, порождаемый рабочим, выпускающим однотипные детали на станке, не является потоком без последействия
    - поэтому для его моделирования нельзя применять формулы Эрланга для простейшего потока
    - если время производства одной детали (почти) постоянно, такой поток будет (почти) регулярным
  - Поток покупателей в крупном магазине близок к простейшему
    - несмотря на то, что каждый покупатель ходит в магазин через более-менее определённые периоды времени
    - дело в том, что покупателей очень много
  - Поток заселяющихся в гостиницу близок к простейшему
    - это не так, если заселяются организованные группы туристов или вблизи гостиницы проводится коллективное мероприятие
    - зато время обслуживания в этом случае, как правило, не распределено экспоненциально, и формулы для простейшей СМО всё равно не применимы

2.

Классификация систем массового обслуживания

С ожиданием

- одноканальная
- многоканальная

- замкнутая
- разомкнутая

С отказами

- одноканальная
- многоканальная

С ожиданием и ограничением на длину очереди

- одноканальная
- многоканальная

- замкнутая
- разомкнутая

3. Характеристики и необходимое условие работоспособности СМО

(на примере многоканальной СМО с неограниченной очередью)

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что все *n* каналов свободны

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}\right) + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)}}$$

3

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что свободно n–k каналов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \quad 1 \le k \le n$$

- Вероятность наличия очереди из $k - n$ заявок

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n}} P_0, \quad k \ge n$$

3

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность наличия очереди

$$P_Q = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} P_0, \quad \alpha < n$$

- Средняя длина очереди

$$L_Q = \frac{\alpha}{n-\alpha} P_k, \quad k = n, \alpha < n$$

3

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени
t – среднее время обслуживания транзакта
$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени
$a = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов
n – число каналов

- Среднее время ожидания в очереди

$$t_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

- Коэффициент простоя каналов

$$K_s = 1 - \alpha / n$$

- Необходимое условие работоспособности СМО

$$\alpha < n$$

4. Обоснование инвестиционных решений с использованием ТМО

- Потери от ожидания в очереди в расчёте на одну заявку: $c_W \cdot t_Q$ (руб.)
- Инвестиции в создание дополнительного канала: i (руб.)
- Текущие затраты на функционирование канала: c_T (руб./год)

Дополнительные эксплуатационные затраты

Число дополнительных каналов

Экономия на ожидании в очереди

Единица измерения λ – заявок в год

$$\min_m i \cdot m + \frac{c_T m - c_W \cdot \lambda \cdot (t_Q(n) - t_Q(n+m))}{r / 100\%}$$

Альтернативная стоимость капитала

Число существующих каналов