

Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Динамика- основной раздел механики, в её основе лежат 3 закона Ньютона (1687 г.), рассматриваемые как система взаимосвязанных законов.

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямо-линейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

ИНЕРТНОСТЬ, МАССА, СИЛА

- Инертность- стремление тела сохранить своё состояние покоя или равномерного прямо- линейного движения (1 закон Ньютона назы-вают закон инерции).
- Инерциальная система отсчёта – система, ко-торая либо покоится, либо движется прямо-линейно и равномерно относительно какой- либо другой инерциальной системы отсчёта. 1 закон Ньютона выполняется не в каждой, а только в инерциальных системах отсчёта.

- Масса- физическая величина, являющаяся одной из характеристик материи, определяющая её инерционные и гравитационные свойства.
- Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел и полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры. В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Единица измерения силы Ньютон (Н):

Второй закон Ньютона (основной закон динамики поступательного движения)

Ускорение приобретаемое
материальной точкой (телом)
пропорционально вызыва-ющей его
силе, совпадает с ней по направ-лению
и обратно пропорционально массе
материальной точки (тела).

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} m v$$

Импульс

Импульс (количество движения)-векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на её скорость и имеющая направление скорости.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Общая формулировка второго закона Ньютона:

Скорость изменения импульса равна действующей на него силе

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.
- Первый закон Ньютона можно вывести из второго закона Ньютона ($\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$) .

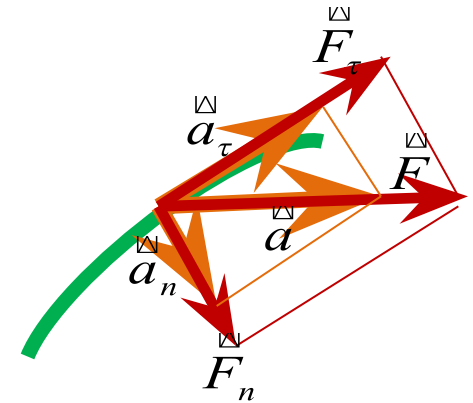
Однако, первый закон Ньютона - **самостоятельный** закон, а не следствие второго закона Ньютона, т. к. именно он подтверждает существование инерциальных систем отсчёта, только в которых возможно равенство

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Принцип независимости действия

СИЛ

- Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно 2 закону Ньютона, как будто других сил не было.
- Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, по принципу независимости, под силой действующей на тело понимают резльтирующую силу.



- Силы и ускорения можно разлагать на составляющие. Например сила может быть разложена на нормальную и тангенциальную

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

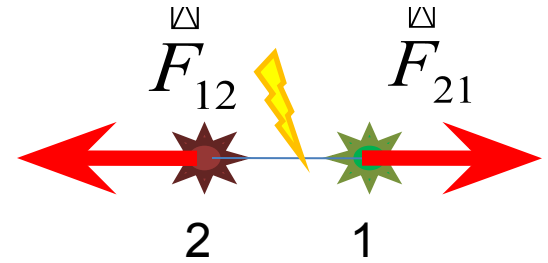
$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$$

Третий закон Ньютона

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия, силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой соединяющей эти точки.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- \vec{F}_{12} — сила действующая на первую материальную точку со стороны второй, а \vec{F}_{21} на вторую точку со стороны первой.
- Силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами, и являются силами одной природы.
- Во 2 законе Ньютона речь идёт об ускорении приобретаемом телом под действием приложенных к нему сил. Ускорение равно 0, если нулю равна равнодействующая всех сил приложенных к **ОДНОМУ** телу. 3 закон Ньютона говорит о равенстве сил приложенных к **РАЗНЫМ** телам. На каждое тело действует **ОДНА** сила.
- 3 закон Ньютона позволяет перейти от динамики одной материальной точки к динамике системы мат.



Законы Кеплера.

Закон всемирного тяготения.

Сила тяжести. Вес.

Законы движения планет

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших осей их полуорбит.

Законы выведены Кеплером, на основе записей Т. Браге. Впоследствии Ньютон на основе своих законов Кеплера и

Закон всемирного тяготения

Между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения прямо пропорциональная произведению масс и этих точек, и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

(сила всемирного тяготения)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6,6720 \times 10^{-11} \frac{Н \cdot \tilde{m}^2}{\tilde{m}^2}$$

Смысл гравитационной постоянной G:

Два тела массами $m_1 = m_2 = 1$ кг на расстоянии $r = 1$ м притягиваются друг к другу с силой $F = 6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н.

Сила тяжести

На любое тело массой m , вблизи Земли действует сила тяготения F .

Силой тяжести материальной точки называют силу P , равную векторной разности между силой F тяготения этой материальной точки к Земле и центробежной силой F_c , обуславливающей участие материальной точки в суточном вращении Земли. Под действием только силы тяжести тело будет двигаться с **ускорением свободного падения** $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$. Таким образом, на всякое тело m действует **сила тяжести**

$$D = mg$$

Обобщенный закон Галилея

Все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением.

(ускорение незначительно варьируется от радиуса Земли)

Вес тела

- Вес тела – сила, с которой это тело действует вследствие тяготения к Земле на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.
- Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением отличным от g т.е. когда на тело действуют и другие силы.
- Если тело движется **только** под действием силы тяжести, то оно находится в состоянии

Сила тяжести действует **ВСЕГДА**, вес появляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют и **ДРУГИЕ** силы

Тело движется с ускорением a отличным от g .
 Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $a \neq g$

то к телу приложена дополнительная сила удовлетворяющая условию $N = mg - ma = m(g - a)$

Тогда вес тела

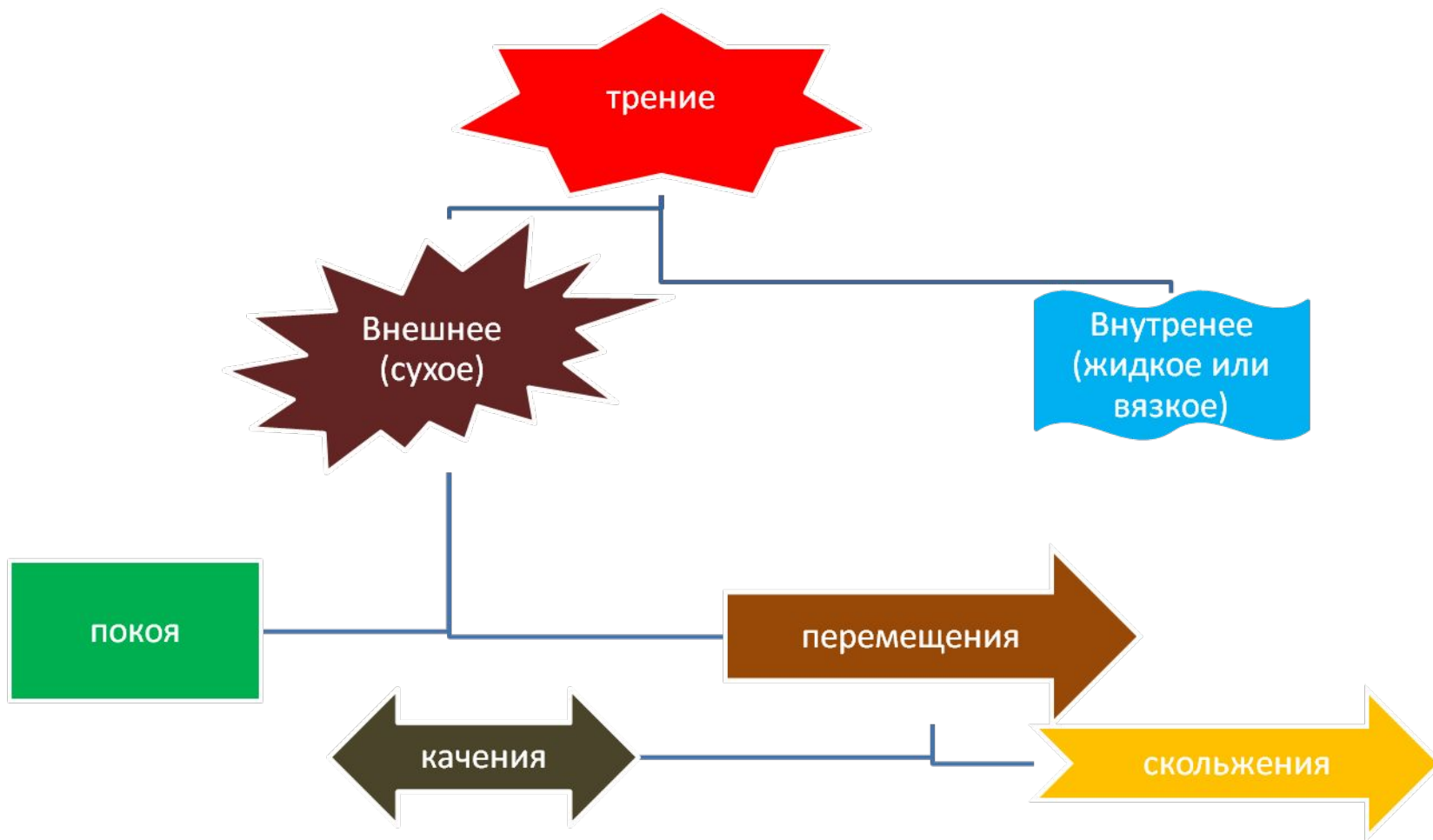
Если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно $a = 0$ и $a = 0$.

Если тело свободно движется в любом направлении по любой траектории то $a = g$ и $N = 0$
 т.е. тело будет невесомым.

Сила трения

- Сила трения препятствуют скольжению соприкасающихся тел относительно друг друга.
- Силы трения зависят от относительных скоростей тел.
- Силы трения могут быть различной природы. Но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Виды трения

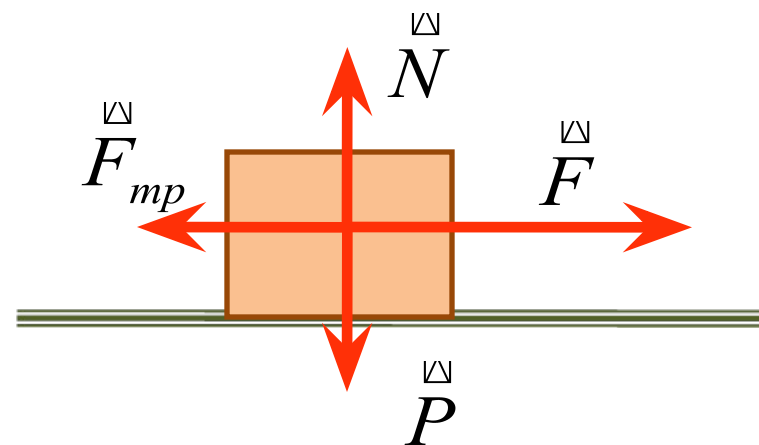


- Трение внешнее (сухое)-возникает в области касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны- трение покоя. Если происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения- трение скольжения, качения .
- Трение внутреннее- трение между частями одного и того же тела, например между слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В данном случае отсутствует трение покоя.
- Если тела скользят относительно друг друга и разделены прослойкой вязкой жидкости – граничное трение (толщина смазки $h = 1$ мкм) или гидродинамическое трение (толстый слой смазки).

Внешнее трение

Сила трения скольжения пропорционально силе нормального давления, с которым одно тело действует на другое.

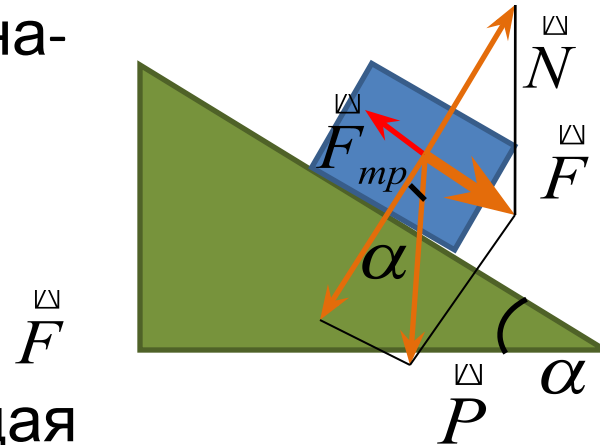
$$\vec{F}_{mp} = fN$$



- Внешнее трение вызвано шероховатостью соприкасающихся поверхностей, а в случае гладких поверхностей обусловлено силами межмолекулярного притяжения
- f -коэффициент поверхностного трения, зависящий от свойств поверхности
- N - сила реакции опоры

Сила трения скольжения

Если тело находится на наклонной поверхности с углом наклона α , то оно приходит в движение, только когда тангенциальная составляющая силы тяжести P больше силы трения F_{mp} .



Для предельного случая (начала скольжения) должно выполняться условие $F = F_{mp} \Rightarrow P \sin \alpha = fP \cos \alpha$

Из этого следует: $f = \operatorname{tg} \alpha$

Коэффициент трения равен тангенсу угла α , при котором начинается скольжение по наклону.

- Для трения скольжения на гладких поверхностях определённую роль играет межмолекулярное притяжение.

Закон трения скольжения (предложен Б. В. Дерябиным)

$$F_{тр} = f_{ист} (N + SP_0)$$

где:

$f_{ист}$ - истинный коэффициент трения скольжения

S_{Δ} - площадь контакта между телами

P_0 - добавочное давление обусловленное силами межмолекулярного притяжения

- Сила трения качения (по закону Кулона)

$$F_{тр} = f_k \frac{N}{r}$$

где:

f_k - коэффициент трения качения

r - радиус катящегося тела

Закон сохранения импульса

- Механическая система-совокупность матери-альных точек (тел) рассматриваемых как единое целое.
- Внутренние силы- силы взаимодействия меж-ду материальными точками механической системы.
- Внешние силы- силы, с которыми на матери-альные точки системы действуют внешние тела.
- Замкнутая система- система, на которую не действуют внешние силы, или геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

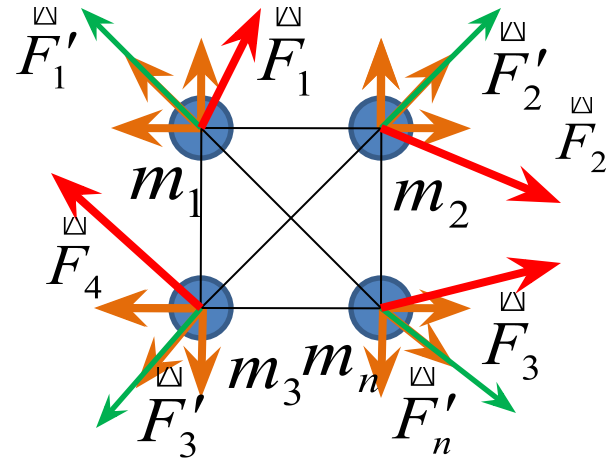
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}_1 \\ \frac{d}{dt} m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{F}'_2 + \mathbf{F}_2 \\ \dots \\ \frac{d}{dt} m_n \mathbf{v}_n = \mathbf{F}'_n + \mathbf{F}_n \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

По 3 закону Ньютона

$$\mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_1^n \mathbf{F}_i$$



Система состоит из \$n\$ тел у которых

соответственно: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$

- Массы: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$
- Скорости:
- Равнодействующие внутренних сил $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots, \mathbf{F}'_n$
- Равнодействующие внешних сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$

Так как по 3 закону Ньютона геометрическая сумма
внут-ренних сил равна нулю $F_1' + F_2' + \dots + F_n' = 0$ то:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_1^n F_i = \frac{dp}{dt}$$

где: $p = \sum_1^n m_i v_i$ -импульс системы.

Производная по времени импульса механической
систе-мы равна геометрической сумме внешних сил
действую-щих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (система замкнутая)

$$\frac{dp}{dt} = \sum_1^n m_i a_i = \sum_i^n F_i = 0$$

Закон сохранения импульса

Импульс замкнутой системы не
изменяется с течением времени.

$$\vec{p} = \sum_1^n m_i \vec{v}_i = const$$

Данный закон справедлив не только для
классической механики, он носит
универсальный характер, то есть он:
УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПРИРОДЫ.

Центр масс

- В механике Галилея-Ньютона импульс системы из-за независимости массы от скорости может быть выражен через скорость её центра масс.
- Центром масс (центром инерции)- для системы материальных точек называется воображаемая точка C положение которой характеризует распределение массы всей системы.

- Радиус-вектор центра масс: $\vec{r}_c = \frac{\sum_1^n m_i \vec{r}_i}{m}$

Где:

$m_i \vec{r}_i$ - масса и радиус вектор i -ой материальной точки

m - число материальных точек в системе

- масса всей системы

- Скорость центра масс $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_1^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{v}_i}{m}$

$$\vec{p} = \sum_1^n \vec{p}_i = \sum_1^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$$

- Импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс.

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

Закон движения центра масс

Центр масс системы двигается как материаль-ная точка, в которой сосредоточена вся мас- са системы, и на которую действует сила равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

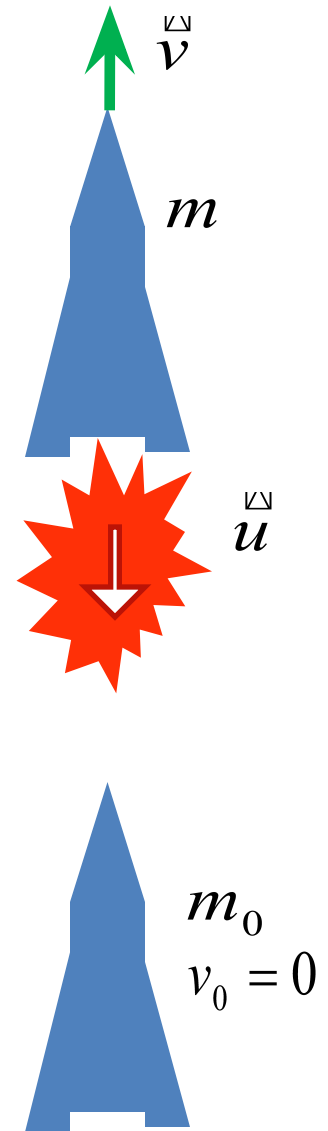
$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

Центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остаётся неподвижным.

Движение тел переменной

массы

- В начальный момент времени $t=0$, масса m_0 , начальная скорость $v_0=0$
- В момент времени t : масса m , скорость v , скорость истечения га-зов относительно ракеты u
- В момент времени $t + dt$, масса ра-кет $m - dm$, масса сгоревшего то-плива dm , скорость ракеты $v + dv$



Изменение импульса системы за время dt :

$$d\vec{p} = ((m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u})) - m\vec{v} \approx m d\vec{v} + \vec{u} dm$$

Если на тело действуют внешние силы то :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{F} dt = m d\vec{v} + \vec{u} dm$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

где : $\vec{u} \frac{dm}{dt} = F_p$ - реактивная сила

Если \vec{u} противоположно по направлению с \vec{v} то ракета разгоняется, если совпадает то тормозится.

Уравнение движения тела переменной массы

$$m\overset{\Delta}{a} = \overset{\Delta}{F} + \overset{\Delta}{F}_p$$

(Уравнение Мещерского)

Если на движущуюся ракету не действуют внешние силы ($F=0$) и скорость выбрасываемых газов постоянна то:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \Rightarrow v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C$$

Значение постоянной интегрирования C определим из начальных условий. Если $v_0 = 0$ и $m = m_0$ и

то
$$C = u \ln m_0$$

Следовательно:

Формула Циолковского

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Формула Циолковского показывает:

- Чем больше конечная масса ракеты (m), тем больше должна быть стартовая масса ракеты (m_0).
- Чем больше скорость истечения газов (u), тем больше может быть конечная масса (m) при данной стартовой массе (m_0) ракеты.