

Лекция 3.2 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Е.В. Феськова,
канд. пед. наук, доцент кафедры «Инженерный бакалавриат CDIO»

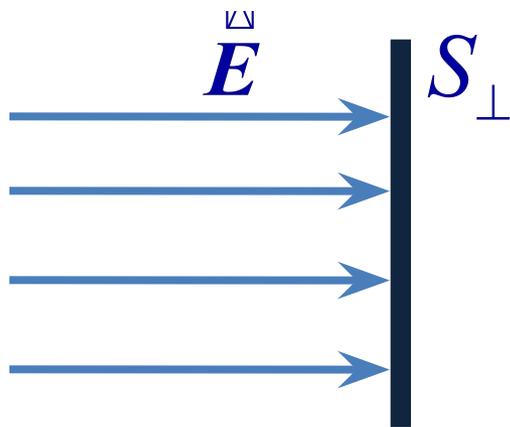
Красноярск 2023

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

С помощью силовых линий электрического поля можно определять: направление электрического поля; значение его напряженности по числу линий на единицу поверхности, перпендикулярной к силовым линиям.

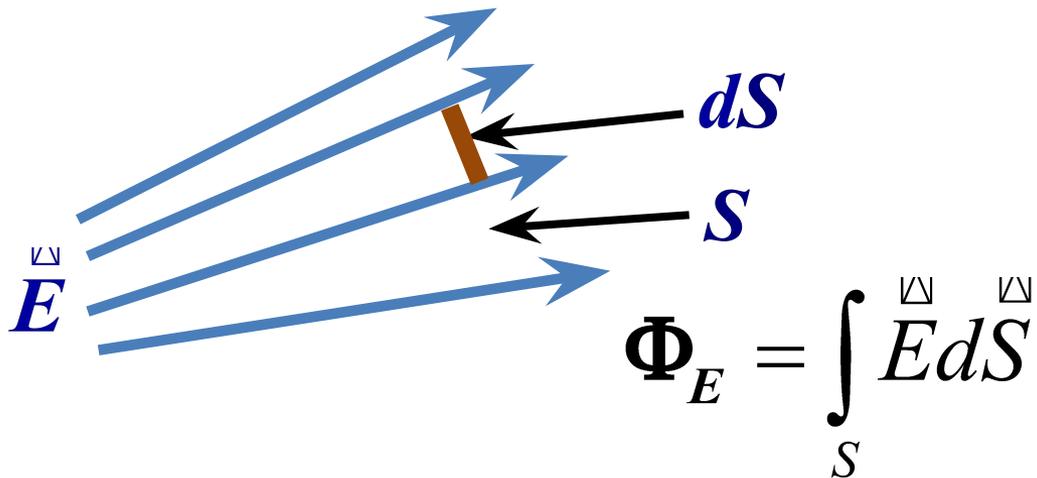
Число силовых линий, пронизывающих площадку dS , перпендикулярную к ним, определяет **поток вектора напряженности электрического поля** Φ_E

Если линии перпендикулярны поверхности, а поле однородно, то просто



$$\Phi_E = E \cdot S_{\perp}$$

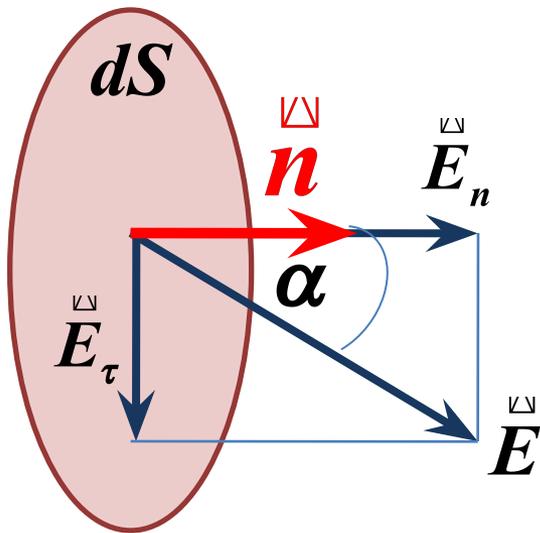
Если поле неоднородно, то поверхность S надо разбить на участки dS настолько малые, чтобы в пределах этих участков поле можно было считать однородным



$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

Вектор \vec{E} может составлять с площадкой любой угол. Тогда его раскладывают на две компоненты: \vec{E}_τ \vec{E}_n



\vec{E}_n создает поток

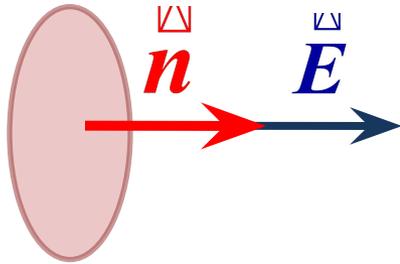
\vec{E}_τ не создает потока

$$d\Phi_E = E_n \cdot dS \quad \Rightarrow \quad d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$
$$E_n = E \cdot \cos\alpha$$

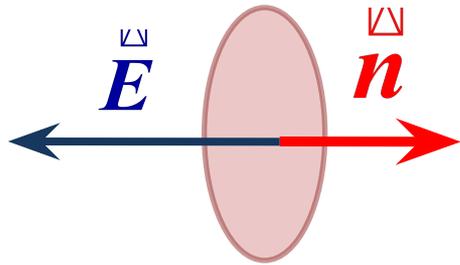
α — угол между вектором \vec{E} и нормалью к площадке \vec{n}

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

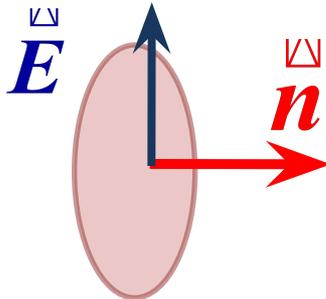
Поток вектора напряженности может быть и положительным, и отрицательным, и равен нулю в зависимости от угла между \vec{E} и \vec{n}



$$\alpha = 0, \quad \Phi_E = E \cdot S$$



$$\alpha = \pi, \quad \Phi_E = -E \cdot S$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_E = 0$$

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



М. В. Остроградский
русский математик
(1801 —1862)



Карл Фридрих Гаусс
немецкий ученый
(1777—1855)

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой общую формулировку закона Кулона и позволяет определить поток Φ_E через любую замкнутую поверхность

Теорема Остроградского-Гаусса: полный поток вектора напряженности через замкнутую поверхность произвольной формы численно равен алгебраической сумме электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности, поделенную на диэлектрическую проницаемость среды и электрическая постоянная

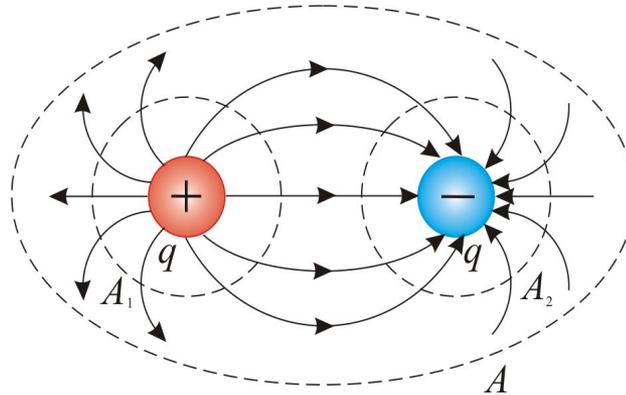
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Потоком вектора напряженности Φ через эту поверхность называется полное число силовых линий, проходящих через поверхность S

Поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е.

$$\Phi_E > 0$$



Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, поток здесь направлен внутрь

$$\Phi_E < 0$$

Общий поток через поверхность A равен нулю

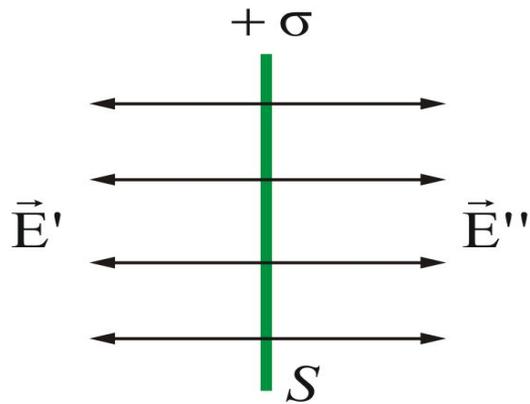
Если заряды равны, то общий поток через поверхность A равен нулю

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее = 0

ЗАДАЧИ

6. Круг радиусом $R = 15$ см помещен в однородное электрическое поле напряженностью $E = 360$ В/ м. Чему равен поток вектора напряженности сквозь круг, если его плоскость: 1) перпендикулярна силовым линиям; 2) составляет угол $\alpha = 45^\circ$ ними; 3) параллельна силовым линиям?
7. Точечный заряд $Q = 5$ мкКл помещен в центр куба с длиной ребра 9 см. 1) Чему равен поток вектора напряженности через всю поверхность куба? 2) Чему равен поток вектора напряженности через одну грань куба? 3) Как изменится ответ, если линейные размеры куба увеличить в 2 раза?
8. Определить поток вектора напряженности электрического поля Φ через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1 = 5$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Поверхностная плотность заряда на произвольной плоскости площадью S определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

q – заряд, сосредоточенный на площади S ;
 S – физически бесконечно малый участок поверхности.

Напряженность электрического поля бесконечной плоскости

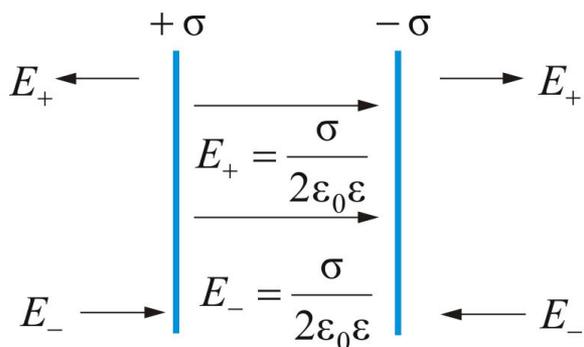
$$E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}$$

Разность потенциалов поля для одной бесконечной плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Поле между двумя параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями



Результирующее поле, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей

Вне плоскостей напряженность поля

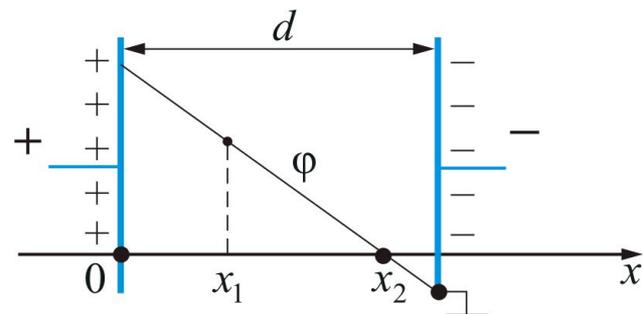
$$E = E_+ + E_- \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad E = 0$$

Разность потенциалов для двух плоскостей

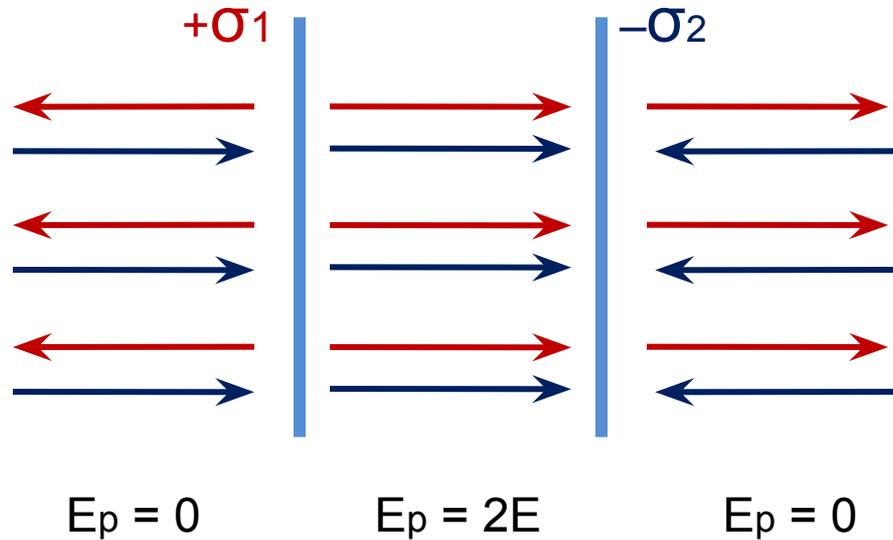
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) \quad \text{или}$$

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

d – расстояние между плоскостями



ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



$$|\sigma_1| = |\sigma_2|$$

$$E_p = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

ЗАДАЧИ

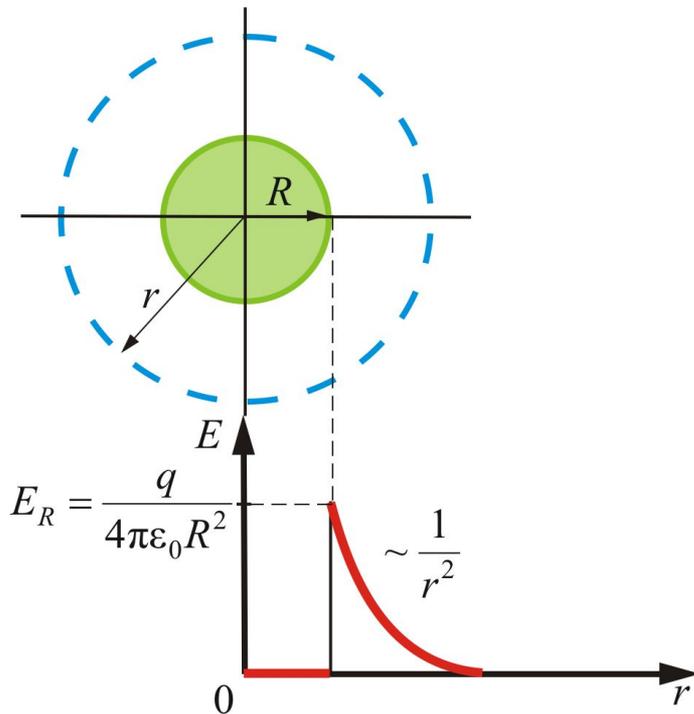
9. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 0,1$ нКл/см² расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряженности угол 30° . Определить поток Φ вектора напряженности через эту пластинку, если её радиус равен 15см.

10. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными плоскостями с поверхностями зарядов $\sigma_1 = -6$ мкКл/м² и $\sigma_2 = -4$ мкКл/м². Определить напряженность поля между плоскостями.

11. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м². Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $x_1 = 20$ см и $x_2 = 50$ см от плоскости.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Поверхностная плотность зарядов σ сферы:
$$\sigma = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}$$



Напряженность электрического поля сферы:

если $r < R$, то $E = 0$ (внутри сферы или шара электрического поля нет)

если $r = R$, то

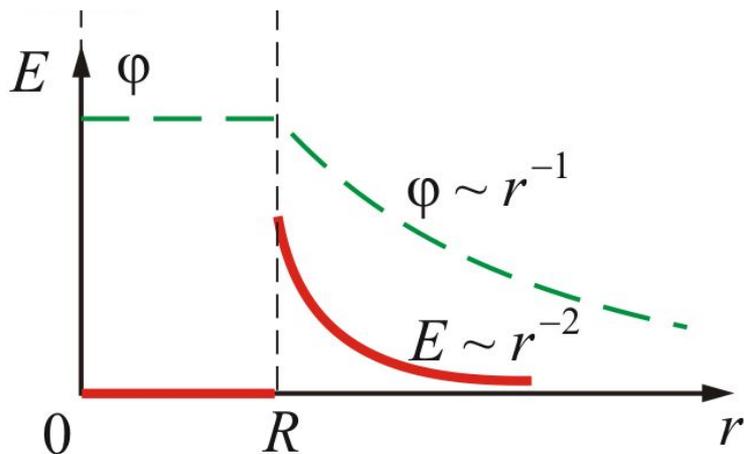
$$E = k \frac{|q|}{\epsilon R^2}$$

если $r > R$, то

$$E = k \frac{|q|}{\epsilon r^2}$$

где – r расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м
 R - радиус сферы или шара, м

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Поверхностная плотность зарядов σ сферы:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}$$

Разность потенциалов поля сферы:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{внутри и на поверхности} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$

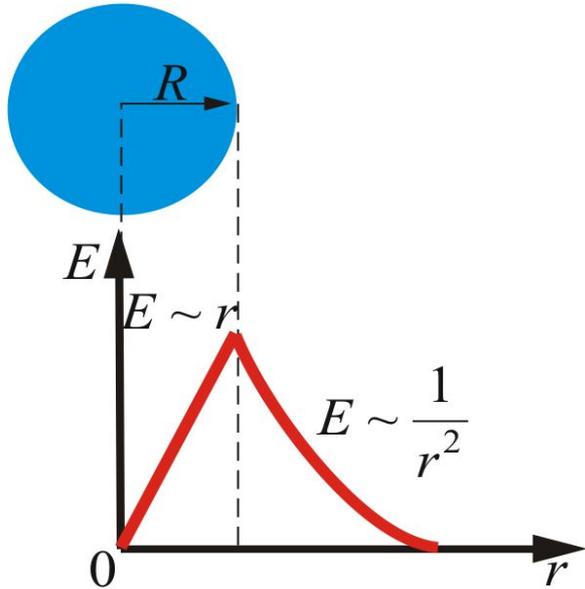
где r – расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м
 R – радиус сферы или шара, м

ЗАДАЧИ

12. По поверхности сферы радиусом $R = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 35$ мКл. Оценить напряженность электрического поля на расстоянии: 1) $r_1 = 1$ см от центра сферы; 2) $r_2 = 15$ см от поверхности сферы.

13. В центре сферы, несущей равномерно распределенный положительный заряд 10 нКл, находится маленький шарик с отрицательным зарядом -5 нКл. Найдите потенциал электрического поля в точке, находящейся вне сферы на расстоянии 9 м от ее центра.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



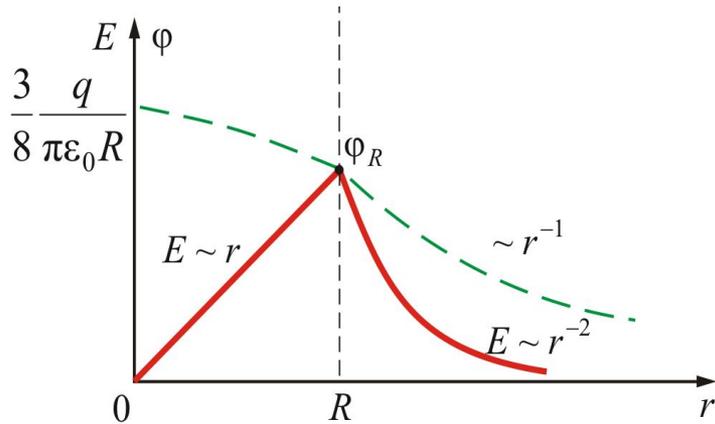
Объемная плотность зарядов ρ шара: $\rho = \frac{3q}{4\pi r^3}$

Напряженность поля шара

Внутри шара при $r < R$, сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0\epsilon} & \text{— внутри шара (} r < R \text{)} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0\epsilon} & \text{— на поверхности шара (} r = R \text{)} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0\epsilon r^2} & \text{— вне шара (} r > R \text{).} \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Объемная плотность зарядов
 р шара:

$$\rho = \frac{3q}{4\pi r^3}$$

Разность потенциалов поля шара:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{— в центре шара } (r = 0) \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{r^2}{R^2} \right) & \text{— внутри шара } (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{— на поверхности и вне шара } (r > R) \end{cases}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{6\epsilon_0\epsilon} (r_2^2 - r_1^2)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\epsilon_0 2R^3}$$

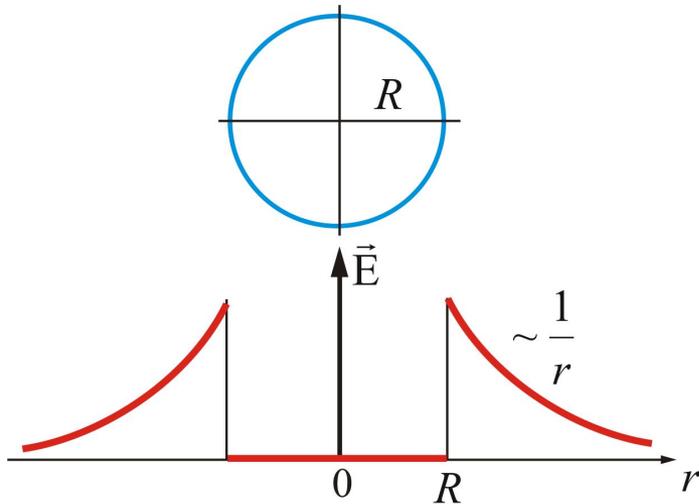
ЗАДАЧИ

14. Шар несет на себе равномерно распределенный заряд. Определить радиус шара, если потенциал в центре шара равен $\varphi_1 = 200$ В, а в точке, лежащей от его центра на расстоянии $r = 50$ см, $\varphi_2 = 40$ В.

15. Объёмная плотность заряда равномерно заряженного шара радиусом $R = 6$ см, изготовленного из диэлектрика с проницаемостью $\epsilon_1 = 2$, равна $\rho = 6,7 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³. Найти напряжённость E электрического поля на расстоянии $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см и $r_3 = 9$ см от центра шара, считая, что относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар, равна $\epsilon_2 = 3$. Построить график зависимости напряжённости поля как функции расстояния от центра шара.

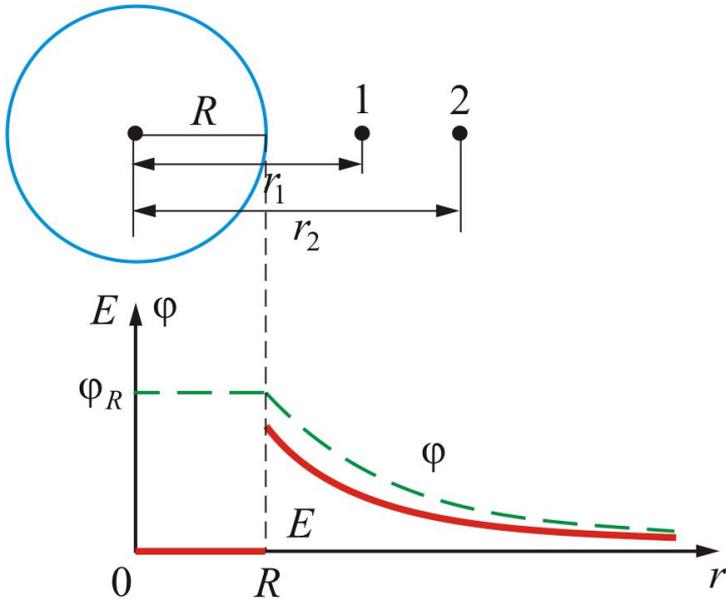
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью зарядов τ :



$$E = \begin{cases} \text{Внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ вне цилиндра} \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Разность потенциалов поля бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью зарядов τ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

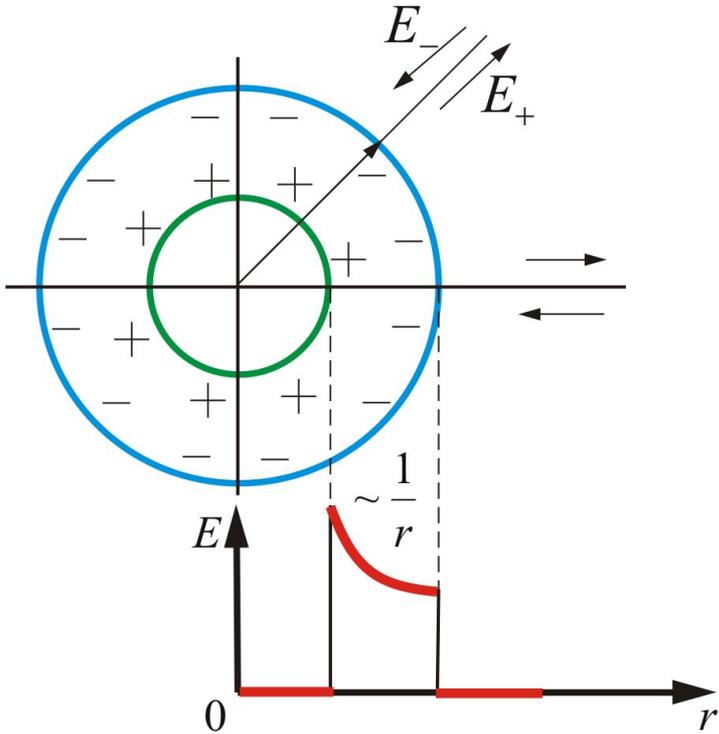
$$\varphi = \begin{cases} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} & \text{внутри поверхности} \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

16. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью 20 нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях 0,5 см и 2 см от поверхности цилиндра в средней его части.

17. Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q=1$ нКл с расстояния $r_1=5$ см до $r_2=2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равно 50 мкДж.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



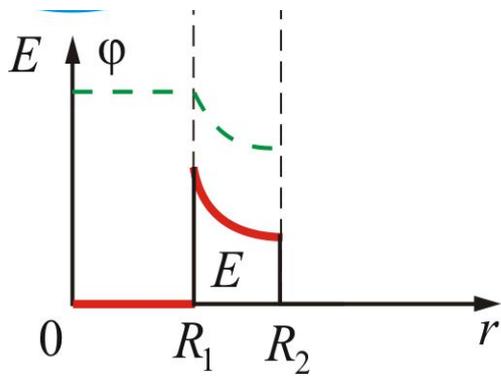
Напряженность поля бесконечных заряженных с линейной плотностью зарядов τ коаксиальных цилиндров:

Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать $E = 0$. В зазоре между цилиндрами, поле определяется:

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

$$R_1 < r < R_2$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА



Разность потенциалов поля бесконечных заряженных с линейной плотностью зарядов τ коаксиальных цилиндров:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} & \text{внутри внешнего цилиндра ()} & r < R_1 \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} & \text{между цилиндрами ()} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{вне цилиндров} & r > R_2 \end{cases}$$

внутри меньшего цилиндра $\varphi = \text{const}$;

между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,

вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю

ЗАДАЧИ

18. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\tau_1 = 1,0$ нКл/м² и $\tau_2 = -0,5$ нКл/м² соответственно. Найти напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 1,5$ см и $r_2 = 3$ см от центра сфер. Объем между сферами заполнен стеклом ($\epsilon = 10$).

ВЫВОДЫ ПО ТЕОРЕМЕ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

- **С помощью теоремы Остроградского - Гаусса можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.**

чтобы рассчитать поле, созданное любой конфигурацией зарядов в данной точке, нужно через эту точку провести замкнутую поверхность произвольной формы и рассчитать поток вектора напряженности через эту поверхность. По теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 , то, зная величину заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности можно найти напряженность поля в любой точке пространства.

- **Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.**
- **Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.**

Теорема Гаусса есть следствие закона Кулона и принципа суперпозиции. Однако, взяв за изначальную аксиому утверждения теоремы, следствием станет закон Кулона, в связи с чем теорему Гаусса называют **альтернативной формулировкой закона Кулона**

ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов равна энергии первого заряда в поле второго или энергии второго в поле первого

$$W_{П1} = q_1 \varphi_{21} = q_1 k \frac{q_2}{r}$$

$$W_{П2} = q_2 \varphi_{12} = q_2 k \frac{q_1}{r}$$

φ_{21} - потенциал поля, создаваемого вторым зарядом в месте нахождения первого.

φ_{12} - потенциал поля, создаваемого первым зарядом в месте нахождения второго.

Для системы зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i$$

φ_i - потенциал, создаваемый в месте нахождения i -го заряда всеми остальными зарядами