Численное решение

систем линейных алгебраических уравнений

С Л А У

Общий вид СЛАУ

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

где a – коэффициенты системы,

b – свободные члены,

x – неизвестные

n – количество уравнений в системе и количество неизвестных (порядок системы)

Запись СЛАУ в матричной форме

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

При решении СЛАУ возможно возникновение 3 случаев:

1. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$$

2. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 10x_1 + 4x_2 = 62 \end{cases}$$

3. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 10x_1 + 4x_2 = 28 \end{cases}$$

2 класса методов решения СЛАУ:

1. Прямые методы.

2. Итерационные методы.

Прямые методы

Достоинство: устойчивость методов.

Недостаток: точность решения зависит от особенностей метода и от количества уравнений.

Итерационные методы

Достоинство: точность решения задается пользователем.

Недостаток: методы являются неустойчивыми.

Метод Гаусса

(метод последовательного исключения неизвестных)

Является прямым методом.

Исходные данные:

1. A
2. B

Алгоритм метода Гаусса:

1. Ввод исходных данных.
2. Прямой ход.
3. Обратный ход.
4. Вывод результатов.

Метод Гаусса для 3 уравнений с 3-мя неизвестными (система 3-го порядка)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3}{a_{11}}$$

2. x_1 подставляется во все оставшиеся уравнения системы.

Получим следующее:

$$\left(a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_3 = b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$\left(a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)x_3 = b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

3. Новые обозначения:

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad a'_{32} = a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad a'_{33} = a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$b'_{2} = b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad b'_{3} = b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Новая система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

4. x_2:

$$x_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}} - \frac{a'_{23}x_3}{a'_{22}}$$

5. x_2 подставляется во все оставшиеся уравнения системы.

Получим следующее:

$$\left(a'_{33} - a'_{23}\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right)x_3 = b'_3 - b'_2\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

6. Новые обозначения:

$$a''_{33} = a'_{33} - a'_{23}\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$b''_3 = b'_3 - b'_2\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

Новая система в верхнетреугольном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

7. Неизвестные вычисляются в обратном порядке (обратный ход):

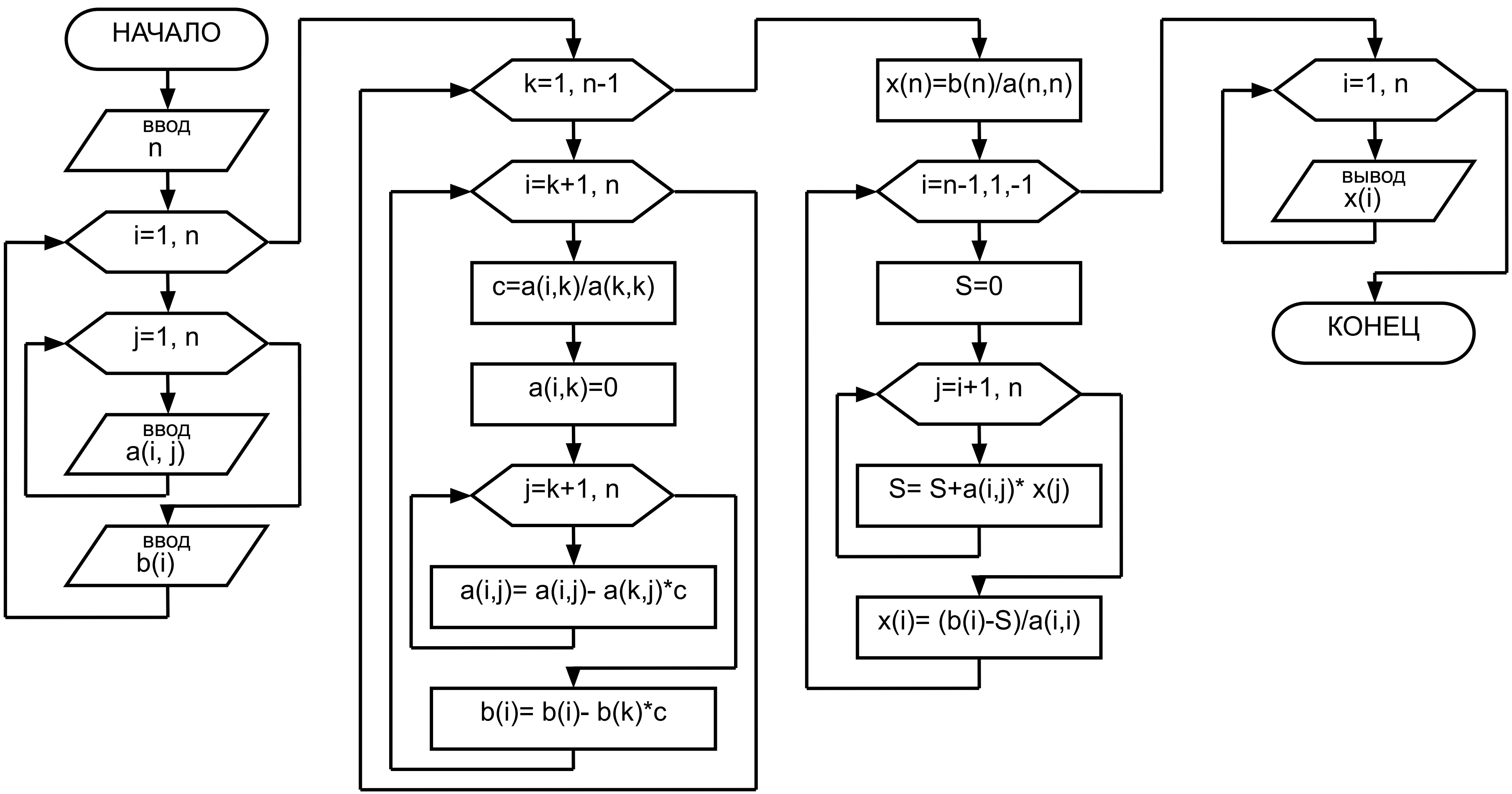
$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}\, x_3}{a'_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}}$$

Блок-схема метода Гаусса

ввод исходных данных прямой ход обратный ход вывод результатов



ЗАМЕЧАНИЕ

В случае единственности решения СЛАУ методом Гаусса всегда находится необходимое решение.

Необходимо выполнения условия:

$$a_{ii} \neq 0$$

Метод Зейделя
(метод простых итераций)

Является итерационным методом.

Исходные данные:

1. A
2. B
3. $X^{(0)}$
4. E

Метод Зейделя для 3 уравнений с 3-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. Из 1-го уравнения выражаем неизвестное x_1, из 2-го уравнения - x_2, из 3-го - x_3.

Получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

2. В правую часть 1-го уравнения подставляем начальные приближения неизвестных $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_1^{(1)}$.

3. В правую часть 2-го уравнения подставляем начальное приближение неизвестного $x_3^{(0)}$ и уточненное значение $x_1^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_2^{(1)}$.

4. В правую часть 3-го уравнения подставляем уточненные значения неизвестных $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_3^{(1)}$.

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right) \\
x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right) \\
x_3^{(1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right)
\end{cases}
$$

5. Далее рассчитывается разность между значениями начальных приближений и уточненными значениями неизвестных.

Если

$$
\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| < E
$$

$$
u
$$

$$
\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| < E
$$

$$
u
$$

$$
\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| < E
$$

то считается, что значения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ являются решением данной системы. В противном случае эти значения принимаются за начальное приближение и процесс повторяется.

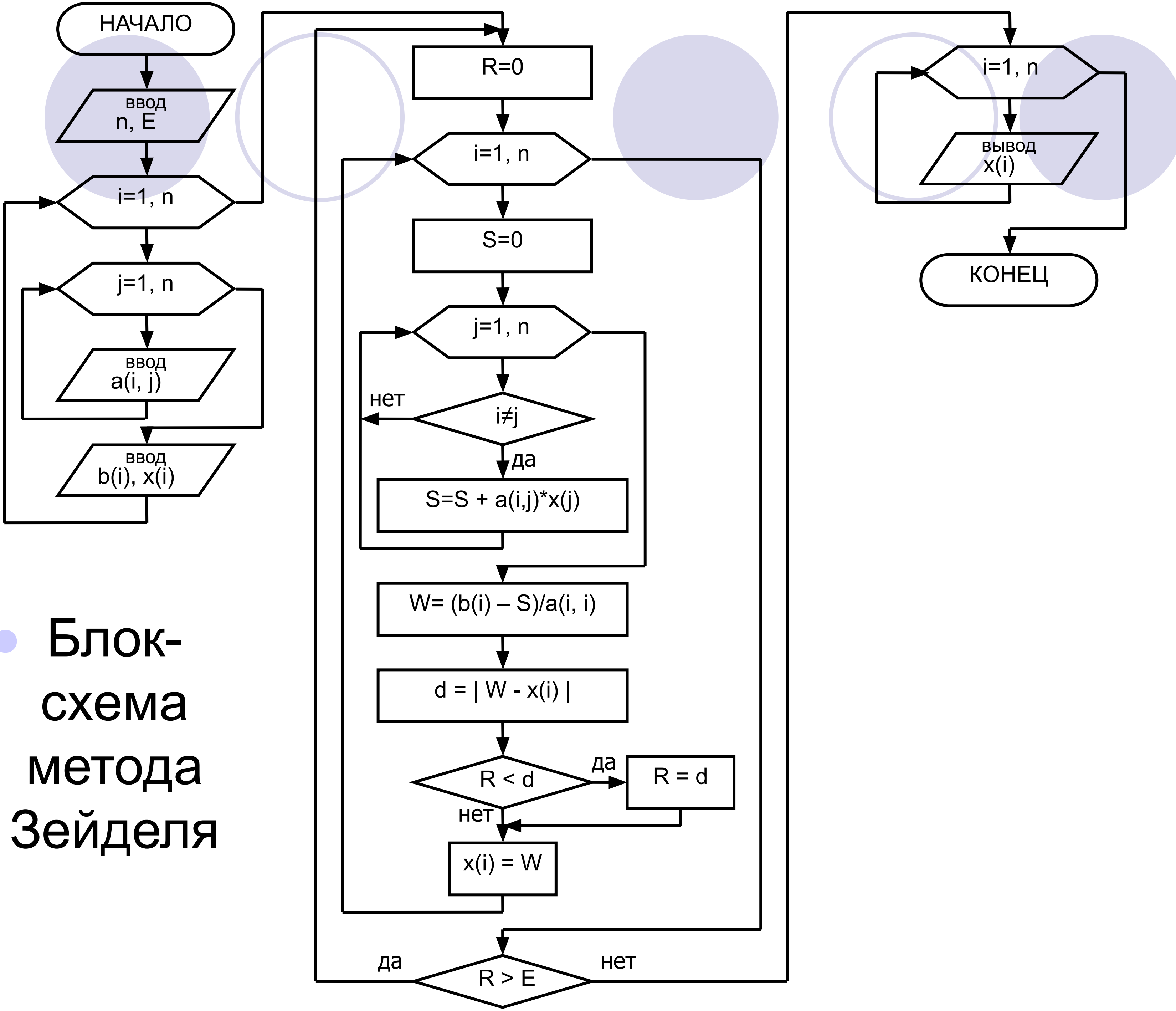
ЗАМЕЧАНИЕ

Метод Зейделя является итерационным, итерации сходятся не всегда.

Итерации всегда сходятся при выполнении следующего условия:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

условие преобладания диагональных коэффициентов.



- Блок-схема метода Зейделя

Метод Крамера для решения СЛАУ 2-го и 3-го порядка

Прямой метод. Метод линейной алгебры.

Исходные данные:

1. A
2. B

Условие существования единственного решения СЛАУ

$$\det A \neq 0$$

Метод Крамера для системы 2-го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Метод Крамера для системы 3-го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Окончательные формулы:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 - a_{21}b_1a_{33} + a_{21}a_{13}b_3 + a_{31}b_1a_{23} - a_{31}a_{13}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}b_2a_{32} - a_{21}a_{12}b_3 + a_{21}b_1a_{32} + a_{31}a_{12}b_2 - a_{31}b_1a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}}$$

Для систем более высоких порядков метод Крамера практически не применяется

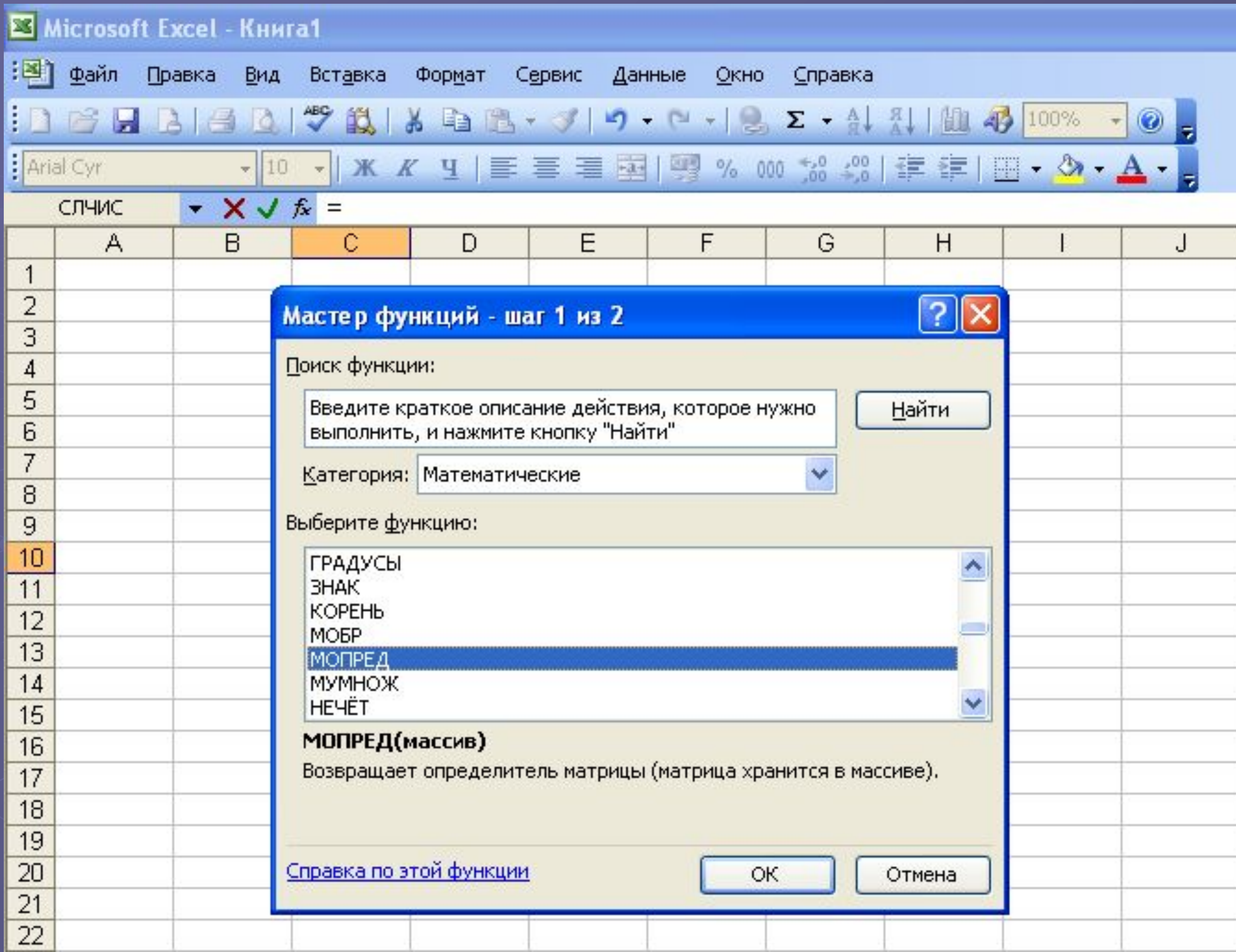
Реализация метода Крамера в электронных таблицах

Microsoft Excell

Функция

МОПРЕД(матрица)

Функция МОПРЕД



Пример расчета определителя