

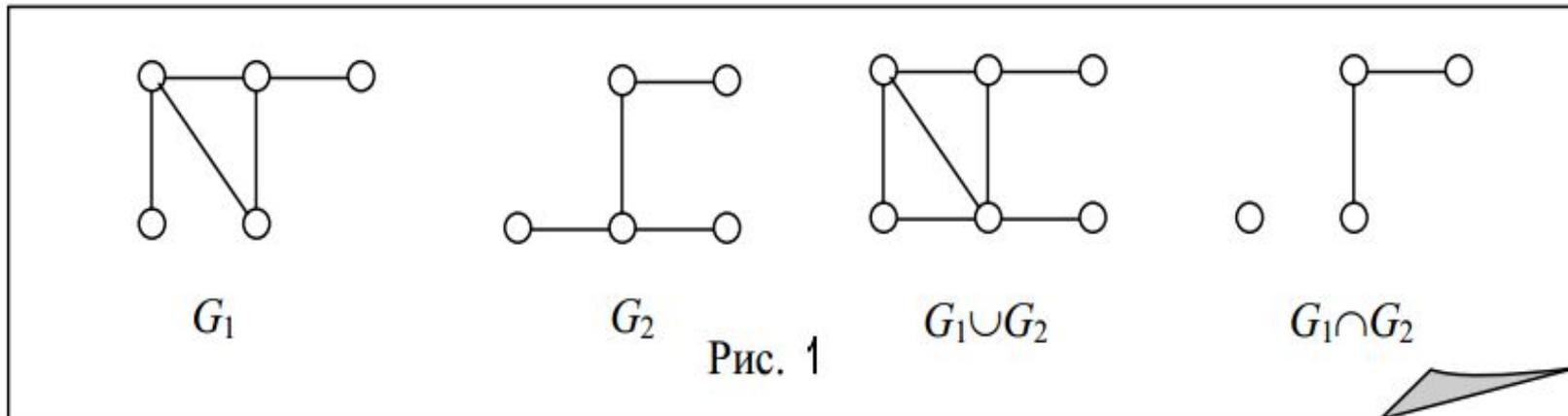
# Основы теории графов.

## Операции над графами

Рассмотрим семь операций над *графами*, три из которых являются бинарными, включающими два *графа*, а остальные четыре – унарные, т. е. определены на одном *графе*.

1. **Объединение графов.** Объединением графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G_1 \cup G_2$ , в котором  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  и  $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ .

2. **Пересечение графов.** Пересечением графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G_1 \cap G_2$ , в котором  $V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$  и  $E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$  (рис. 1).



**Кольцевая сумма двух графов  $G_1$  и  $G_2$ , обозначаемая как**

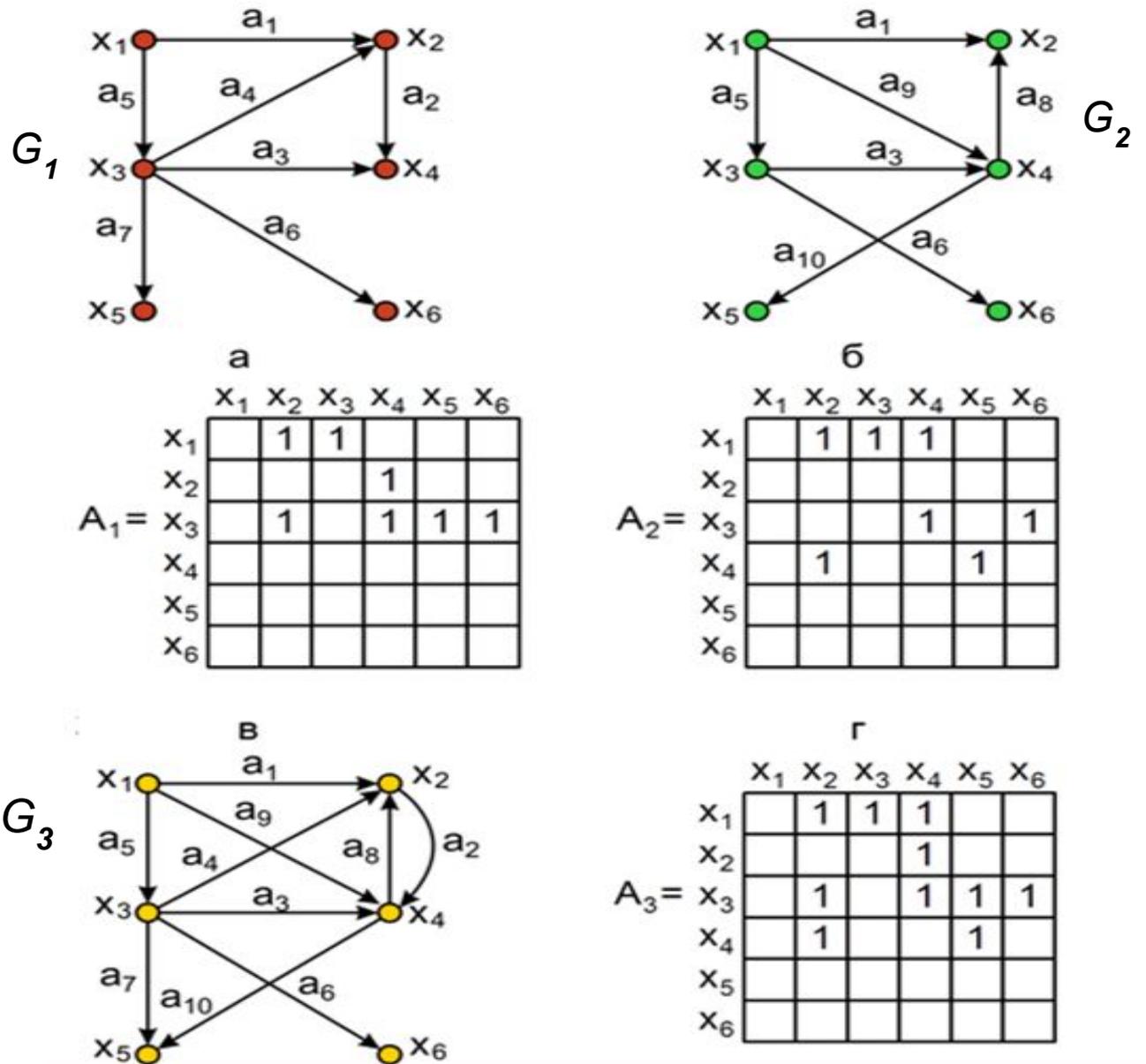
$$G_1 \oplus G_2$$

**представляет собой граф  $G_5$ , порожденный на множестве ребер**

$$A_1 \oplus A_2$$

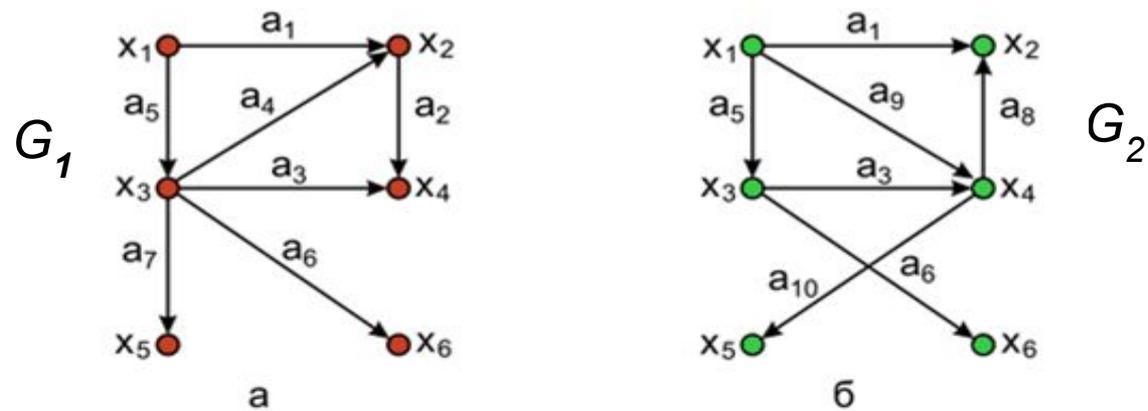
**Другими словами, граф  $G_5$  не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в  $G_1$ , либо в  $G_2$ , но не в обоих одновременно.**

**Кольцевая сумма графов  $G_1$  и  $G_2$  показана на рис. 2.д, а результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического сложения по mod 2 матриц смежности исходных графов  $G_1$  и  $G_2$ . показана на рис. 2.е.**

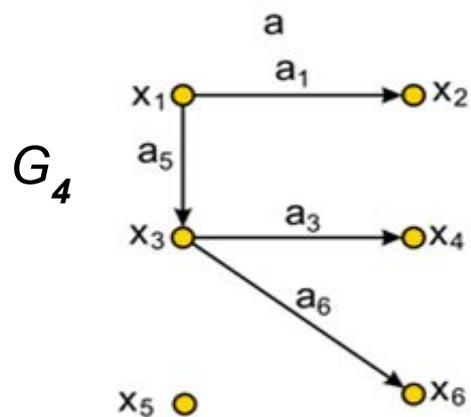


$G_1 \cup G_2$   
 $G_3 = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$

рис. 2



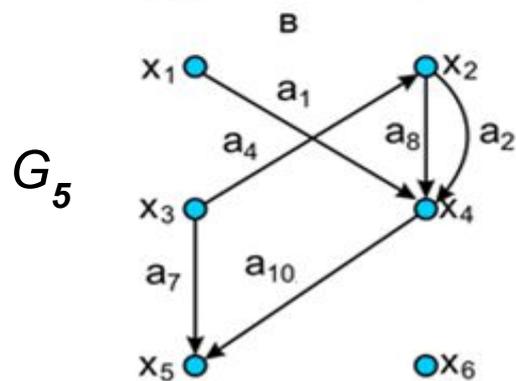
$$G_4 = (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$$



$A_3 =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$		1	1			
$x_2$						
$x_3$				1		1
$x_4$						
$x_5$						
$x_6$						

$$G_1 \oplus G_2$$



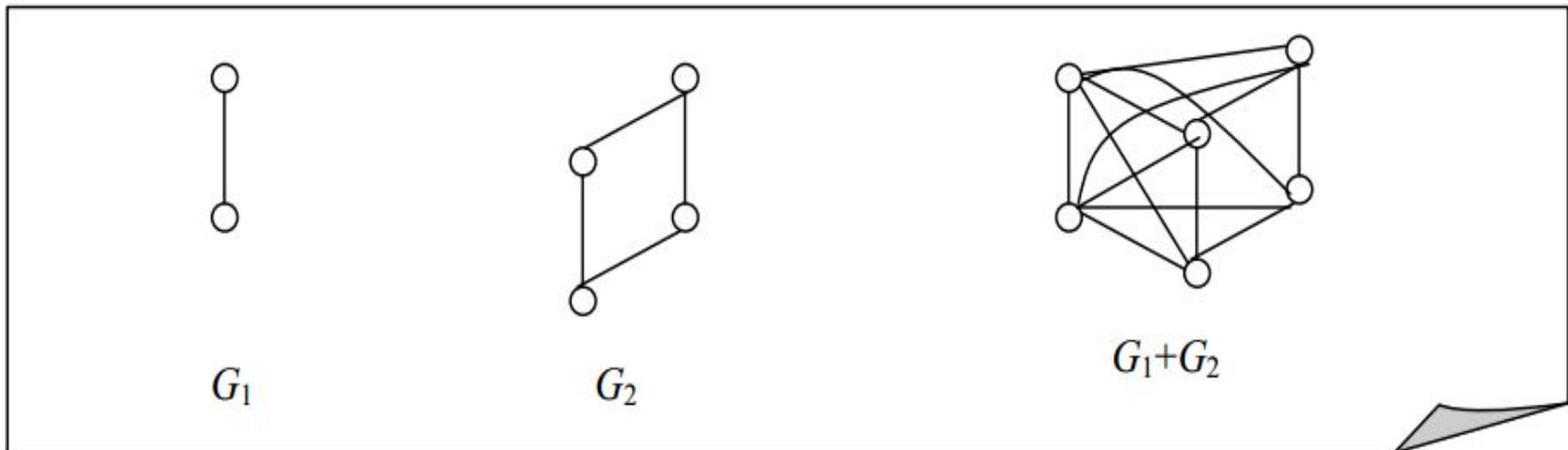
$A_3 =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$				1		
$x_2$				1		
$x_3$		1			1	
$x_4$		1			1	
$x_5$						
$x_6$						

рис. 3

## Соединение графов.

Соединением графов  $G_1$  и  $G_2$  называется объединение  $G_1 \cup G_2$ , дополненное всеми рёбрами, соединяющими вершины  $G_1$  с вершинами  $G_2$ . Обозначается соединение:  $G_1+G_2$



## Рассмотрим унарные операции на графе.

### Удаление вершины.

Если  $x_i$  -вершина графа  $G = (X, A)$ , то  $G-x_i$  -порожденный подграф графа  $G$  на множестве вершин  $X-x_i$ , т. е.  $G-x_i$  является графом, получившимся после удаления из графа  $G$  вершины  $x_i$  и всех ребер, инцидентных этой вершине. Удаление вершины  $x_3$  показано на рис. 4,б (для исходного графа, изображенного на рис.4,а). Матрица смежности исходного графа представлена на таблице1,а). Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления вершины  $x_i$  получается путем удаления соответствующего  $i$  - го столбца и  $i$  -ой строки из исходной матрицы и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали начиная с  $(i+1)$  - го столбца и  $(i+1)$  - ой строки (таблица1,б). В дальнейшем элементы графа могут быть переобозначены.

## Удаление ребра или удаление дуги.

Если  $a_i$  - дуга графа  $G = (X, A)$ , то  $G - a_i$  – подграф графа  $G$ , получающийся после удаления из  $G$  дуги  $a_i$ . Заметим, что концевые вершины дуги  $a_i$  не удаляются. Удаление из графа множества вершин или дуг определяется как последовательное удаление определенных вершин или дуг. Удаление дуг  $a_4$  и  $a_7$  показано на рис. 4,в. Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления дуги  $a_i$  получается путем удаления соответствующих элементов из исходной матрицы ( таблица 1в).

## **Замыкание или отождествление.**

Говорят, что пара вершин  $x_i$  и  $x_j$  в графе  $G$  замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе  $G$ , инцидентные  $x_i$  и  $x_j$ , становятся инцидентными новой вершине. Например, результат замыкания вершины  $x_1$  и  $x_2$  показан на [рис.4,г](#) для графа  $G$  ([рис.4,а](#)). Матрица смежности графа после выполнения операции замыкания вершин  $x_i$  и  $x_j$  получается путем поэлементного логического сложения  $i$ -го и  $j$ -го столбцов и  $i$ -ой и  $j$ -строк в исходной матрице и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали ([таблица 1г](#)).

## Стягивание.

Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин. *Граф*, изображенный на **рис. 4,д** получен стягиванием дуги  $a_1$ , а на **рис. 4,е** – стягиванием дуг  $a_1$ ,  $a_6$  и  $a_7$ . Соответствующие результирующие матрицы смежности показаны в **таблицах 1д и 1е**.

Рассматриваются также другие более сложные операции на графах, такие как, произведение графов, прямое произведение и др.

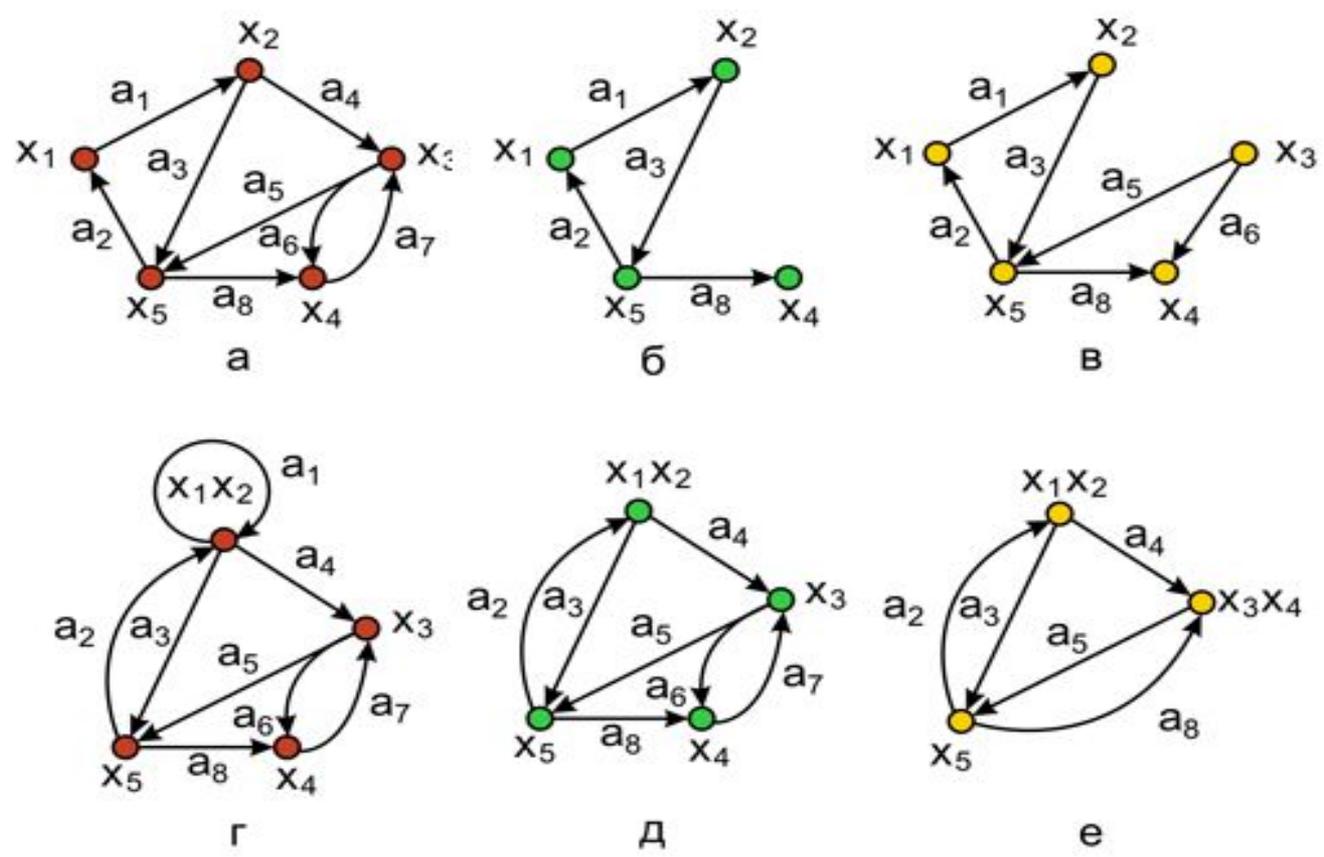


рис. 4

Таблица 1а.					Таблица 1б.				Таблица 1в.							
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		$X_1$	$X_2$	$X_4$	$X_5$		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	1					$X_1$	1				$X_1$	1				
$X_2$		1		1		$X_2$			1		$X_2$					1
$X_3$			1	1		$X_4$					$X_3$			1	1	
$X_4$		1				$X_5$	1		1		$X_4$					
$X_5$	1			1							$X_5$	1			1	

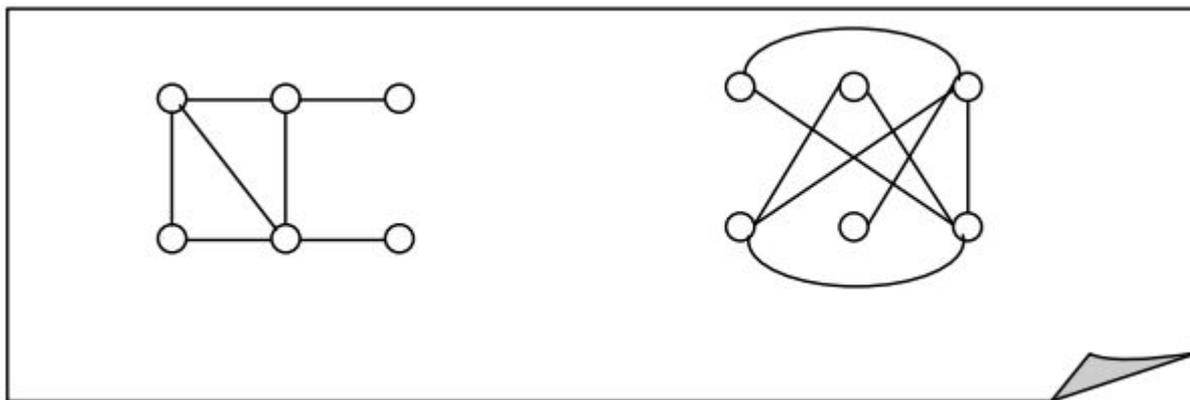
  

Таблица 1г.					Таблица 1д.				Таблица 1е.				
	$X_{1-2}$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		$X_{1-2}$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		$X_{1-2}$	$X_{3-4}$	$X_5$
$X_{1-2}$	1	1		1	$X_{1-2}$		1		1	$X_{1-2}$		1	1
$X_3$			1	1	$X_3$			1	1	$X_3$			1
$X_4$		1			$X_4$		1			$X_5$	1	1	
$X_5$	1			1	$X_5$	1			1				

$\bar{G}$ 

## Дополнение

Граф  $\bar{G}$  называется дополнением графа  $G$ , если  $V(\bar{G}) = V(G)$ , причём вершины  $u$  и  $v$  являются смежными в графе  $\bar{G}$  тогда и только тогда, когда они не смежны в  $G$ . Таким образом,  $G$  и  $\bar{G}$  не имеют общих рёбер, а  $E(G) \cup E(\bar{G})$  с общим множеством вершин образует полный граф



$u_i$ 

## Связные графы и расстояние в графах

Граф  $G$  называется **связным**, если в нем для любых двух вершин  $u$  и  $v$  существует  $(u,v)$ -маршрут.

В **ориентированных графах** рассматриваются ориентированные маршруты, в которых для любой пары соседних вершин  $u_i$  и  $u_{i+1}$  существует дуга  $(u_i, u_{i+1})$  ( $u_i$  – начало дуги,  $u_{i+1}$  – конец). Другими словами – это маршруты, по которым можно передвигаться от начала маршрута к концу с соблюдением ориентации (стрелок).

# Напомню

**Маршрутом** в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Маршрут называется **замкнутым**, если он начинается и заканчивается в одной вершине, в противном случае – **открытым**.

**Цепь** – это маршрут, в котором нет повторяющихся ребер.

**Простой цепью** называется маршрут, в котором все вершины и ребра различны, кроме, может быть, первой и последней.

**Цикл** – замкнутая цепь.

**Простым циклом** называется замкнутая простая цепь.

**Расстоянием** между вершинами  $U$  и  $V$  называется длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины  $U$  и  $V$ .

- *Орграф, в котором для любой пары вершин  $u$  и  $v$  существуют ориентированные  $(u, v)$ - и  $(v, u)$ -маршруты, называется **сильно связным**.*
- *Если же для любой пары вершин  $u$  и  $v$  существует ориентированный  $(u, v)$ - или  $(v, u)$ -маршрут, то такой орграф называется **односторонне связным**.*
- *Орграф в котором любую пару вершин можно соединить маршрутом без соблюдения ориентации (т.е. являющийся связным, если убрать на всех дугах стрелки) называется **слабо связным***

Знаем, что всякий  $(u, u)$ -маршрут содержит  $(u, u)$ -цепь.

Для того, что бы её получить, достаточно в маршруте исключить дублирование участков, которые проходятся несколько раз.

Кроме того, если из  $(u, u)$ -цепи удалить все промежуточные циклические участки, то получим простую  $(u, u)$ -цепь. Таким образом, можно дать эквивалентное определение связности:

***граф называется связным, если в нём любую пару вершин  $u$  и  $v$  можно соединить простой  $(u, v)$ -цепью.***

Для связных графов вводится также количественная характеристика их связности.

***Связностью графа  $G$***  называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Так, например, полный граф  $K_n$  имеет связность  $n-1$ ; простая цепь  $P_n$  имеет связность 1; простой цикл  $C_n$  имеет связность 2; колесо  $W_n$  имеет связность 3.

Наименьшее число рёбер графа  $G$ , удаление которых приводит к несвязному подграфу, называется ***рёберной связностью*** графа  $G$ .

## Компоненты связности. Связность графа и его дополнения

Максимальные связные подграфы графа  $G$  называются его **компонентами связности**.

Здесь “максимальные” означает: не содержатся в других подграфах с большим числом элементов.

На множестве вершин  $V(G)$  определим бинарное отношение.

Положим  $v \sim u$ , если в  $G$  существует  $(v, u)$ -маршрут.

Легко видеть, что это отношение является отношением эквивалентности, причем  $v \sim u$  тогда и только тогда, когда вершины  $v$  и  $u$  содержатся в одной и той же компоненте связности.

Таким образом, совокупность компонент связности есть разбиение данного графа (объединение компонент дает весь граф; различные компоненты связности не пересекаются).

*Определение*      *Компонентой связности графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа.*

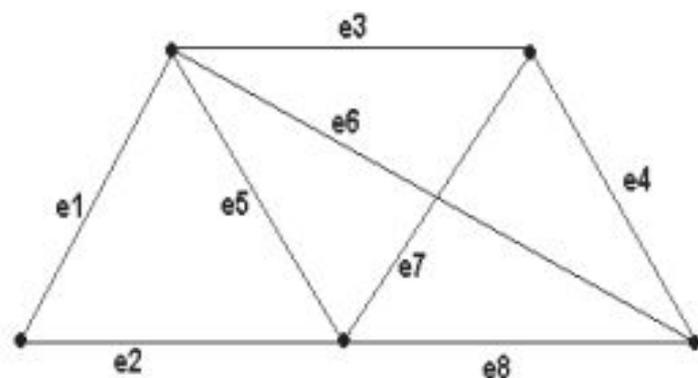
При исследовании графов возникает вопрос: насколько сильно связан связный граф? Этот вопрос можно сформулировать и так: сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы он перестал быть связным? Под операцией удаления вершин из графа будем понимать операцию, заключающуюся в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами.

**Определение 1.42.** Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется **разделяющейся**.

**Определение 1.43.** **Разделяющим множеством** связного графа  $G$  называется такое множество его ребер, удаление которого приводит к несвязному графу.

**Определение 1.44.** **Разрезом** называется такое разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим.

**Определение 1.45.** **Разрез, состоящий из одного ребра, называется мостом (перешейком).**



Для графа, изображенного на рис. 1.19, каждое из множеств  $\{e_1, e_2, e_5\}$  и  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  является разделяющим.

Разрезом является множество ребер  $\{e_1, e_2\}$ .

В графе возможно выделить несколько разделяющих множеств и разрезов.

## Методика выделения компонент связности

Пусть граф задан матрицей смежности:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>	0	1	0	0	0	0	0	0
<i>b</i>	1	0	1	0	0	1	0	0
<i>c</i>	0	1	0	0	0	1	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	1	0
<i>e</i>	0	0	0	1	0	0	1	0
<i>f</i>	0	1	1	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	1	1	0	0	0
<i>h</i>	0	0	0	0	0	1	0	0

Составим вспомогательную таблицу:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	2	3	0	0	3	0	4

Вершину  $a$  пометим единицей.

Вершины, смежные с  $a$ , пометим числом 2 ( $b$ ).

Вершины, смежные с  $b$  и еще не помеченные, пометим числом 3 ( $c, f$ ).

Вершины, смежные с  $c$  и  $f$  и еще не помеченные, пометим числом 4 ( $h$ ).

На этом процесс обрывается, так как с вершиной  $h$  смежна только вершина  $f$ , но она уже помечена, получаем первую компоненту связности:  $a, b, c, f, h$ .

Рассмотрим оставшиеся вершины.

$d$	$e$	$g$
1	2	2

Вершину  $d$  пометим единицей.

С вершиной  $d$  смежны вершины  $e$  и  $g$ , пометим их числом 2.

Получаем вторую компоненту связности:  $d, e, g$ .

## Достижимость в графах

Граф  $\hat{G}$  называется *графом достижимости* графа  $G$  (или *транзитивным замыканием* графа  $G$ ), если  $V(\hat{G}) = V(G)$  и в графе  $\hat{G}$  вершины  $v$  и  $u$  соединены ребром тогда и только тогда, когда в  $G$  существует  $(u, v)$ -маршрут. Другими словами, в графе  $\hat{G}$   $v$  и  $u$  смежны, если  $v \sim u$  в графе  $G$  (в смысле отношения эквивалентности, введенного выше).

Понятно, что граф  $G$  связан в том и только том случае, когда  $\hat{G} = K_n$  – полный граф. В случае же, когда  $G$  не является связным,  $\hat{G}$  является объединением нескольких полных подграфов, которые являются его компонентами связности.

**Теорема.** Всякий граф или его дополнение является связным.

**Доказательство.** Предположим, что  $G$  – не связный граф, и докажем, что тогда его дополнение  $\bar{G}$  есть связный граф. Действительно, пусть  $A$  – множество вершин какой-либо компоненты связности графа  $G$ , а  $B = V(G) \setminus A$  – остальные вершины. Тогда в графе  $\bar{G}$  всякая вершина  $a \in A$  соединена ребром с каждой вершиной  $b \in B$ . Пусть  $a_i, a_j \in A$ , тогда  $(a_i, b, a_j)$  – маршрут, соединяющий  $a_i$  с  $a_j$  (здесь  $b$  – любая вершина из  $B$ ). Аналогично, если  $b_i, b_j \in B$ , то  $(b_i, a, b_j)$  – маршрут соединяющий  $b_i$  с  $b_j$ , ( $a$  – любая вершина из  $A$ ). Таким образом, для любых двух вершин в  $\bar{G}$  существует соединяющий их маршрут (длины не более 2), что и требовалось доказать.

Задач, в которых используется понятие достижимости, довольно много.

Вот одна из них. Граф может быть моделью какой-то организации, в которой люди представлены вершинами, а дуги интерпретируют каналы связи.

При рассмотрении такой модели можно поставить вопрос, может ли информация от одного лица  $x_i$  быть передана другому лицу  $x_j$ , т. е. существует ли путь, идущий от вершины  $x_i$  к вершине  $x_j$ .

Если такой путь существует, то говорят, что вершина  $x_j$  достижима из вершины  $x_i$ .

Можно интересоваться достижимостью вершины  $x_j$  из вершины  $x_i$  только на таких путях, длины которых не превосходят заданной величины или длина которых меньше наибольшего числа вершин в графе и т. п. задачи.

Достижимость в графе описывается матрицей достижимости  $R=[r_{ij}]$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – число вершин графа, а каждый элемент определяется следующим образом:

$r_{ij}=1$ , если вершина  $x_j$  достижима из  $x_i$ ,

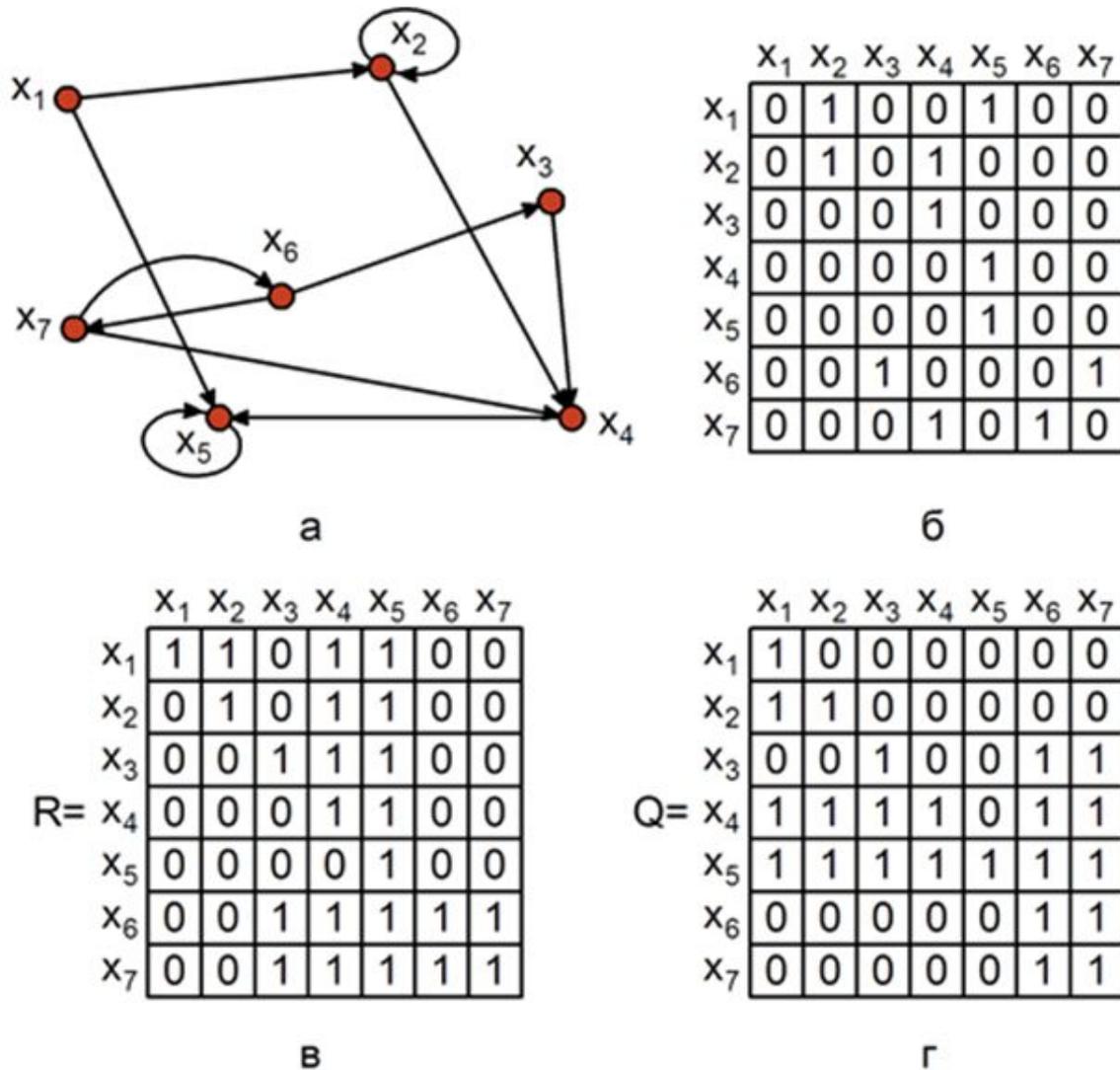
$r_{ij}=0$ , в противном случае.

Множество вершин  $R(x_i)$  графа  $G$ , достижимых из заданной вершины  $x_i$ , состоит из таких элементов  $x_j$ , для которых  $(i, j)$ -й элемент в матрице достижимостей равен 1. Очевидно, что все диагональные элементы в матрице  $R$  равны 1, поскольку каждая вершина достижима из себя самой с путем длины 0. Поскольку прямое отображение 1-го порядка  $\Gamma^+(x_i)$  является множеством таких вершин  $x_j$ , которые достижимы из  $x_i$  с использованием путей длины 1, то множество  $\Gamma^+(\Gamma^+(x_i)) = \Gamma^+(x_i)$  состоит из вершин, достижимых из  $x_i$  с использованием путей длины 2. Аналогично  $\Gamma^{+p}(x_i)$  является множеством вершин, которые достижимы из  $x_i$  с помощью путей длины  $p$ .

Так как любая вершина графа, которая достижима из  $x_i$ , должна быть достижима с использованием пути (или путей) длины 0 или 1, или 2, ..., или  $p$ , то множество вершин, достижимых для вершины  $x_i$  можно представить в виде:

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{+1}(x_i) \cup \Gamma^{+2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{+p}(x_i)$$

Множество достижимых вершин  $R(x_i)$  представляет собой прямое транзитивное замыкание вершины  $x_i$ , т. е.  $R(x_i) = T^+(x_i)$ . Следовательно, для построения матрицы достижимости находим достижимые множества  $R(x_i)$  для всех вершин  $x_i \in X$ . Полагая,  $r_{ij}=1$ , если  $x_j \in R(x_i)$  и  $r_{ij}=0$  в противном случае.



**Рис. 5 Достижимость в графе: а – граф; б – матрица смежности; в – матрица достижимости; г- матрица контрдостижимости.**

Матрица достижимости имеет вид, как показано на **рис. 5,в.**

Матрицу достижимости можно построить по матрице смежности ( **рис. 5,б**), формируя множества  $T^+(x_i)$  для каждой вершины  $x_i$ .

Матрица контрдостижимости  $Q = [q_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – число вершин графа, определяется следующим образом:

$q_{ij} = 1$ , если из вершины  $x_j$  можно достичь вершину  $x_i$ ,

$q_{ij} = 0$ , в противном случае.

Контрдостижимым множеством  $Q(x_i)$  является множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достичь вершины  $x_i$ . Аналогично построению достижимого множества

$R(x_i)$  можно записать выражение для  $Q(x_i)$ :

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-p}(x_i)$$

Таким образом,  $Q(x_i)$  – есть обратное *транзитивное замыкание* вершины  $x_i$ , т. е.  $Q(x_i) = T^-(x_i)$ .

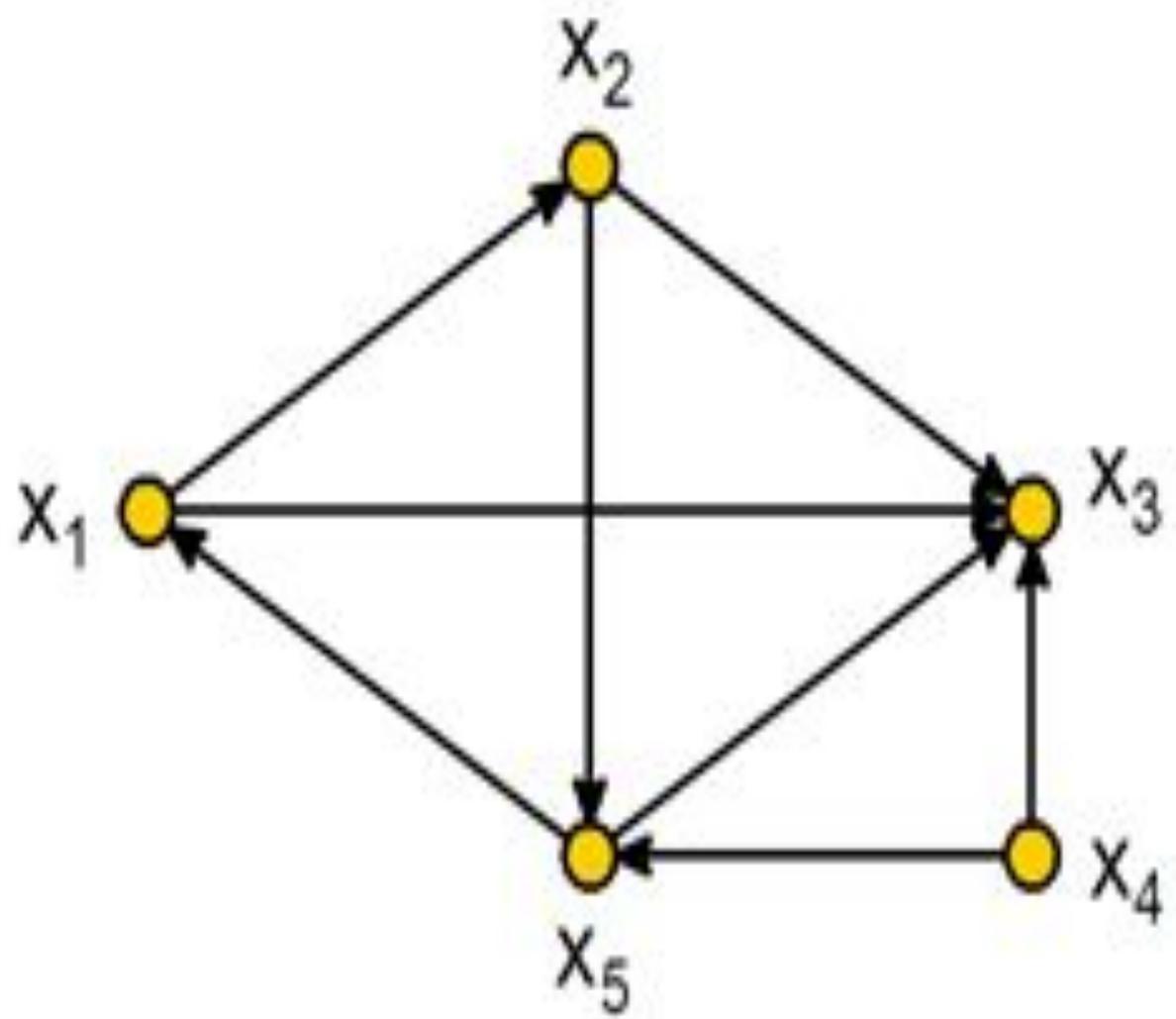
Из определений, очевидно, что столбец  $x_i$  матрицы  $Q$  (в котором  $q_{ij} = 1$ , если  $x_j \in Q(x_i)$ , и  $q_{ij} = 0$  в противном случае) совпадает со строкой  $x_i$  матрицы  $R$ , т.е.  $Q = R^T$ , где  $R^T$  – матрица, транспонированная к матрице достижимости  $R$ .

## Нахождение множества вершин, входящих в путь

Если необходимо узнать о вершинах графа, входящих в эти пути, то следует вспомнить определения прямого и обратного транзитивных замыканий. Так как  $T^+(x_i)$  – это *множество вершин*, в которые есть пути из вершины  $x_i$ , а  $T^-(x_j)$  – *множество вершин*, из которых есть пути в  $x_j$ , то

$T^+(x_i) \cap T^-(x_j)$  – множество вершин, каждая из которых принадлежит, по крайней мере, одному пути, идущему от  $x_i$  к  $x_j$ .

Эти вершины называются *существенными* или *неотъемлемыми* относительно двух концевых вершин  $x_i$  и  $x_j$ . Все остальные *вершины графа* называются *несущественными* или *избыточными*, поскольку их удаление не влияет на пути от  $x_i$  к  $x_j$ .



# Транзитивные замыкания

## Прямое транзитивное замыкание

**Прямым транзитивным замыканием** некоторой вершины  $x_i = T^+(x_i)$  является объединение самой вершины  $x_i$  с прямыми отображениями 1-го порядка, второго порядка и т. д., т. е.

$$T^+(x_i) = x_i \cup \Gamma^{+1}(x_i) \cup \Gamma^{+2}(x_i) \cup \dots$$

Многозначные отображения находятся до тех пор, пока в них добавляются новые вершины.

Так, для графа  $\Gamma$

$$\Gamma^{+1}(x_1) = \{x_2, x_3\}, \Gamma^{+2}(x_1) = \{x_3, x_5\}, \Gamma^{+3}(x_1) = \{x_3, x_1\}, \Gamma^{+4}(x_1) = \{x_2, x_3\}.$$

Отображение четвертого порядка содержит те же элементы, что и отображение 1-го порядка, следовательно, других элементов в последующих отображениях не появится. *Транзитивное замыкание* для вершины  $x_1$  получается следующим образом:

$$T^+(x_1) = x_1 \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_3, x_5\} \cup \{x_3, x_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}.$$

**Прямое транзитивное замыкание** некоторой вершины  $x_i$   $\Gamma^+(x_i)$  – это множество вершин, достижимых из вершины  $x_i$ , т. е.

$$T(x_i) = \{x_j | \exists \text{ путь из } x_i \text{ в } x_j\}.$$

### Обратное транзитивное замыкание

**Обратным транзитивным замыканием** некоторой вершины  $x_i$   $\Gamma^-(x_i)$  является объединение этой вершины с обратными отображениями 1-го, 2-го и т. д.  $n$ -го порядка, т. е.

$$T^-(x_i) = x_i \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots$$

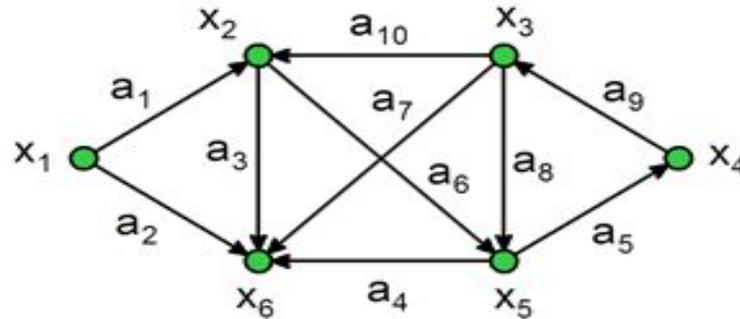
Иначе, обратное транзитивное замыкание для некоторой вершины  $x_i$   $\Gamma^-(x_i)$  – это множество вершин, из которых достижима

вершина  $x_i$ , т. е.  $T^-(x_i) = \{x_j | \exists \text{ путь из } x_j \text{ в } x_i\}$ .

Рассмотрим построение обратного транзитивного замыкания для графа на рис. 3.1.

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_5\}, \Gamma^{-2}(x_1) = \{x_2, x_4\}, \Gamma^{-3}(x_1) = \{x_1\}, \Gamma^{-4}(x_1) = \{x_5\},$$
$$T^-(x_1) = x_1 \cup \{x_5\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1\} \cup \{x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

## Матричный метод нахождения путей в графах



**Матрица смежности** полностью определяет структуру графа. Возведем матрицу смежности в квадрат по правилам математики. Каждый элемент матрицы  $A^2$  определяется по формуле:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot a_{k,j}$$

Произведения  $a_{i,k} \cdot a_{k,j}$  будут равны единице только в том случае, когда вершина  $k$  является смежной с обеими вершинами  $i$  и  $j$ , т.е. если существует маршрут длины 2 соединяющий  $i$  через  $k$  с  $j$ . В остальных случаях  $a_{i,k} \cdot a_{k,j} = 0$ . Поэтому  $a_{i,j}^{(2)}$

- есть число маршрутов длины 2, соединяющих вершину  $i$  с вершиной  $j$ .

В **таблице 2,а** представлена **матрица смежности графа**, изображенного выше. Результат возведения матрицы смежности в квадрат  $A^2$  показан в **таблице 2,б**:

Таблица 2 а.							Таблица 2 б.						
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>
A=X <sub>1</sub>	0	1	0	0	0	1	A <sup>2</sup> =X <sub>1</sub>	0	0	0	0	1	1
X <sub>2</sub>	0	0	0	0	1	1	X <sub>2</sub>	0	0	0	1	0	1
X <sub>3</sub>	0	1	0	0	1	1	X <sub>3</sub>	0	0	0	1	1	2
X <sub>4</sub>	0	0	1	0	0	0	X <sub>4</sub>	0	1	0	0	1	1
X <sub>5</sub>	0	0	0	1	0	1	X <sub>5</sub>	0	0	1	0	0	0
X <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	0	X <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	0

Так **"1"**, стоящая на пересечении второй строки и четвертого столбца, говорит о существовании одного пути длиной **2** из вершины **x<sub>2</sub>** к вершине **x<sub>4</sub>**.

Действительно, как видим в графе на , существует такой путь:

**x<sub>2</sub> → x<sub>5</sub> и x<sub>5</sub> → x<sub>4</sub>** последовательность дуг (**a<sub>6</sub>**, **a<sub>5</sub>**).

Умножение: **1 (x<sub>2</sub> x<sub>5</sub> \* x<sub>5</sub> x<sub>4</sub>)**. Путь **x<sub>1</sub> → x<sub>5</sub> (x<sub>1</sub> → x<sub>2</sub>, x<sub>2</sub> → x<sub>5</sub>)**

**"2"** в матрице **A<sup>2</sup>** говорит о существовании двух путей длиной **2** от вершины **x<sub>3</sub>** к вершине **x<sub>6</sub>**: **a<sub>8</sub>**, **a<sub>4</sub>** и **a<sub>10</sub>**, **a<sub>3</sub>**. (**x<sub>3</sub> x<sub>2</sub> \* x<sub>2</sub> x<sub>6</sub>**) и (**x<sub>3</sub> x<sub>5</sub> \* x<sub>5</sub> x<sub>6</sub>**)

Таблица 2 в.							Таблица 2 г.						
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>
X <sub>1</sub>	0	0	0	1	0	1	X <sub>1</sub>	0	0	1	0	0	0
X <sub>2</sub>	0	0	1	0	0	0	X <sub>2</sub>	0	1	0	0	1	1
A <sup>3</sup> =X <sub>3</sub>	0	0	1	1	0	1	A <sup>4</sup> =X <sub>3</sub>	0	1	1	0	1	1
X <sub>4</sub>	0	0	0	1	1	2	X <sub>4</sub>	0	0	1	1	0	1
X <sub>5</sub>	0	1	0	0	1	1	X <sub>5</sub>	0	0	0	1	1	2
X <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	0	X <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	0

Результаты возведения в куб  $A^3$  и в четвертую степень  $A^4$  матрицы смежности показаны в - таблице 2,в и г.

Показывают простые пути из трех и четырех дуг, если 1 стоят не на диагонали. И циклы – если 1 стоят на диагонали.

$a^{(3)}_{ik}$  равно числу путей длиной 3, идущих от  $x_i$  к  $x_k$ . Из четвертой строки матрицы  $A^3$  видно, что пути длиной 3 существуют: один из  $x_4$  в  $x_4$  ( $a_9, a_8, a_5$ ), один из  $x_4$  в  $x_5$  ( $a_9, a_{10}, a_6$ ) и два пути из  $x_4$  в  $x_6$  ( $a_9, a_{10}, a_3$  и  $a_9, a_8, a_4$ ).

Матрица  $A_4$  показывает существование путей длиной 4.

если  $a^p_{ik}$  является элементом матрицы  $A^p$ , то  $a^p_{ik}$  равно числу путей (не обязательно орцепей или простых орцепей) длины  $p$ , идущих от  $x_i$  к  $x_k$ .

## Расстояния на графах

Пусть  $G$  – связный граф и  $u, v$  – его вершины. Длина кратчайшего  $(u,v)$ -маршрута (понятно, что он является простой цепью) называется расстоянием между  $u$  и  $v$  и обозначается  $d(u,v)$ . По определению полагают, что  $d(u,u)=0$  для всякой вершины  $u$ .

Легко видеть, что отображение  $d$  обладает обычными свойствами метрики:

1.  $d(u,v) \geq 0$ , причём  $d(u,v)=0$ , только если  $u=v$ .
2.  $d(u,v) = d(v,u)$ .
3.  $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$  (неравенство треугольника).

**Удалённостью** (или, по-другому, **эксцентриситетом**) вершины  $v$  графа  $G$  называется наибольшее из расстояний от данной вершины до других вершин графа  $G$ :

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u).$$

**Радиусом** графа  $G$  называется наименьшая из удалённостей его вершин:

$$R(G) = \min_{v \in V(G)} e(v) = \min_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} d(v,u).$$

**Диаметром** графа  $G$  называется наибольшая из удалённостей его вершин:

$$D(G) = \max_{v \in V(G)} e(v) = \max_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} d(v, u).$$

Вершина  $v$  графа  $G$ , удалённость которой минимальная (и значит, равна радиусу), называется **центром** графа  $G$ . Точно так же, вершина, удалённость которой максимальная в графе (и значит, равна диаметру), называется **периферийным центром**.

Центр графа не обязательно единственный. Так, например, в полном графе  $K_n$  или простом цикле  $C_n$  удалённости всех вершин равны, и значит, радиус равен диаметру. Поэтому в этих графах все вершины являются одновременно центрами и периферийными центрами.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет собой сеть дорог, т.е. вершины его соответствуют отдельным населённым пунктам, а ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины, пункты обслуживания. В подобных ситуациях критерий оптимальности часто заключается в оптимизации «наихудшего» случая, т.е. в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины.

Реальные задачи (их называют минимаксными задачами размещения) отличаются от этой идеальной тем, что приходится еще учитывать другие обстоятельства – фактические расстояния между отдельными пунктами, стоимость, время проезда и прочее. Для того, чтобы учесть это, используют взвешенные графы.

Можно показать, что для связного графа  $G$  справедливы следующие соотношения:

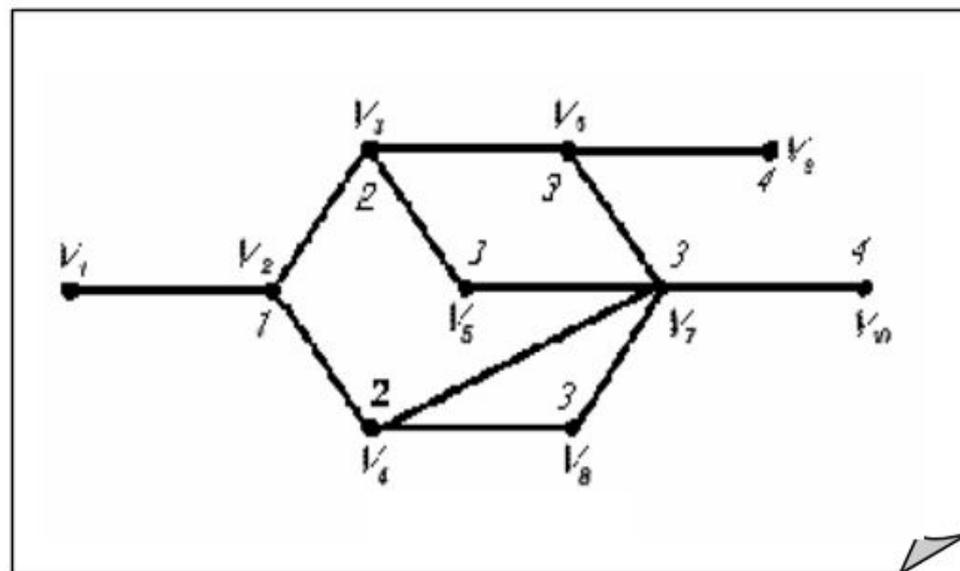
$$R(G) \leq D(G) \leq 2 R(G)$$

## Метод поиска в ширину

Метод поиска в ширину позволяет легко найти расстояние от данной вершины до других вершин графа, и значит, определить удалённость данной вершины. Применяв его для всех вершин графа, получим удалённости всех вершин, зная которые, можно найти радиус, диаметр графа, а так же центры и периферийные центры.

Проиллюстрируем данный метод на следующем примере (см. рис.). Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу.

Предположим, нужно найти расстояние от вершины  $v_1$  до других вершин. Присвоим вершине  $v_1$  метку 0. Всем вершинам, смежным с  $v_1$ , присвоим метку 1. Затем всем вершинам, смежным с вершинами имеющими метку 1 (которые ещё не имеют метки), присвоим метку 2 и т.д., пока все вершины не получат метки.



Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от  $v_1$  до данной вершины, а наибольшая из меток равна удалённости вершины  $v_1$ . Так, в рассматриваемом примере  $e(v_1) = 4$ .

Метод позволяет так же находить кратчайшие цепи между вершинами. Если, например, нужно найти кратчайшую цепь от  $v_1$  до  $v_{10}$ , то после расстановки меток двигаемся в обратном порядке от вершины  $v_{10}$ , переходя каждый раз к вершине с меньшей меткой (такая обязательно найдётся; если их несколько, то выбираем любую):  $v_{10} \rightarrow v_7 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$ .

В результате, получаем кратчайшую  $(v_1, v_{10})$ -цепь:  $(v_1, v_2, v_4, v_7, v_{10})$ .

Подсчёты удалённостей остальных вершин в данном приводят к следующим результатам:

$e(v_2)=3$ ,  $e(v_3)=3$ ,  $e(v_4)=3$ ,  $e(v_5)=3$ ,  $e(v_6)=3$ ,  $e(v_7)=3$ ,  $e(v_8)=3$ ,  $e(v_9)=4$ ,  $e(v_{10})=4$ .

Таким образом, для данного графа  $G$  имеем:  $R(G)=3$ ;  $D(G)=4$ ; вершины  $v_1, v_9, v_{10}$  являются периферийными центрами, а все остальные вершины – центрами.

## Нахождение расстояния между вершинами U и V

1. Разметим вершины:

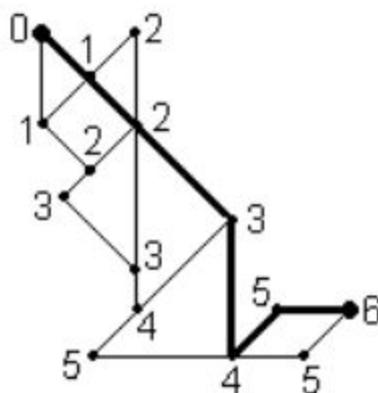
а) вершину U пометим нулем;

б) если на некотором шаге разметки имеются вершины  $U_j$ , помеченные числом  $j$ , то все еще не помеченные вершины, смежные с  $U_j$ , помечаем числом  $j+1$ ;

в) как только вершина V окажется помечена, разметка прекращается.

2. Строим кратчайшую цепь, соединяющую вершины U и V.

**Пример** Найдем расстояние между вершинами



Расстояние равно 6.

## Эйлеровы и гамильтоновы графы

*Путь в графе называется эйлеровым, если он содержит все ребра (по одному разу) графа. Замкнутый эйлеров путь называется эйлеровым циклом. Граф, который имеет эйлеров цикл, также называется эйлеровым.*

**Теорема. (Эйлер).** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.

**Доказательство. Необходимость.**

Эйлеров цикл, проходя через каждую вершину, выходит из нее столько раз сколько входит. Поэтому число ребер цикла, инцидентное каждой вершине является четным. А так как других ребер в графе, кроме принадлежащих эйлерову циклу, не существует, то степени всех вершин четные.

**Достаточность.** Пусть степени всех вершин четные.

Выбрав произвольную вершину  $v_1$ , начнем строить из нее цикл. Выйдем из  $v_1$  по любому ребру к следующей вершине  $v_2$ .

Поскольку степень  $v_2$  четная, то существует другое (не пройденное) ребро, по которому можно перейти к следующей вершине  $v_3$ .

Поскольку и степень  $v_3$  четная, то из  $v_3$  так же можно выйти по еще не пройденному ребру и т. д.

Будем продолжать этот путь до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если вычеркивать пройденные ребра, то степени проходимых вершин уменьшаются на 2 и остаются четными. Поэтому если даже в процессе построения пути мы попадем в вершину, которую уже проходили, найдется не пройденное ребро, по которому можно из этой вершины выйти. Следовательно, данный процесс может закончиться только тогда, когда мы вернемся в исходную вершину  $v_1$ .

Обозначим его через  $C_1$ . Если цикл  $C_1$  содержит все ребра графа, то он является искомым.

В противном случае, удалим из графа все ребра цикла  $C_1$ . В полученном подграфе, как и в исходном, степени всех вершин останутся четными (т. к. либо не изменяется, либо уменьшается на четное число).

Удалим также изолированные вершины и обозначим подграф через  $G_1$ . Существуют общие вершины у  $G_1$  и построенного цикла  $C_1$  (иначе бы исходный граф не был бы связным). Пусть  $w_1$  – одна из таких вершин.

Начав с  $w_1$  точно также, как и раньше, построим цикл  $C_2$  в графе  $G_1$ .

Объединив циклы  $C_1$  и  $C_2$  получим более длинный цикл, чем  $C_1$ . Если он содержит все ребра графа, то цель достигнута. В противном случае, снова удалим новый более длинный цикл из исходного графа. В оставшемся подграфе  $G_2$  построим очередной цикл  $C_3$  и т. д.

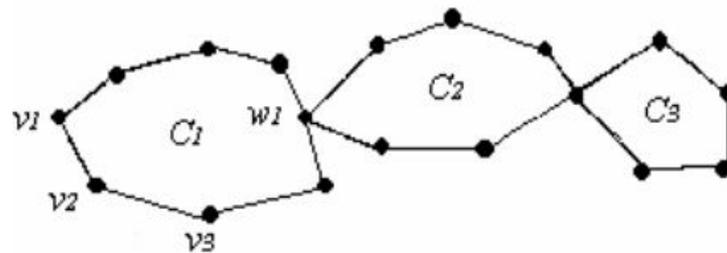
Поскольку число ребер в графе конечно, рано или поздно очередной цикл  $C_n$  будет содержать все ребра  $G_{n-1}$ . Добавляя  $C_n$  к циклу, полученному на предыдущем этапе, получим эйлеров цикл.

**Замечание 1.** Теорема справедлива также для мульти- и псевдографов.

**Замечание 2.** *Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда существует разбиение множества его ребер  $E(G)$  на простые циклы.*

**Ориентированный граф называется эйлеровым, если в нем существует ориентированный эйлеров цикл, т. е. цикл, проходящий по всем дугам с соблюдением ориентации. Легко видеть, что для ориентированных графов, справедлива Теорема:**

***Связный ориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для любой его вершины  $v$  полустепень исхода равна полустепени захода:  $\text{deg}^+v = \text{deg}^-v$ .***



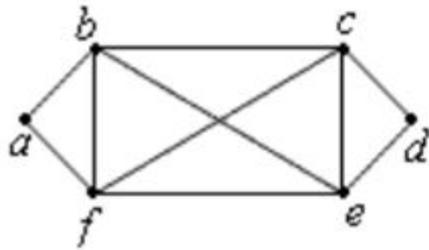
## Эйлеровы графы

Если граф имеет цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется **эйлеровым циклом**, а граф – **эйлеровым графом**.

### **Методика нахождения эйлерова цикла в эйлеровом графе**

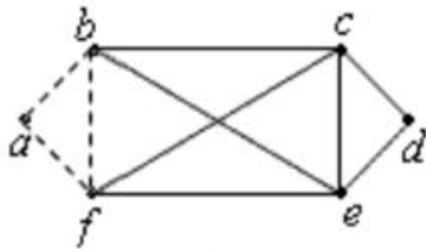
1. Убедимся в том, что граф является эйлеровым (степени всех вершин четны).
2. Начиная с произвольной вершины, строим цепь, удаляя рёбра и запоминая вершины, пока не придём в ту же вершину, с которой начали.
3. Берём следующую вершину и продолжаем процесс, пока не будут удалены все рёбра.
4. Объединяем полученные последовательности в одну.

## Пример

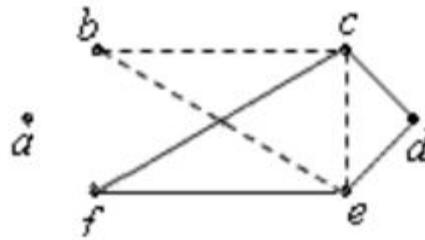


$$d(a)=d(d)=2$$

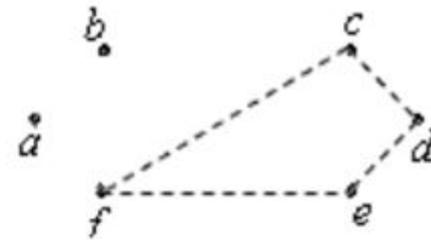
$d(b)=d(c)=d(e)=d(f)=4$  – граф Эйлера



*abfa*



*bceb*



*cdefc*

*ab**ce**bfa*

*ab**cd**ef**ce**bfa*

## Гамильтоновы графы

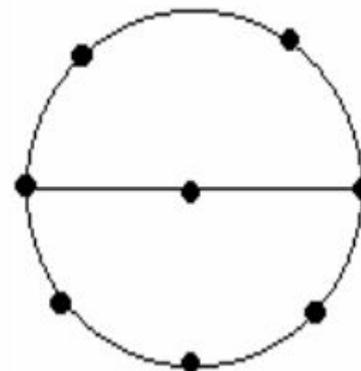
*Путь (цикл) в графе называется гамильтоновым, если он содержит каждую вершину графа, причем ровно один раз. Граф называется гамильтоновым, если он имеет гамильтонов цикл.*

Гамильтоновый граф имеет связность не меньше 2.

Действительно, все его вершины принадлежат гамильтонову циклу, который двусвязен.

Однако, двусвязности недостаточно, чтобы граф был гамильтоновым (см. рис. ). Простого критерия для определения, является ли граф гамильтоновым или нет (как, например, для определения эйлеровости графа) не существует.

Всё же понятно, что чем больше ребер в графе, чем больше степени вершин графа, тем более вероятно ожидать, что граф является гамильтоновым.



В частности, полный граф  $K_n$  при  $n \geq 3$  очевидно является гамильтоновым. В то же время, существуют гамильтоновы графы и с небольшим числом рёбер, например, циклы  $C_n$ ,  $n \geq 3$ .

Известны следующие достаточные (но не необходимые!) условия гамильтоновости.

**Теорема (Дирак).** Если граф  $G$  имеет порядок  $n \geq 3$  и для любой вершины  $v$  графа  $G$  её порядок  $\deg v \geq n/2$ , то  $G$  является гамильтоновым. Обобщением этого утверждения является

**Теорема (Оре).** Если для любой пары несмежных вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  порядка  $n \geq 3$  сумма их степеней  $\deg v + \deg u \geq n$ , то  $G$  гамильтонов.

*Ориентированный граф называется гамильтоновым, если он имеет ориентированный гамильтонов цикл.*

Орграф называется турниром, если в нём любая пара вершин соединена одной дугой (со стрелкой в одну сторону). **Теорема.** Во всяком турнире порядка  $n \geq 3$  существует гамильтонов путь.

## Эйлеровы орграфы

**Эйлеровый контур** в орграфе  $G$  – это, контур, в котором каждая дуга орграфа встречается ровно по одному разу.

Орграф называется **эйлеровым**, если в нём есть эйлеровый контур.

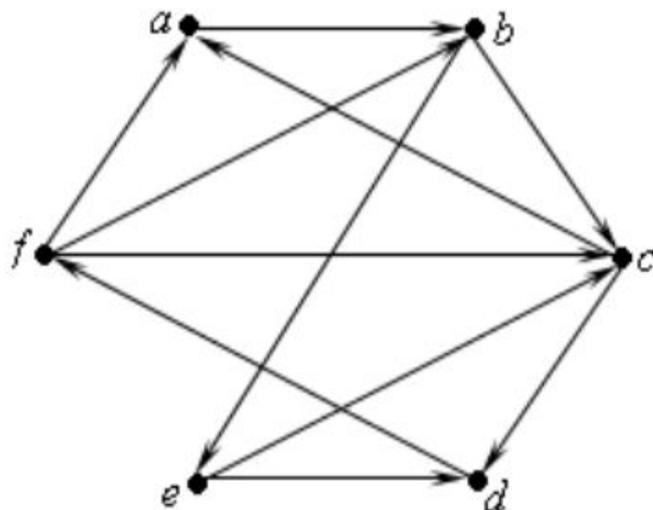
**Теорема.** Связный орграф эйлеров тогда и только тогда, когда у каждой его вершины полустепень исхода равна полустепени захода.

## Гамильтоновы орграфы

Орграф называется **гамильтоновым**, если в нём существует контур, включающий каждую его вершину по одному разу (контур называется гамильтоновым).

# Методика нахождения гамильтонова контура (поиск с возвратами)

## Пример 10.14.



Составим вспомогательную таблицу. В каждом столбце таблицы перечислим вершины, смежные из данной.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	<i>e</i>	<i>d</i>		<i>d</i>	<i>b</i>
					<i>c</i>

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>b</i>	<i>c</i> <i>e</i>	<i>a</i> <i>d</i>	<i>f</i>	<i>c</i> <i>d</i>	<i>a</i> <i>b</i> <i>c</i>

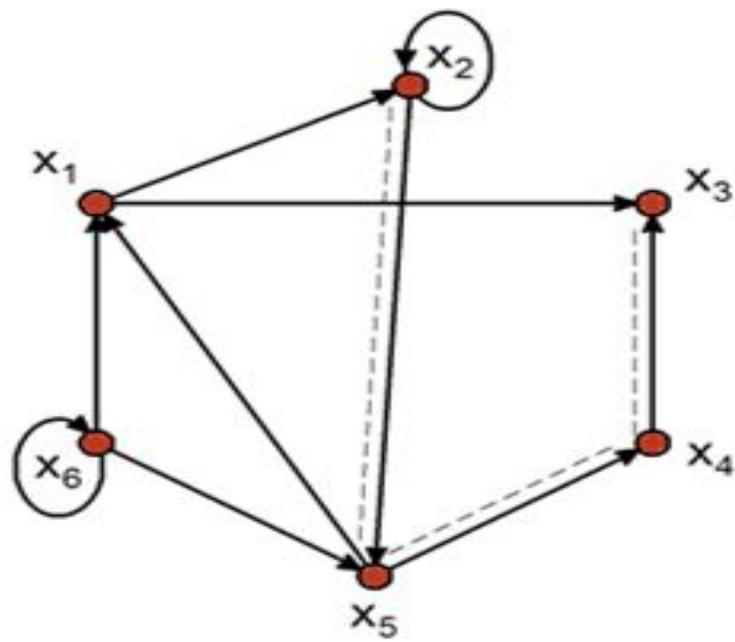
Построим гамильтонов контур.

1. *a*.
2. *ab* (возьмём вершину из столбца *a*).
3. *abc* (возьмём вершину из столбца *b*).
4. *abcd* (возьмём вершину из столбца *c*: *a* взять не можем, поэтому берём *d*).
5. *abcdf* (из столбца *d* берём *f*).
6. *abcd* (из столбца *f* не можем ничего взять, возвращение).
7. *abc* (в столбце *d* нет вершины после *f*, возвращение).
8. *ab* (в столбце *c* нет вершины после *d*, возвращение).
9. *abe* (из столбца *b* берём вершину *e*).
10. *abec* (из столбца *e* берём вершину *c*).
11. *abecd* (из столбца *c* не можем взять *a*, поэтому берём *d*).
12. *abecdf* (из столбца *d* берём *f*).
13. *abecdffa* (в столбце *f* есть вершина *a*).
14. *abecdffa* – гамильтонов контур.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	0	1	1	0	0	0
$x_2$	0	1	0	0	1	0
$x_3$	0	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	1	0	0	0
$x_5$	1	0	0	1	0	0
$x_6$	1	0	0	0	1	1

$T^+(x_2)$	$T^+(x_1)$
2	$x_1$ : 0
0	$x_2$ : 1
3	$x_3$ : 1
2	$x_4$ : 3
1	$x_5$ : 2
	$x_6$ :

a



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
	2	4	1	2	3	3
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$x_1$	0	1	1	0	0	0
$x_2$	0	1	0	0	1	0
$x_3$	0	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	1	0	0	0
$x_5$	1	0	0	1	0	0
$x_6$	1	0	0	0	1	1

	1	3	0	1	2	2
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$T^-(x_3)$	1	3	0	1	2	2
$T^-(x_1)$	0	2			1	1

c

## Нахождение транзитивных замыканий по матрице смежности

Рассмотрим метод нахождения прямого транзитивного замыкания по матрице смежности, показанной на рис. 3.3,а для вершины  $x_2$  графа, изображенного на рис. 3.3,б. На 1-м шаге итерации заносим 0 в столбец  $T^+$  для элемента  $x_2$  и просматриваем 2-ю строку матрицы. Находим, что элементы  $a_{22}=1$  и  $a_{25}=1$ . Заносим 1 в 5-ю клетку  $T^+$ . 2-я клетка уже занята нулем, поэтому 1 не заносим. 2-й шаг начинается просмотром 5-й строки матрицы смежности, соответствующий вершине  $x_5$  графа. Находим, что элементы  $a_{51}=1$  и  $a_{54}=1$ , т. е. из вершины  $x_5$  имеются дуги в вершины  $x_1$  и  $x_4$  или иначе из вершины  $x_2$  имеются пути длиной 2 в вершины  $x_1$  и  $x_4$ . Длину пути 2 заносим в 1-ю и 4-ю клетки столбца  $T^+(x_2)$ . На 3-м шаге анализируются 1-я и 4-я строки матрицы смежности  $A$ . Находим элементы  $a_{12}=1$ ,  $a_{13}=1$ ,  $a_{43}=1$ . В соответствующие свободные клетки заносим значения

Это возможно сделать только для вершины  $x_3$ , так как вторая клетка уже занята. Анализ 3-й строки матрицы на 4-м шаге показывает, что из вершины  $x_3$  нет исходящих дуг, следовательно, процесс формирования прямого транзитивного замыкания завершен.

Таким образом, в столбце  $T^+(x_2)$  стоят числа равные длине пути от вершины  $x_2$  к соответствующим вершинам графа. Путь от  $x_2$  к  $x_3$  равный 3 показан штриховой линией на рис. 3.3,б. В столбце  $T^+(x_2)$  отмечены все вершины, достижимые из вершины  $x_2$ , следовательно, они входят в  $T^+(x_2)$ .

$$T^+(x_2) = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}.$$

Во втором столбце показано построение *прямого транзитивного замыкания* вершины  $x_1 - T^+(x_1)$ .

$$T^+(x_1) = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}.$$

Нахождение *обратного транзитивного замыкания* по матрице смежности показано на рис. 3.1,в. Рассмотрим нахождение *обратного транзитивного замыкания* вершины  $x_3 - T^-(x_3)$ , которое начинается с занесения 0 в 3-ю клетку строки  $T^-(x_3)$ . На 1-м шаге алгоритма, помеченного стрелкой с цифрой 1, просматриваем 3-й столбец матрицы  $A$ . Определяем элементы равные 1, т. е.  $a_{13}=1$  и  $a_{43}=1$ . Следовательно, в графе из вершин  $x_1$  и  $x_4$  есть дуги в вершину  $x_3$ . Заносим 1 в 1-ю и 4-ю клетки  $T^-(x_3)$ . На втором шаге просматриваем 1-й и 4-й столбцы матрицы  $A$ . Находим  $a_{51}=1$ ,  $a_{61}=1$ ,  $a_{54}=1$  и проставляем 2 (так как длина пути от этих вершин до вершины  $x_3$  равна 2) в свободные клетки  $T^-(x_3)$ , т. е. в 5-ю и 6-ю клетки. 3-й шаг заключается в просмотре 5-го и 6-го столбцов матрицы  $A$ . Элементы  $a_{25}=1$ ,  $a_{65}=1$ ,  $a_{66}=1$  позволяют поставить 3 во 2-ю клетку строки  $T^-(x_3)$ . 4-й шаг просмотра 2-го столбца дает элементы  $a_{12} = 1$  и  $a_{22} = 1$ , уже вошедшие в  $T^-(x_3)$ . Итак, сформировано обратное транзитивное замыкание для вершины  $x_3$ .

$$T^-(x_3) = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}.$$

Числа, стоящие в клетках  $T^-(x_3)$ , показывают длину кратчайшего пути от соответствующих вершин до вершины  $x_3$ .

Во второй строке показано формирование обратного транзитивного замыкания вершины  $x_1$ .

$$T^-(x_1) = \{ x_1, x_2, x_5, x_6 \}.$$