Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лекция 3.2 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Е.В. Феськова,
канд. пед. наук, доцент кафедры «Инженерный бакалавриат CDIO»

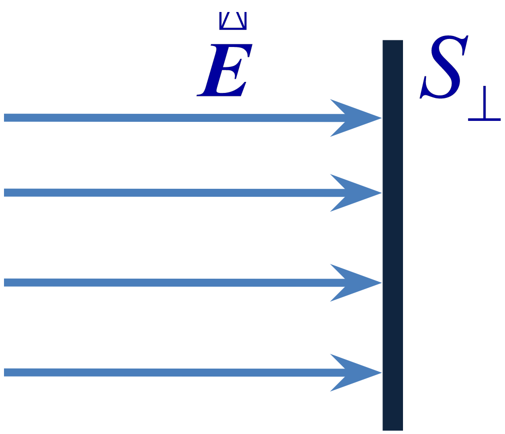
Красноярск 2023

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

С помощью силовых линий электрического поля можно определять: направление электрического поля; значение его напряженности по числу линий на единицу поверхности, перпендикулярной к силовым линиям.

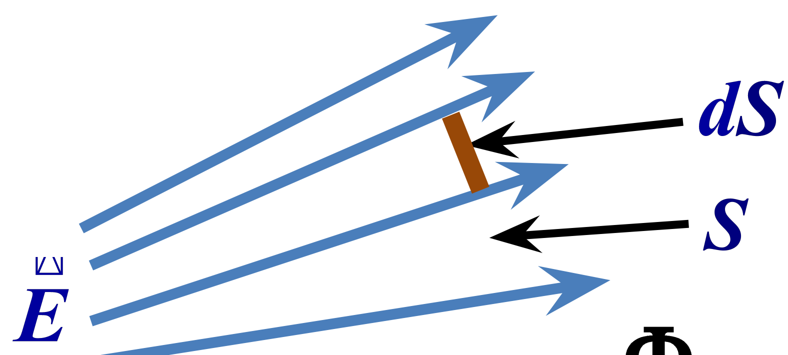
Число силовых линий , пронизывающих площадку dS, перпендикулярную к ним, определяет **поток вектора напряженности электрического поля** Φ_E

Если линии перпендикулярны поверхности, а поле однородно, то просто



$$\Phi_E = E \cdot S_\perp$$

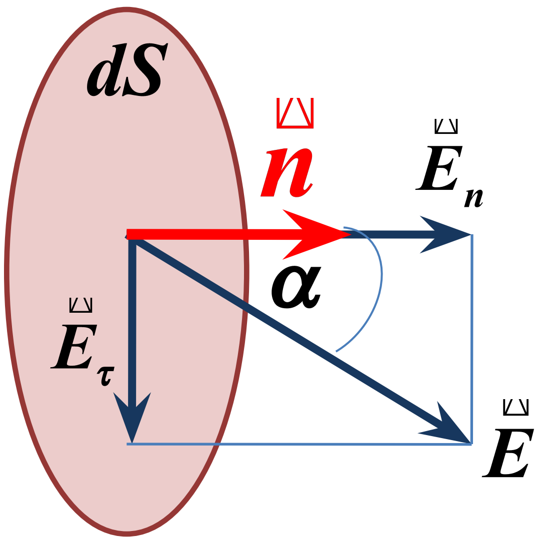
Если поле неоднородно, то поверхность S надо разбить на участки dS настолько малые, чтобы в пределах этих участков поле можно было считать однородным



$$\mathbf{\Phi}_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

Вектор $\vec{E}$ может составлять с площадкой любой угол. Тогда его раскладывают на две компоненты: $\vec{E}_\tau$ $\vec{E}_n$



$\vec{E}_n$ создает поток

$\vec{E}_\tau$ не создает потока

$$d\Phi_E = E_n \cdot dS$$

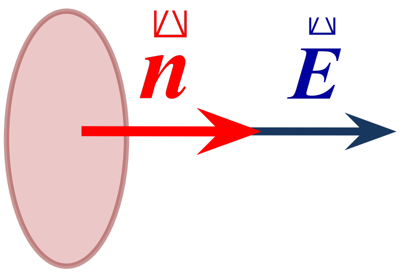
$$E_n = E \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

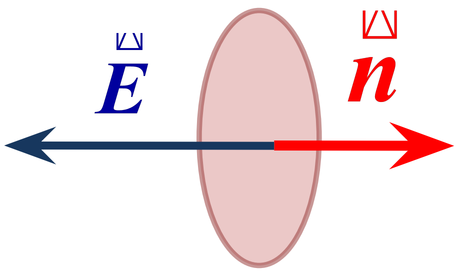
α – **угол между вектором** $\vec{E}$ **и нормалью к площадке** $\vec{n}$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

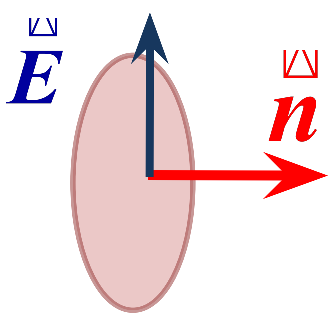
Поток вектора напряженности может быть и положительным, и отрицательным, и равен нулю в зависимости от угла между $\vec{E}$ и $\vec{n}$



$$\alpha = 0, \quad \Phi_E = E \cdot S$$



$$\alpha = \pi, \quad \Phi_E = -E \cdot S$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_E = 0$$

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

М. В. Остроградский
русский математик
(1801 —1862)

Карл Фридрих Гаусс
немецкий ученый
(1777—1855)

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой общую формулировку закона Кулона и позволяет определить поток Φ_E через любую **замкнутую поверхность**

Теорема Остроградского-Гаусса: полный поток вектора напряженности через замкнутую поверхность произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, поделенную на диэлектрическую проницаемость среды и электрическая постоянная

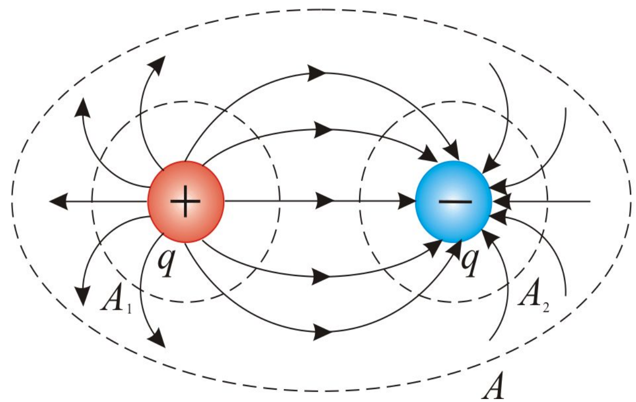
$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Потоком вектора напряженности Φ через эту поверхность называется полное число силовых линий, проходящих через поверхность S

Поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е.

$$\Phi_E > 0$$



Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, поток здесь направлен внутрь

$$\Phi_E < 0$$

Общий поток через поверхность *A* равен нулю

Если заряды равны, то общий поток через поверхность *A* равен нулю

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее = 0

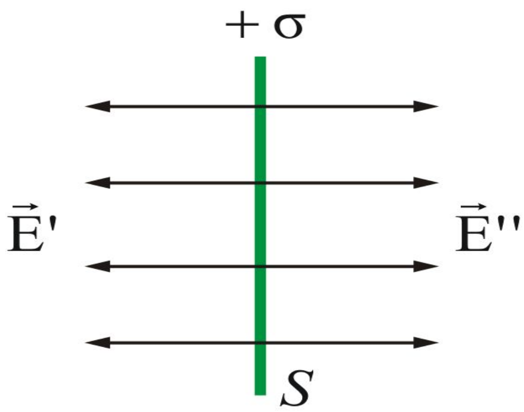
ЗАДАЧИ

6. Круг радиусом $R = 15$ см помещен в однородное электрическое поле напряженностью $E = 360$ В/ м. Чему равен поток вектора напряженности сквозь круг, если его плоскость: 1) перпендикулярна силовым линиям; 2) составляет угол $\alpha = 45°$ ними; 3) параллельна силовым линиям?

7. Точечный заряд $Q = 5$ мкКл помещен в центр куба с длиной ребра 9 см. 1) Чему равен поток вектора напряженности через всю поверхность куба? 2) Чему равен поток вектора напряженности через одну грань куба? 3) Как изменится ответ, если линейные размеры куба увеличить в 2 раза?

8. Определить поток вектора напряженности электрического поля Ф через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1 = 5$нКл и $Q_2 = -2$ нКл.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

q – заряд, сосредоточенный на площади S;
S – физически бесконечно малый участок поверхности.

Напряженность электрического поля бесконечной плоскости

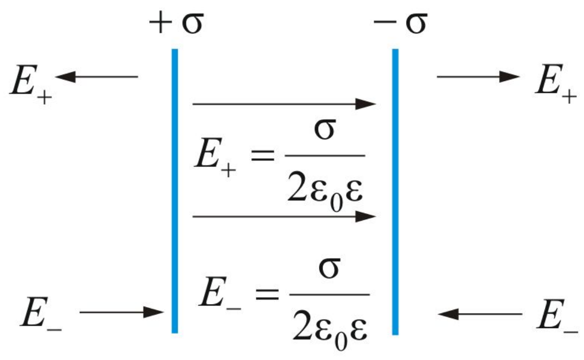
$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Разность потенциалов поля для одной бесконечной плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Поле между двумя параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями



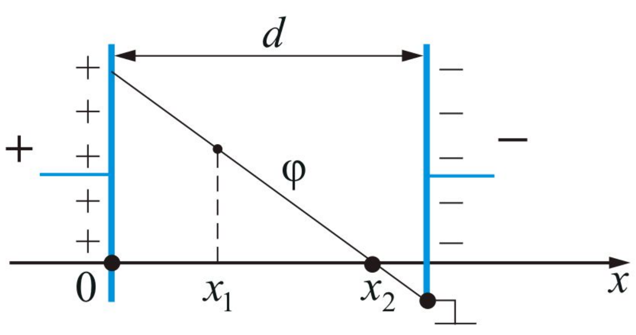
Результирующее поле, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей

$$E = E_+ + E_-$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Вне плоскостей напряженность поля

$$E = 0$$



Разность потенциалов для двух плоскостей

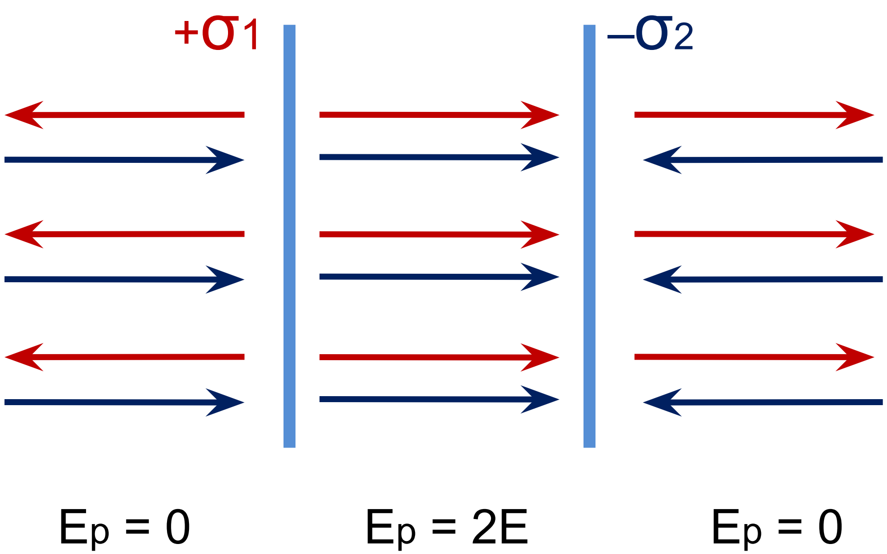
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

или

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

d – расстояние между плоскостями

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



$|\sigma_1| = |\sigma_2|$

$$E_p = E_1 + \quad {}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

ЗАДАЧИ

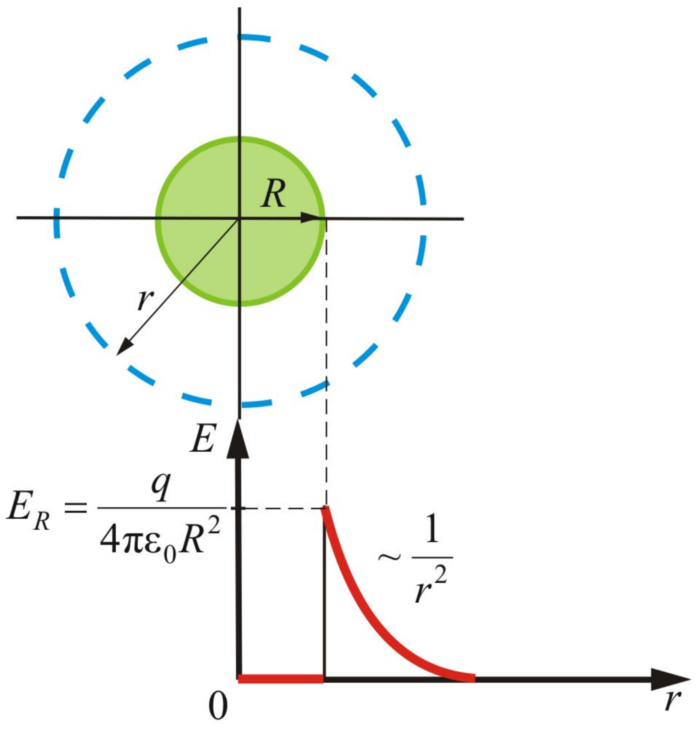
9. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью σ = 0,1 нКл/см2 расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряженности угол 30°. Определить поток Ф вектора напряженности через эту пластинку, если её радиус равен 15см.

10. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными плоскостями с поверхностями зарядов $\sigma_1 = -6$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = -4$ мкКл/м^2. Определить напряженность поля между плоскостями.

11. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $x_1 = 20$ см и $x_2 = 50$ см от плоскости.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Поверхностная плотность зарядов σ сферы: $$\sigma = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}$$



Напряженность электрического поля сферы:

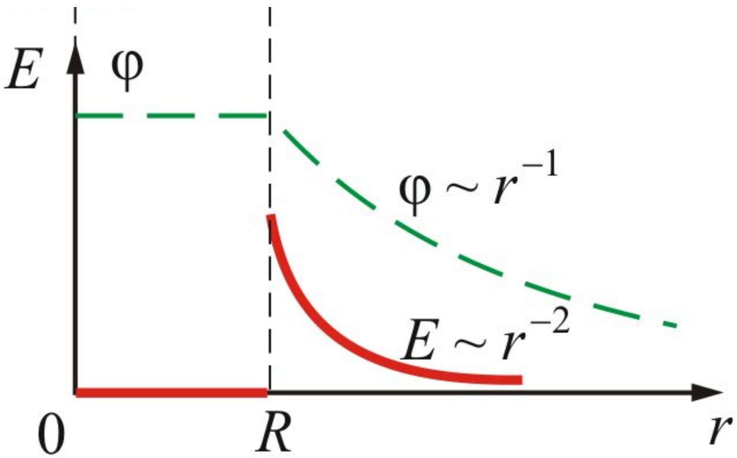
если $r < R$, то $E = 0$ (внутри сферы или шара электрического поля нет)

если $r = R$, то $$E = k\frac{|q|}{\varepsilon R^2}$$

если $r > R$, то $$E = k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}$$

где – r расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м
R - радиус сферы или шара, м

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Поверхностная плотность зарядов σ сферы:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}$$

Разность потенциалов поля сферы:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$

где – *r* расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м

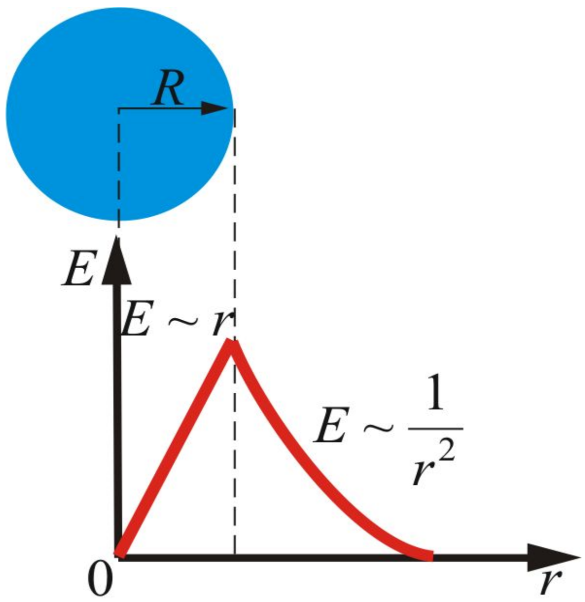
R - радиус сферы или шара, м

ЗАДАЧИ

12. По поверхности сферы радиусом R = 20 см равномерно распределен заряд Q = 35 мКл. Оценить напряженность электрического поля на расстоянии: 1) r_1 = 1 см от центра сферы; 2) r_2 = 15 см от поверхности сферы.

13. В центре сферы, несущей равномерно распределенный положительный заряд 10 нКл, находится маленький шарик с отрицательным зарядом – 5 нКл. Найдите потенциал электрического поля в точке, находящейся вне сферы на расстоянии 9 м от ее центра.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



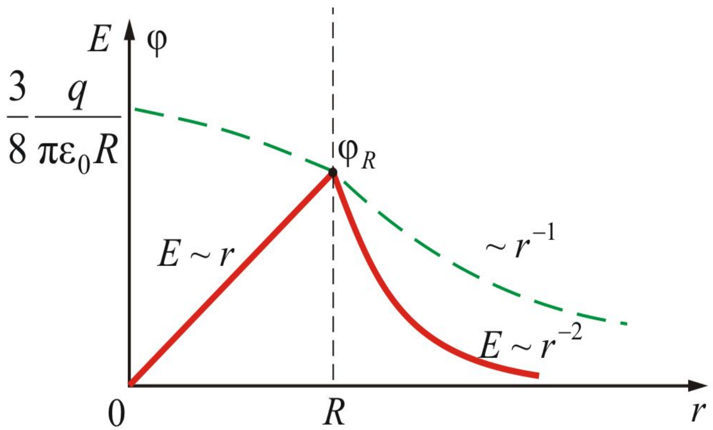
Объемная плотность зарядов ρ шара: $\rho = \dfrac{3q}{4\pi r^3}$

Напряженность поля шара

Внутри шара при $r < R$, сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0\varepsilon} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon r^2} - \text{вне шара} (r > R). \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Объемная плотность зарядов ρ шара:

$$\rho = \frac{3q}{4\pi r^3}$$

Разность потенциалов поля шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) \text{ внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара } (r > R) \end{cases}$$

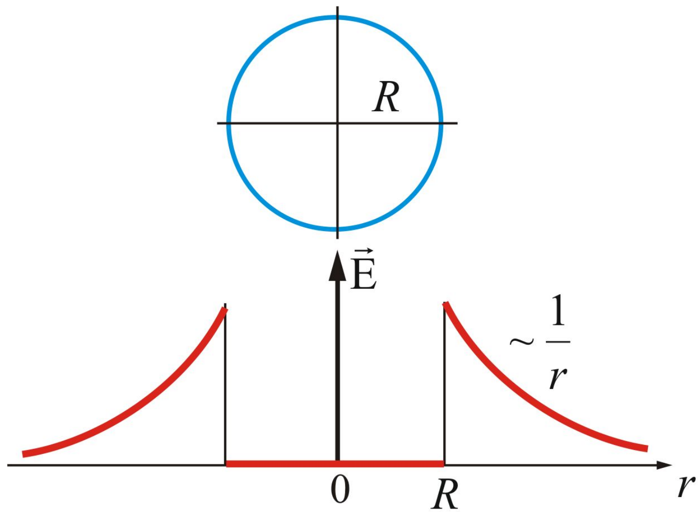
ЗАДАЧИ

14. Шар несет на себе равномерно распределенный заряд. Определить радиус шара, если потенциал в центре шара равен φ_1 = 200 В, а в точке, лежащей от его центра на расстоянии r = 50 см, φ_2 = 40 В.

15. Объёмная плотность заряда равномерно заряженного шара радиусом R = 6 см, изготовленного из диэлектрика с проницаемостью ε_1 = 2, равна ρ = 6,7□10-6 Кл/м3. Найти напряжённость E электрического поля на расстоянии r_1 = 3 см, r_2 = 6 см и r_3 = 9 см от центра шара, считая, что относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар, равна ε_2 = 3. Построить график зависимости напряжённости поля как функции расстояния от центра шара.

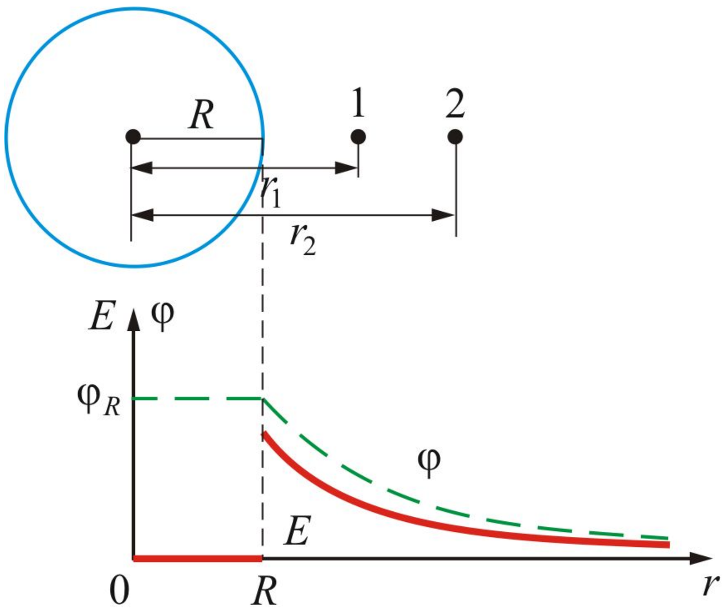
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью зарядов τ:



$$E = \begin{cases} 0 & \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Разность потенциалов поля бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью зарядов τ:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

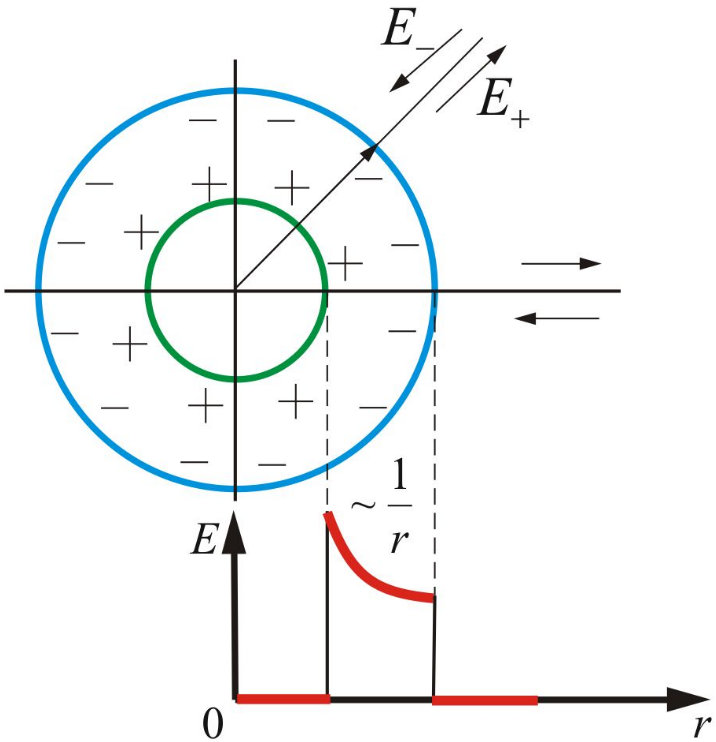
$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

16. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью 20 нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях 0,5 см и 2 см от поверхности цилиндра в средней его части.

17. Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда Q=1 нКл с расстояния r_1=5 см до r_2=2 см в направлении, перпендикулярном нити, равно 50 мкДж.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



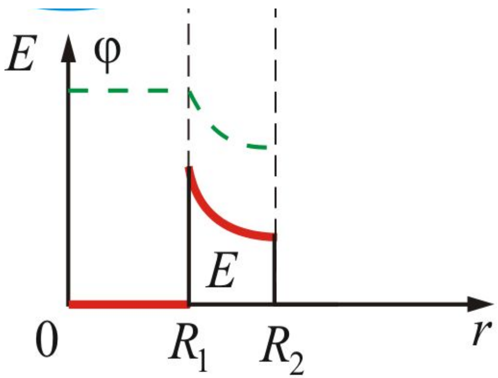
Напряженность поля бесконечных заряженных с линейной плотностью зарядов т коаксиальных цилиндров:

Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать $E = 0$. В зазоре **между цилиндрами**, поле определяется:

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

$$R_1 < r < R_2$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Разность потенциалов поля бесконечных заряженных с линейной плотностью зарядов τ коаксиальных цилиндров:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} & \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} & \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 & \text{вне цилиндров} \end{cases}$$

внутри меньшего цилиндра φ = const;
между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и *E* равны нулю

ЗАДАЧИ

18. Две концентрические сферы радиусами R_1 = 1 см и R_2 = 2 см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $т_1$ = 1,0 нКл/м2 и $т_2$ = - 0,5 н Кл/м2 соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях r_1 = 1,5 см и r_2 = 3 см от центра сфер. Объем между сферами заполнен стеклом (ε = 10).

ВЫВОДЫ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

- **С помощью теоремы Остроградского - Гаусса можно рассчитать Е и φ от различных заряженных поверхностей.**

  чтобы рассчитать поле, созданное любой конфигурацией зарядов в данной точке, нужно через эту точку провести замкнутую поверхность произвольной формы и рассчитать поток вектора напряженности через эту поверхность. По теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0 , то, зная величину заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности можно найти напряженность поля в любой точке пространства.

- **Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.**

- **Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.**

Теорема Гаусса есть следствие закона Кулона и принципа суперпозиции. Однако, взяв за изначальную аксиому утверждения теоремы, следствием станет закон Кулона, в связи с чем теорему Гаусса называют **альтернативной формулировкой закона Кулона**

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов равна энергии первого заряда в поле второго или энергии второго в поле первого

$$W_{П1} = q_1\varphi_{21} = q_1 k \frac{q_2}{r}$$

$$W_{П2} = q_2\varphi_{12} = q_2 k \frac{q_1}{r}$$

φ_{21} - потенциал поля, создаваемого вторым зарядом в месте нахождения первого.

φ_{12} - потенциал поля, создаваемого первым зарядом в месте нахождения второго.

Для системы зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$$

ϕi - потенциал, создаваемый в месте нахождения *i*-го заряда всеми остальными зарядами