



Раздел 3.

***Математическое
моделирование дискретных
систем***

1. Проблема управления потоками товаров и услуг

Сфера услуг

- обслуживание клиентов в банке
- регистрация пассажиров в аэропорту
- предоставление мест в гостинице

Менеджмент и администрирование

- Рассмотрение предложений о купле-продаже товаров и услуг и принятие решений

Логистика

- организация товароприёмных и товароотпускных работ

Очередь к пункту обслуживания

Маркетинг

- планирование мощностей сбыта

Очередь к администратору

«Очередь» клиентов, ожидающих, когда товар будет произведён

Информационные услуги

- обеспечение доступа клиентов к сайту фирмы

Очередь к складскому терминалу

«Очередь» запросов к сайту



1. Проблема управления потоками товаров и услуг

Сфера услуг

- обслуживание клиентов в банке
- регистрация пассажиров в аэропорту
- предоставление мест в гостинице

Менеджмент и администрирование

- Рассмотрение предложений о купле-продаже товаров и услуг и принятие решений

Логистика

- организация товароприёмных и товароотпускных работ

Маркетинг

- планирование мощностей каналов сбыта

Информационные услуги

- обеспечение доступа клиентов к сайту фирмы



1.





2. ТМО: предмет и основные понятия

Предмет теории массового обслуживания

- Статистические характеристики систем, представимых в форме двух или более взаимодействующих потоков событий с заданными распределениями вероятностей

Запрос на обслуживание (требование, транзакт)

- Событие, создающее потенциальную возможность благоприятного (желаемого) эффекта для порождающей его системы

Обслуживающая система (узел)

- Система, порождающая события, комплементарные запросам на обслуживание определённого типа и реализующие связанный с ними полезный эффект



2.

Поток заявок

- последовательность транзактов, упорядоченная по времени их возникновения

Обслуживание

- Процесс взаимодействия транзакта с узлом
 - Характеризуется затратами времени на обслуживание

Очередь

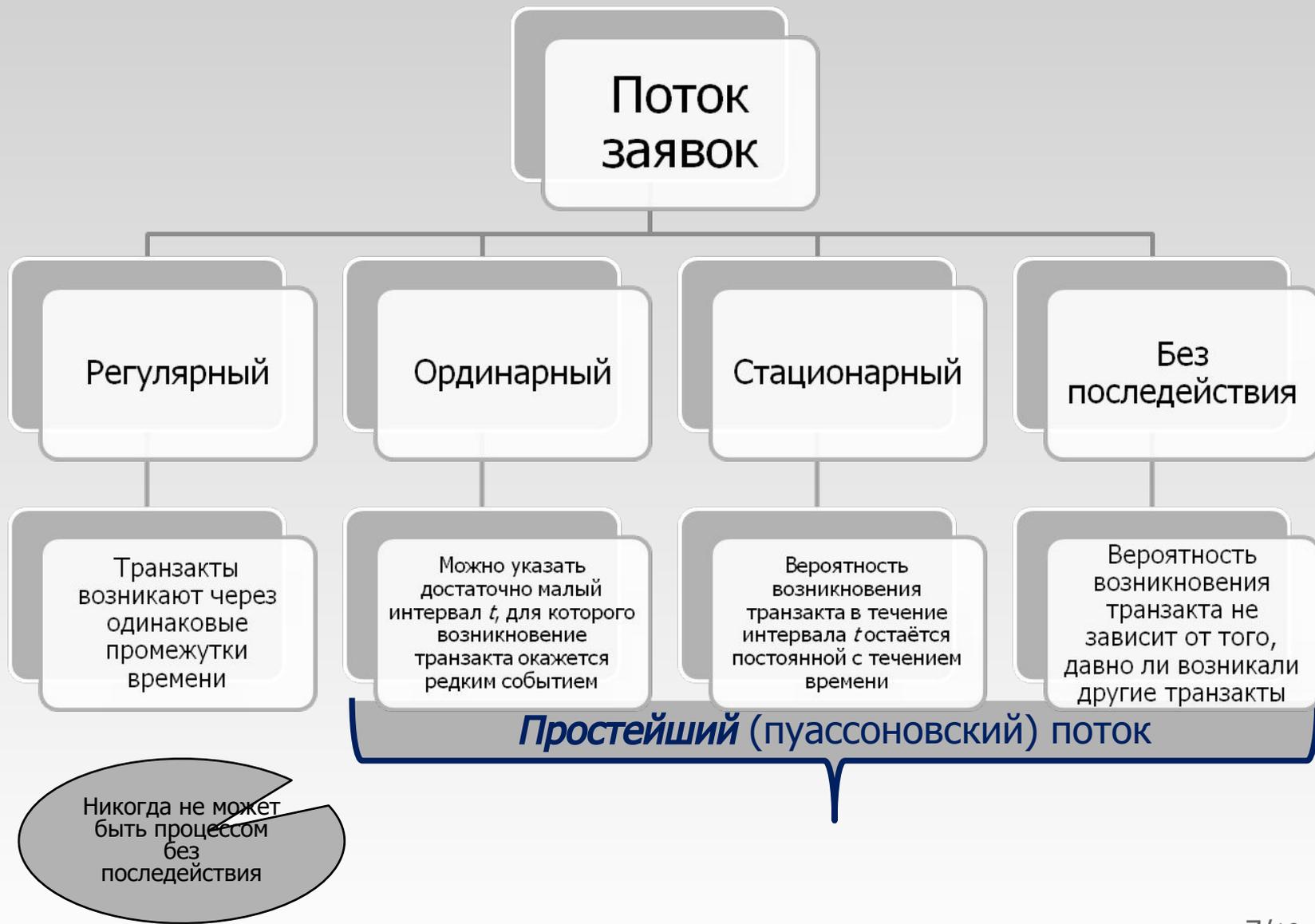
- множество транзактов, ожидающих обслуживания

Ожидание

- Состояние транзакта между моментом возникновения и моментом начала обслуживания
- Состояние узла в период, когда отсутствуют транзакты, претендующие на обслуживание



2.





2.

- Для моделирования систем массового обслуживания важно знать характер потока заявок.
- Для многих потоков в справочниках можно найти формулы для расчёта характеристик СМО.
- Ошибка в определении характера потока заявок приводит к ошибке в оценке параметров СМО и, как следствие, либо к избыточным вложениям в их создание, либо к неработоспособности СМО.

Поток Пальма

Стационарный ординарный поток, в котором длительность промежутков времени между возникновением транзактов является независимой случайной величиной



Поток Эрланга порядка k

Продолжительность промежутков между возникновением транзактов представляет собой сумму k независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону



Поток Пуассона (простейший)

Характеризуется:

- экспоненциальным (показательным) распределением продолжительности промежутков между возникновением транзактов
- пуассоновским распределением вероятности возникновения n транзактов за период t



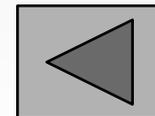
Плотность распределения интервала времени между возникновением двух транзактов в потоке Эрланга

$$f(\tau) = \frac{\lambda(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda\tau}$$

λ среднее число заявок в единицу времени и

k порядок потока Эрланга

τ длительность промежутка времени

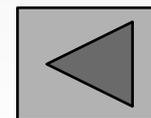




Дискретное распределение Пуассона

$$p(k, \tau) = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau}$$

λ среднее число заявок в единицу времени и
 k число транзактов, возникших в течение
промежутка времени τ





Экспоненциальное распределение

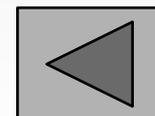
$$F(\tau) = \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t} \cdot \tau}$$

t средняя продолжительность времени между транзактами

τ заданный промежуток времени между транзактами

$F(\tau)$ вероятность того, что промежуток времени

между транзактами не превысит величины τ





2.

- Некоторые важные закономерности
 - ◆ СМО заданной мощности обрабатывает:
 - ◆ больше всего заявок, если поток регулярный
 - ◆ меньше заявок, если нерегулярный поток не является потоком без последствия;
 - ◆ меньше всего заявок, если поток является потоком без последствия
 - ◆ Поток заявок, порождаемый рабочим, выпускающим однотипные детали на станке, не является потоком без последствия
 - ◆ поэтому для его моделирования нельзя применять формулы Эрланга для простейшего потока
 - ◆ если время производства одной детали (почти) постоянно, такой поток будет (почти) регулярным
 - ◆ Поток покупателей в крупном магазине близок к простейшему
 - ◆ несмотря на то, что каждый покупатель ходит в магазин через более-менее определённые периоды времени
 - ◆ дело в том, что покупателей очень много
 - ◆ Поток заселяющихся в гостиницу близок к простейшему
 - ◆ это не так, если заселяются организованные группы туристов или вблизи гостиницы проводится коллективное мероприятие
 - ◆ зато время обслуживания в этом случае, как правило, не распределено экспоненциально, и формулы для простейшей СМО всё равно не применимы



Классификация систем массового обслуживания

2.





3. Характеристики и необходимое условие работоспособности СМО

(на примере многоканальной СМО с неограниченной очередью)

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ – среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что все n каналов свободны

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} \right) + \frac{\alpha^n}{n!(1 - \alpha/n)}}$$



3

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ – среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что свободно $n-k$ каналов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \quad 1 \leq k \leq n$$

- Вероятность наличия очереди из $k - n$ заявок

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n}} P_0, \quad k \geq n$$



λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$a = \lambda/\mu$ – среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность наличия очереди

$$P_Q = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} P_0, \quad \alpha < n$$

- Средняя длина очереди

$$L_Q = \frac{\alpha}{n-\alpha} P_k, \quad k = n, \alpha < n$$



3

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$\alpha = \lambda/\mu$ – среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Среднее время ожидания в очереди

$$t_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

- Коэффициент простоя каналов

$$K_S = 1 - \alpha / n$$

- Необходимое условие работоспособности СМО

$$\alpha < n$$

4. Обоснование инвестиционных решений с использованием ТМО

- Потери от ожидания в очереди в расчёте на одну заявку: $c_w \cdot t_Q$ (руб.)

- Инвестиции в создание дополнительного канала: i (руб.)
- Текущие затраты на функционирование канала: c_T (руб./год)

