Кинематика движения материальной точки и абсолютно твердого тела

Движение материальной точки

Материальная точка – физическая модель объекта

Модель – абстрактная система, являющаяся упрощенной копией реальной системы.

Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Движение тел происходит в пространстве и времени.

Следовательно, для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находится в различные моменты времени.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому произвольно выбранному телу.

Тело отсчета – условное неподвижное тело, относительно которого определяется положение движущегося тела.

Тело отсчета – реальный объект.

С телом отсчета связывают

систему координат – это абстракция (декартова с.к., сферическая с.к.).

Приборы, служащие для определения положения движущегося тела – *линейка* и т.п.

Прибор, служащий для определения времени – *часы* – любой периодический процесс.

Если есть несколько тел и, соответственно, несколько часов, то необходимы приборы для синхронизации часов.

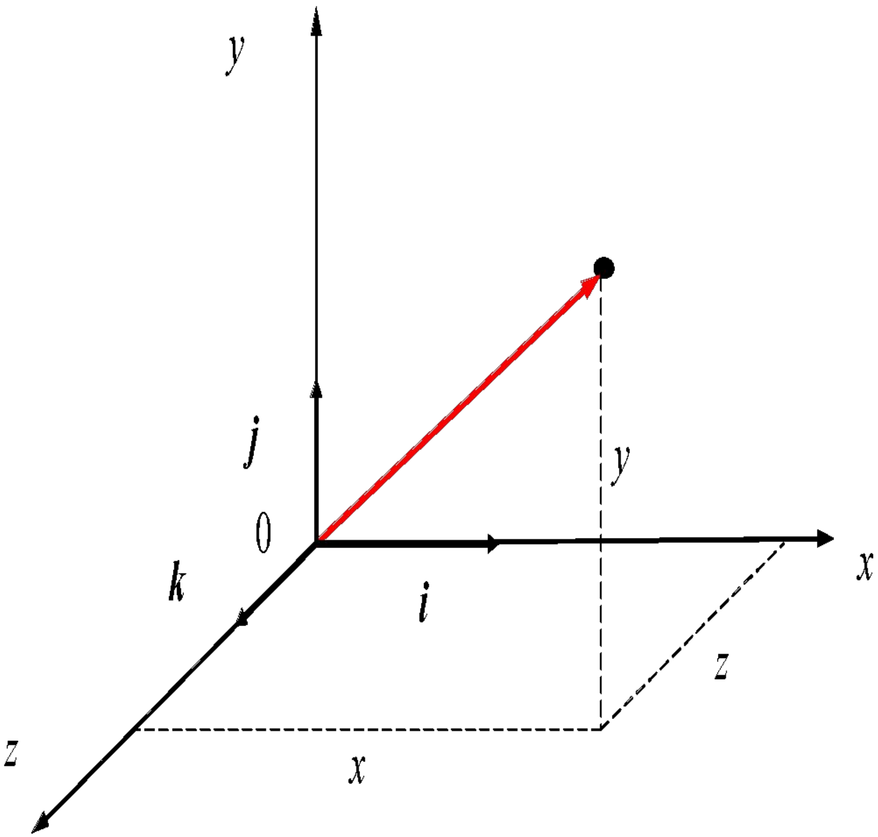
Тело отсчета, связанная с ним система координат, линейка, часы и приборы для синхронизации часов составляют пространственно-временную **систему отсчета**.

Гелиоцентрическая СО – тело отсчета Солнце.

Геоцентрическая СО – тела отсчета Земля.

Положение материальной точки в системе отсчета

Наиболее часто используется декартова система отсчета.



x – ось абцисс (абцисса),

y – ордината,

z – аппликата.

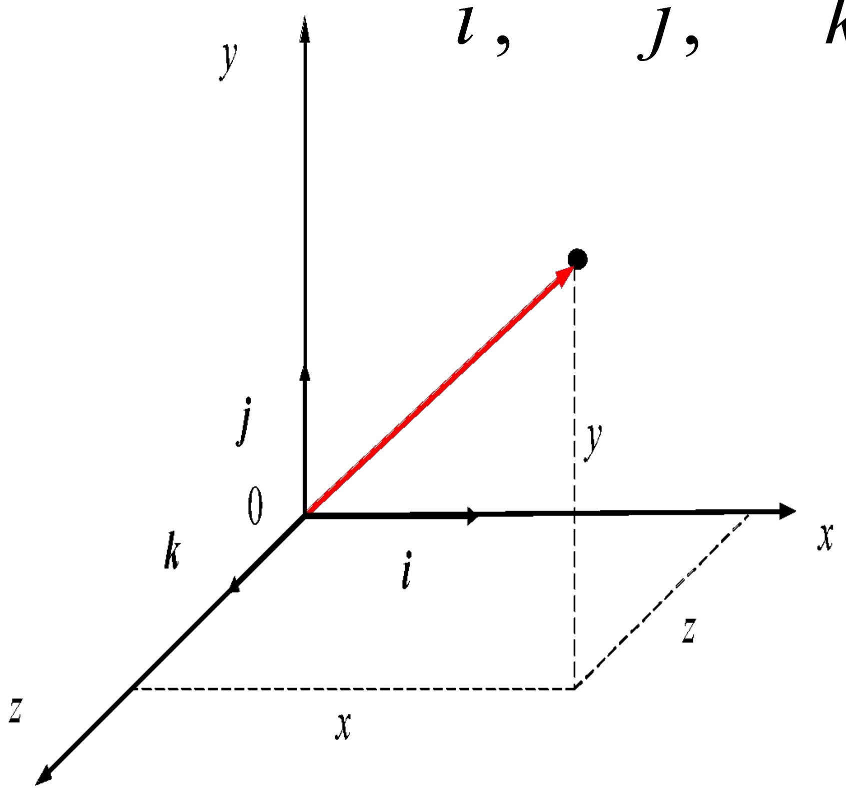
Положение материальной точки характеризуется тремя координатами (*x*,*y*,*z*) или радиус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$ – единичные вектора (орты).

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



При движении материальной точки её координата с течением времени изменяется.

Движение материальной точки определяется скалярными уравнениями

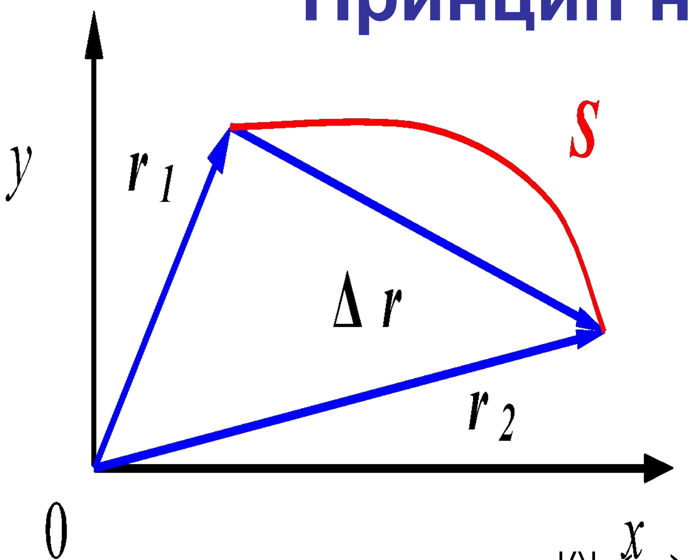
$$x = x(t);\qquad y = y(t);\qquad z = z(t),$$

или векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями** движения материальной точки.

Траектория точки. Длина пути. Вектор перемещения (перемещение).

Принцип независимости движения



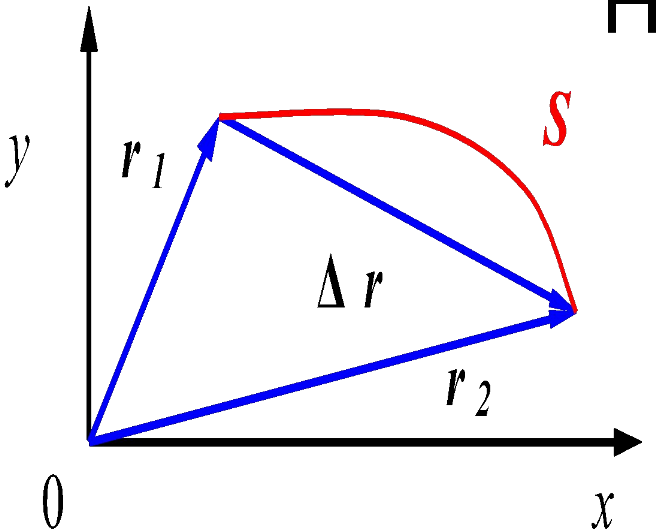
Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **число степеней свободы**.

$\vec{r}(t)$ - радиус вектор.

Траектория – кривая, которую описывает радиус вектор материальной точки при её движении.

В зависимости от формы траектории движение разделяется на
- прямолинейное, - криволинейное.

Расстояние, отсчитанное вдоль траектории, (длина участка траектории) называется **длиной пути** S. $S(t)$-скалярная функция.



Направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий начальную и конечную точки траектории называется **вектором перемещения** (перемещением).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \qquad \left|\Delta\vec{r}\right| \neq S.$$

При прямолинейном движении $\left|\Delta \vec{r}\right| = S$

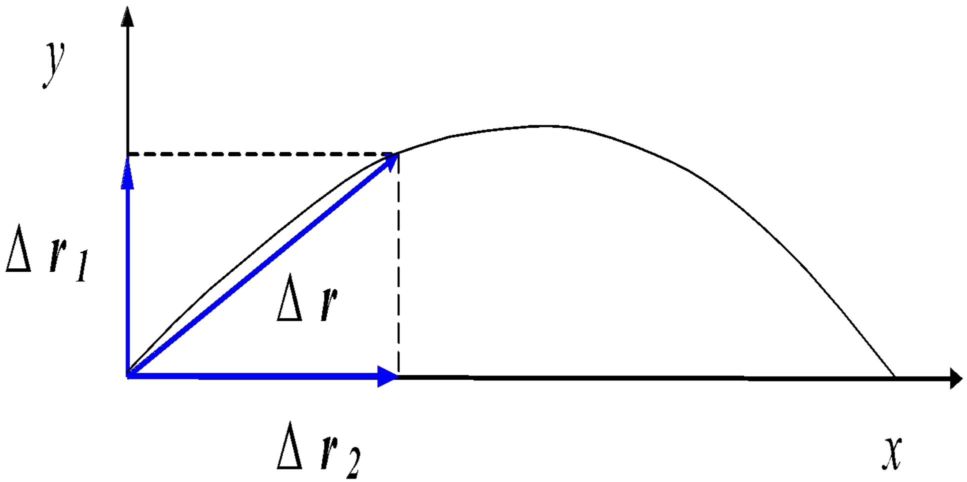
Если движение происходит в течение бесконечно малого времени $\Delta t \to 0$, то по модулю путь равен перемещению

$$dS = \left|d\vec{r}\right|.$$

Если материальная точка участвует в нескольких перемещениях,

то результирующее перемещение равно векторной сумме перемещений, совершаемых материальной точкой в каждом из движений в отдельности:

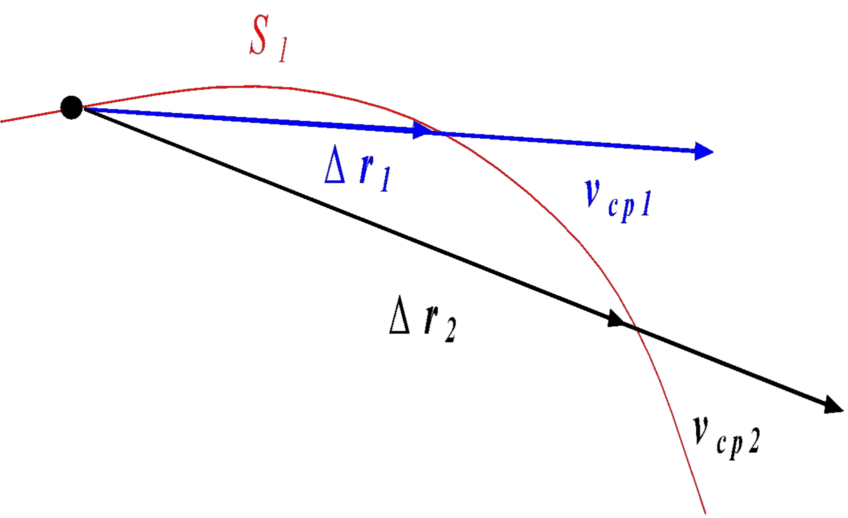
$$\Delta\vec{r} = \sum \Delta\vec{r}_i.$$



$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$$

Скорость движения материальной точки. Понятие о кривизне

Для характеристики движения материальной точки вводится понятие скорости – векторная величина.



Материальная точка движется по криволинейной траектории.

За время Δt_1 точка проходит путь S_1 и получает приращение $\Delta \boldsymbol{r}_1$,

За время $\Delta t_2 - \Delta \boldsymbol{r}_2$.

Вектор средней скорости – отношение перемещения к промежутку времени

$$\vec{v}_{cp1} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t_1}; \qquad \vec{v}_{cp2} = \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t_2}; \qquad \vec{v}_{cp} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \qquad \langle \vec{v} \rangle \uparrow\uparrow \Delta \vec{r}.$$

Вектор средней скорости характеризует изменение положения радиус-вектора.

Если $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow \langle \vec{v} \rangle$ стремится к предельному значению.

Мгновенная скорость материальной точки

– векторная величина, равная первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow$, $|d\vec{r}| = dS$ следовательно, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$|\vec{v}| = v = \frac{dS}{dt}.$$

В математике *производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения изменения функции Δy в этой точке к вызвавшему его изменению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = y(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Физический смысл производной:

это среднее значение изменения функции на таком интервале, на котором среднее значение функции не меняется.

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

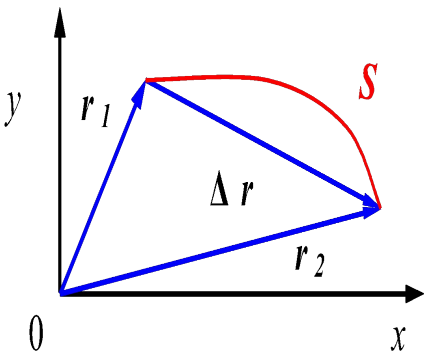
$$\frac{dx}{dt} = v_x; \qquad \frac{dy}{dt} = v_y; \qquad \frac{dz}{dt} = v_z$$

– проекции вектора скорости на оси координат.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Неравномерное движение

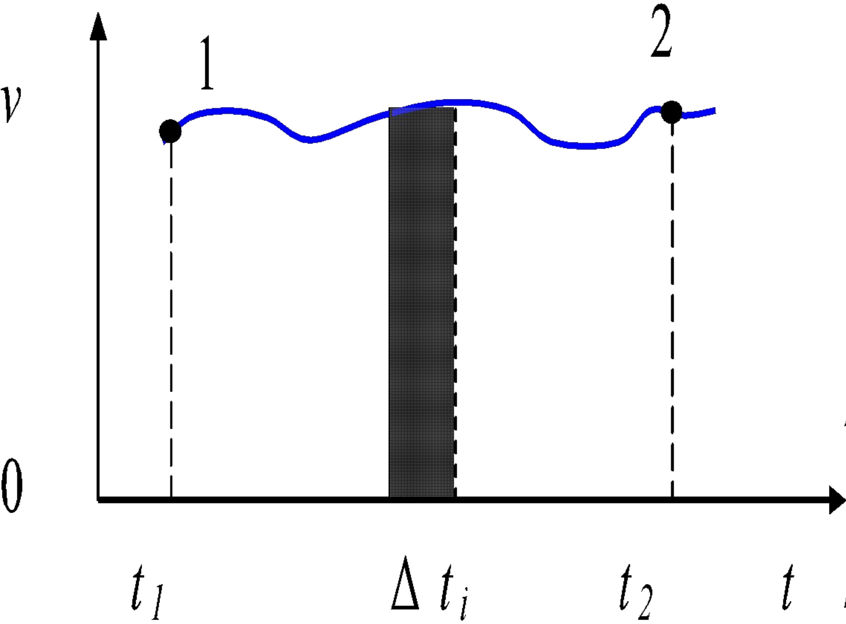
Средняя скорость неравномерного движения $\langle v \rangle = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ – скалярная величина.



$$\Delta S > \left|\Delta \vec{r}\right| \quad \Rightarrow \langle v \rangle > \left|\langle \vec{v} \rangle\right| \quad \Rightarrow$$

Средняя скорость больше модуля вектора средней скорости.

Вычисление пройденного пути. Понятие об интеграле



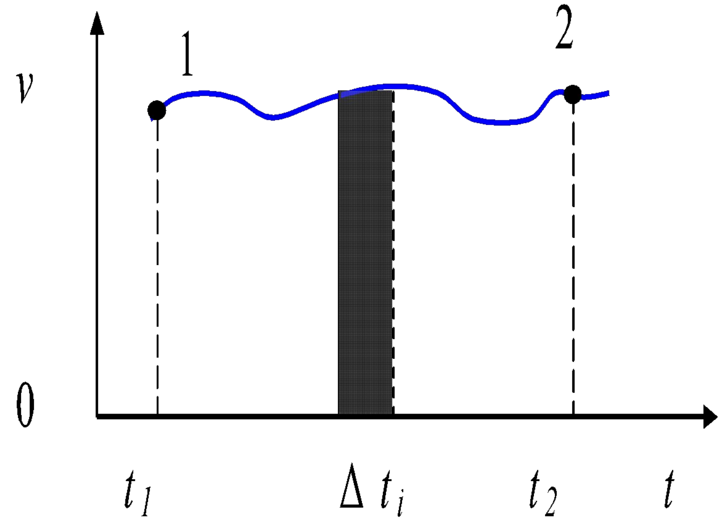
$$\Delta t_i \to 0.$$

v_i – мгновенная скорость.

$$\Delta S_i = v_i \Delta t_i . \qquad (1)$$

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \Delta t_i . \qquad (2)$$

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt . \qquad (3)$$



Физический смысл интеграла – бесконечно большая сумма бесконечно малых слагаемых.

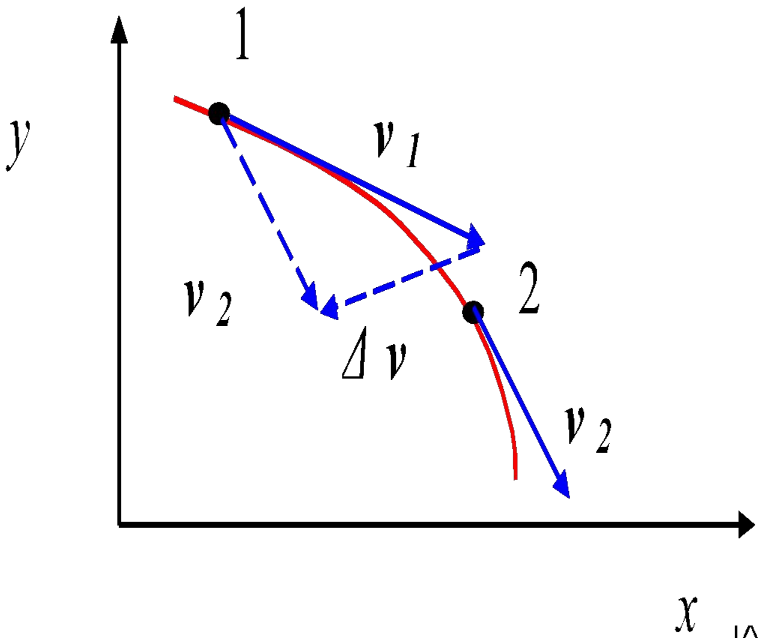
Геометрический смысл интеграла – площадь под кривой, ограниченная двумя перпендикулярами и осью абсцисс.

Средняя скорость прохождения пути

$$v_{cp} = \frac{S}{t}. \qquad (4)$$

Средняя скорость неравномерного движения – средняя скорость такого равномерного движения, при котором материальная точка за то же время проходит тот же путь.

Ускорение



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \qquad (1)$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{v}}(t). \qquad (2)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (3)$$

Модуль среднего ускорения: $$|a| = \frac{d^2 S}{dt^2}. \qquad (4)$$

Ускорение движения материальной точки это первая производная от вектора скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора по времени.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

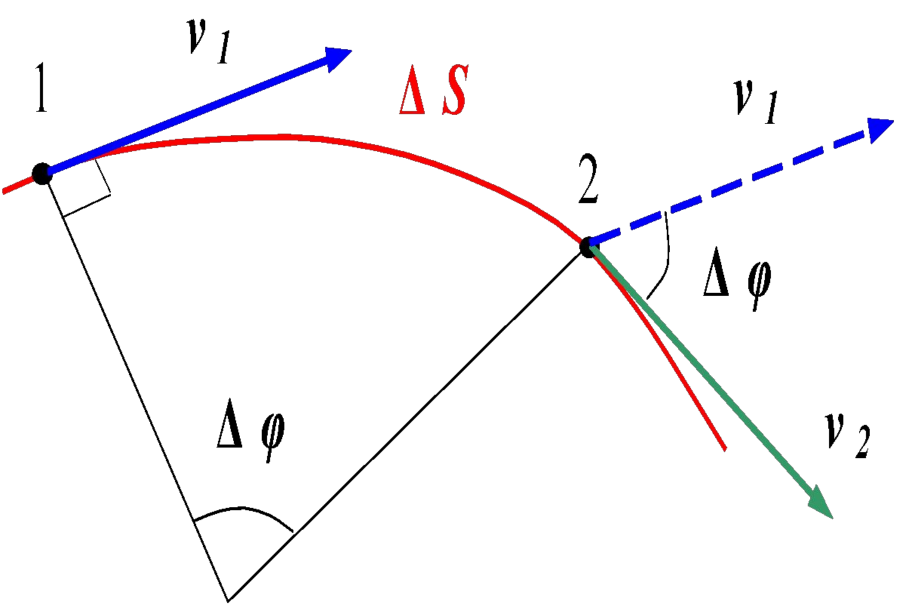
a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на координатные оси.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2};$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Понятие о кривизне



$\Delta\varphi$ - угол между касательными в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии ΔS.

Кривизна

$$C = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}.$$

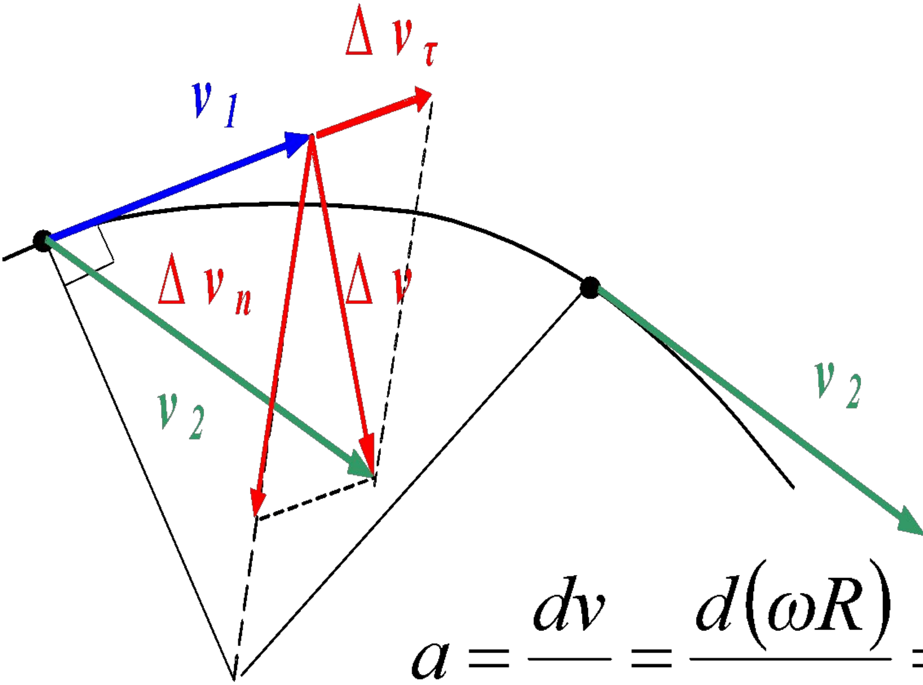
Кривизна траектории характеризует скорость поворота касательной при движении или степень искривленности кривой.

Радиус кривизны траектории в данной точке есть величина обратная кривизне

$$R = \frac{1}{C}.$$

Радиус кривизны траектории в данной точке есть радиус окружности, которая сливается на бесконечно малом участке в данном месте с кривой.

Нормальное и тангенсальное ускорения при криволинейном движении



Разложим вектор $\Delta\boldsymbol{v}$ на две составляющие.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1;$$

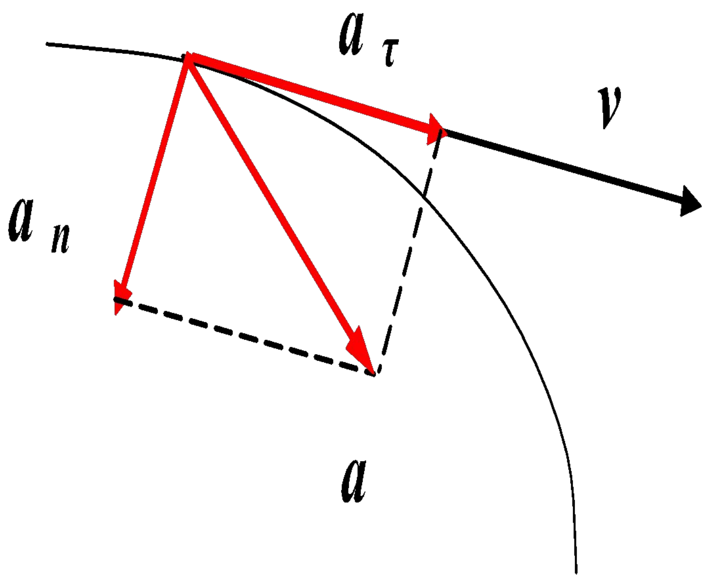
$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R + \omega\frac{dR}{dt} =$$

$$= \varepsilon R + \omega v = \varepsilon R + \omega\omega R = \varepsilon R + \omega^2 R = \underbrace{\varepsilon R}_{a_\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n}.$$

Нормальное и тангенсальное ускорение

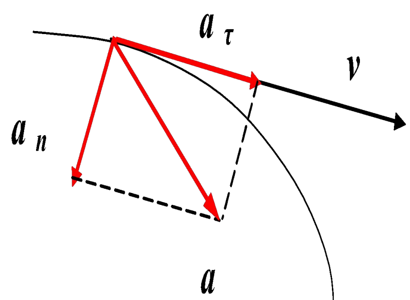
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau . \qquad (1)$$



$\vec{a}_n$ нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Вектор $\vec{a}_n$ направлен в данной точке перпендикулярно скорости к центру кривизны траектории (центростремительное ускорение).

$\vec{a}_\tau$ – тангенсальное ускорение характеризует



изменение скорости по величине и направлено вдоль скорости (или в обратную сторону).

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (4)$$

Любое криволинейное движение можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Основная задача механики

Состоит в нахождении закона движения – кинематического уравнения.

Закон движения – зависимость положения тела от времени в выбранной системе отсчета.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1)$$

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \qquad (2)$$

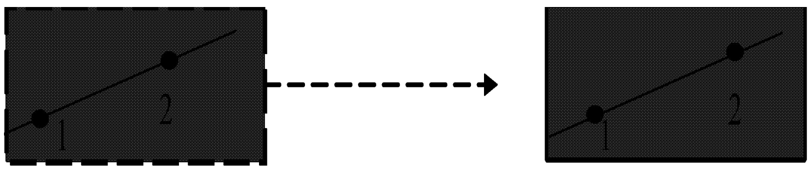
$$z = z(t).$$

Понятие об абсолютно твердым телом (АТТ). Поступательное и вращательное движение

Абсолютно твердое тело – это модель, тело расстояние между любыми двумя точками которого в процессе движения не меняется.

Поступательное движение – движение,

при котором любая прямая проведенная внутри тела, перемещается параллельно самой себе.



При поступательном движении все точки тела за одно и тоже время совершают одинаковые перемещения и в один и тот же момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.

Абсолютно твердое тело

- Поступательное движение АТТ можно рассматривать, как движение материальной точки.

Кинематические уравнения.

1. Равномерное движение материальной точки $\vec{a} = 0$ вдоль оси x.

$$x(t) = x_0 + v_0 t,$$

x_0 – начальная координата.

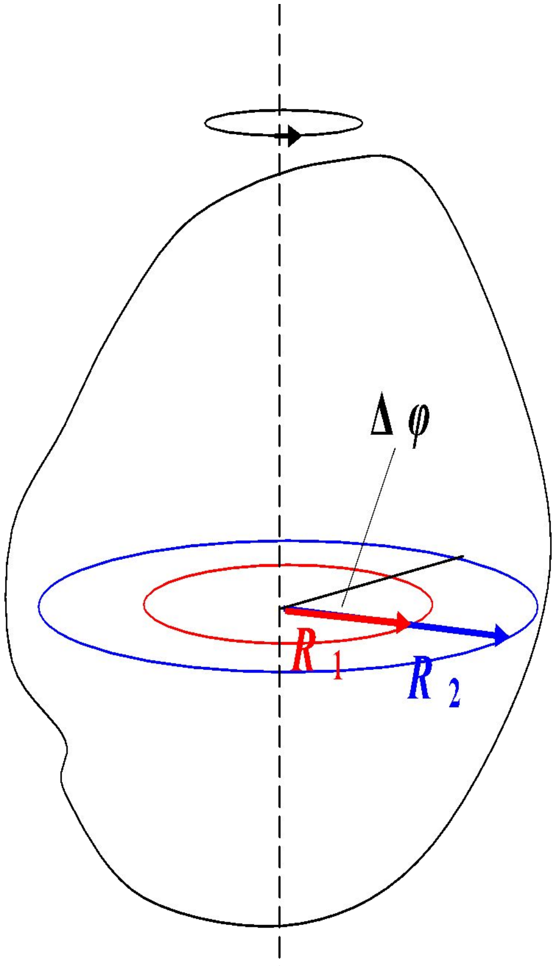
Кинематические уравнения.

2. Равнопеременное движение.

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

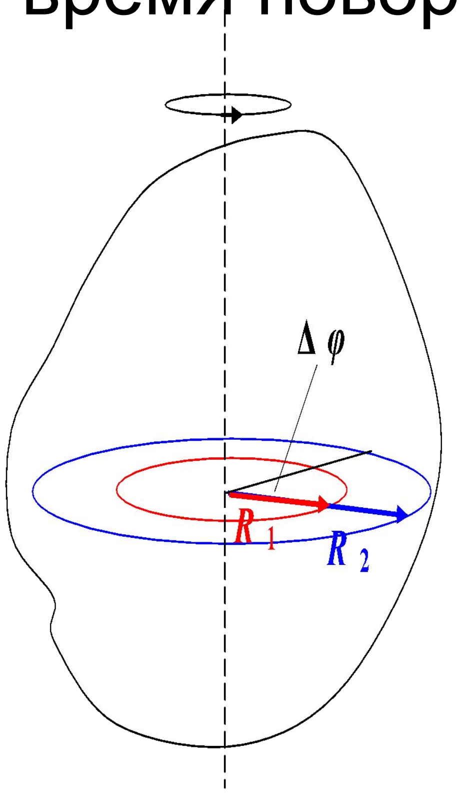
$$v = v_0 \pm at.$$

Вращательное движение АТТ относительно неподвижной оси – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой, называемой осью вращения.



При вращательном движении точек тел, находящихся на разном расстоянии от оси вращения, они за одно и то же время совершают разные перемещения и в один и тот же момент времени имеют разные v и a.

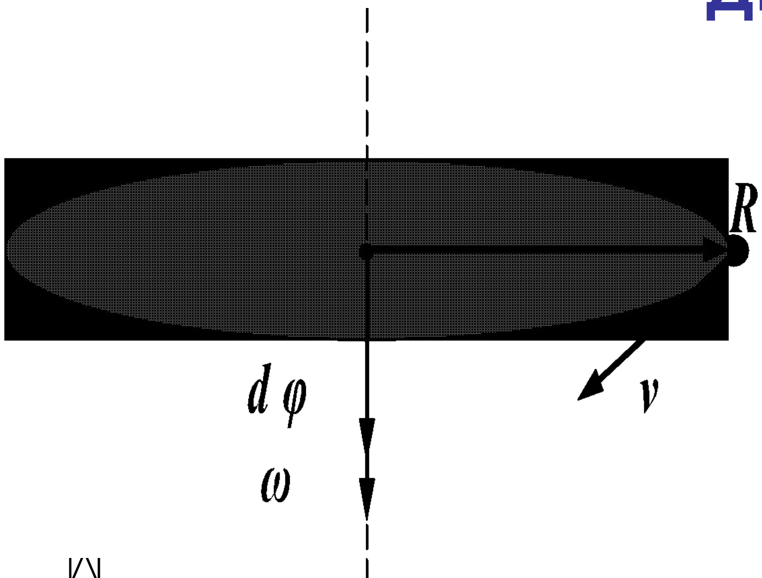
В то же время радиус-вектор, соединяющий точки тела с осью вращения, за одно и то же время поворачивается на один и тот же угол $\Delta\varphi$.



- Угол поворота служит для определения положения тела и закон движения – кинематическое уравнение имеет вид

$$\varphi = \varphi(t).$$

Вектор элементарного угла поворота. Вектор угловой скорости и углового перемещения. Связь линейных и угловых характеристик движения



- Положение материальной точки, совершающей вращательное движение, определяется углом поворота $d\vec{\varphi}$.

$d\vec{\varphi}$ – векторная величина (псевдовектор, аксиальный вектор).

Модуль $|d\vec{\varphi}|$ равен углу поворота.

Направление определяется **правилом правого винта**.

Угловая скорость

– векторная величина, равная первой производной угла поворота по времени

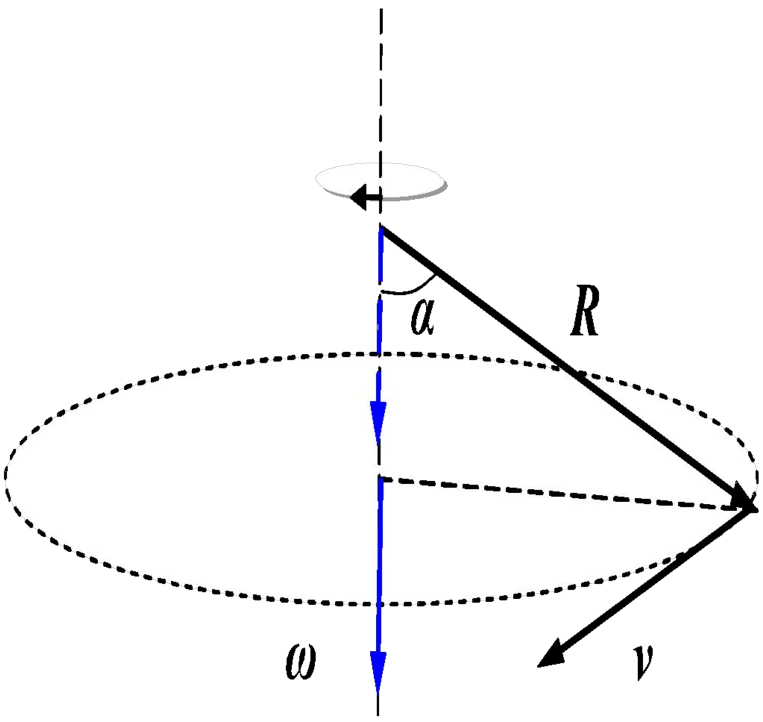
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad (1) \qquad \vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}, \qquad [\omega] = \frac{рад}{сек}.$$

Линейная скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

В векторном виде $\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right].$ $\qquad (2)$

В векторном виде $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$. (2)



Векторное произведение по модулю равно

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{R}| \sin \angle \vec{\omega}, \vec{R}.$$

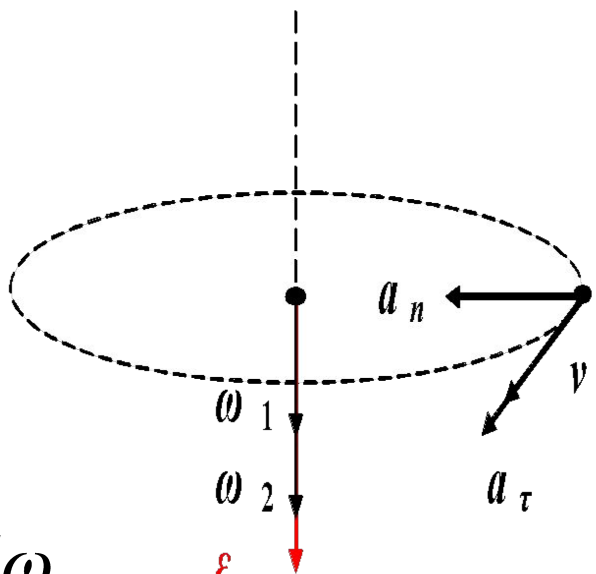
Направление вектора $\boldsymbol{v}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от вектора $\boldsymbol{\omega}$ к $\boldsymbol{R}$.

Угловое ускорение – векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени

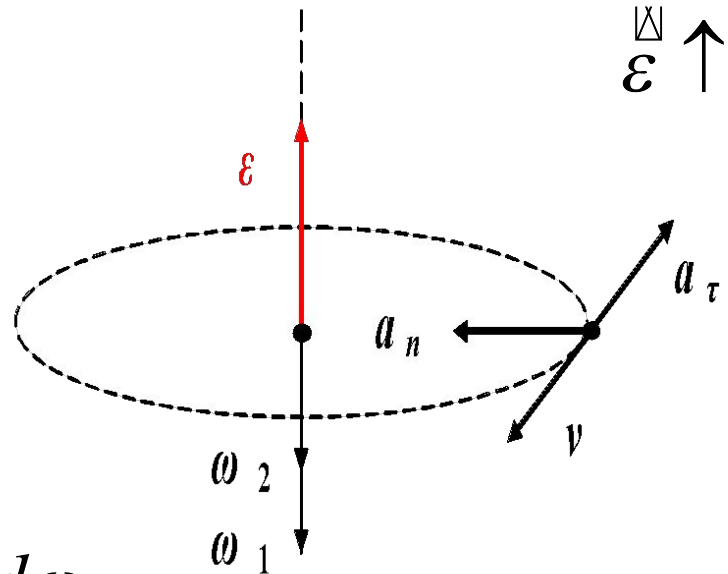
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (3)$$

При ускоренном движении $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$;

при замедленном движении $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.



$$\frac{d\omega}{dt} > 0$$



$$\frac{d\omega}{dt} < 0$$

Кинематическое уравнение

равномерного вращения $\varepsilon = 0$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Частота вращения: $n = \dfrac{N}{t}; \qquad n = \dfrac{1}{T}.$

Период: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}.$

Кинематическое уравнение

равнопеременного вращения $\varepsilon = const$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Длина пути, пройденного точкой по дуге радиуса *R*:

$$S = \varphi \cdot R; \qquad S_{окр} = 2\pi R.$$

Скалярное и векторное произведение векторов

- Скалярное произведение:

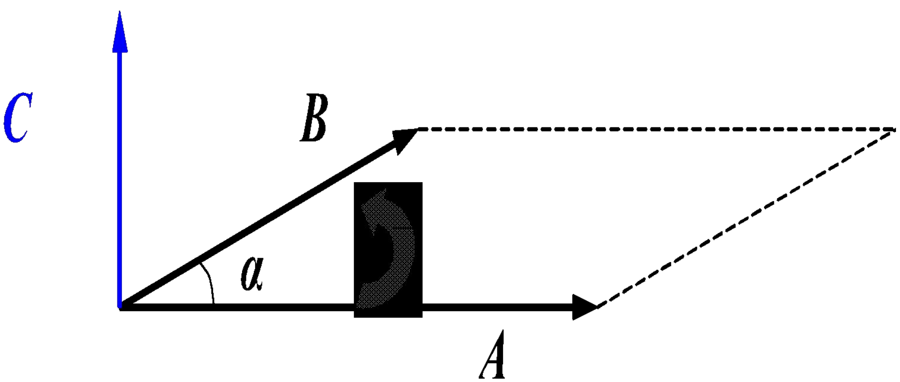
$$C = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cos\alpha, \qquad \alpha = \angle \vec{A}, \vec{B}.$$

Пример: работа, совершаемая силой

$$A = FS\cos\alpha.$$

- Векторное произведение:

$$\vec{C} = \left[\vec{A}, \vec{B}\right], \qquad \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\alpha .$$



Направление вектора ***С*** определяется по *правилу правого винта*:

1. ***С*** перпендикулярен плоскости векторов ***А***, ***В***.
2. Направление вектора ***С*** совпадает с направление поступательного движения правого винта при его вращении от ***А*** к ***В***.

Другое правило: если наблюдать с конца вектора ***С***, то кратчайший поворот от ***А*** до совмещения с ***В*** – против часовой стрелки.