РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРАВИЛУ КРАМЕРА, МЕТОДОМ ГАУССА

Тема 1.2. Практика 5-6

(4 часа аудиторной работы)

Основные обозначения:

- система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- матричная запись СЛАУ: $A \cdot X = B$,

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — основная матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — столбец неизвестных системы, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — столбец свободных членов

Матрица системы – *это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных.*

Расширенная матрица системы – *это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае.*

- расширенная матрица системы: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right);$

- однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0\,; \end{cases}$$

Методы решения СЛАУ:

- правило Крамера;
- матричный метод; (рассматриваться в данной работе не будет)
- метод Гаусса

Правило Крамера

- Решает системы n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы называется ***главным определителем системы***, обозначается Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера

<u>*Вспомогательный*</u> определитель Δi получается из определителя Δ путем замены соответствующего *i*-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (*правило Крамера*)

- Если главный определитель Δ системы размерности $n \times n$ отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \dots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

Рассмотрим систему **_n_** линейных уравнений с **_n_** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Теорема Крамера:

Пусть Δ - **определитель матрицы системы**,

Δ_i - **определитель** матрицы, **получаемой** из матрицы A **заменой столбца коэффициентов** a_{ij} **при** x_j **столбцом свободных членов**.

Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$$

- **формула Крамера**.

Вспомним тему: Определители

Определитель квадратной матрицы – это число, вычисляемое по определённым правилам.

Обозначают: $|A|$, ΔA, $\det A$.

Определитель **2-го порядка**:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Боковая диагональ

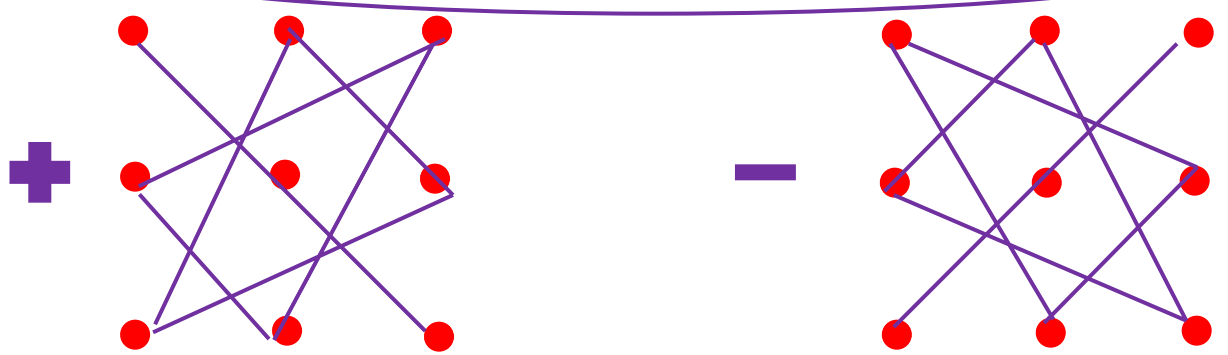
Главная диагональ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

Определитель 3-го порядка:

Правило Саррюса (правило треугольников)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{1\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1}_{+} \underbrace{-1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-1)}_{-} = 5$$

<u>*Вспомним тему:*</u> Алгебраические дополнения и миноры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

В квадратной матрице ***n***-го порядка рассмотрим элемент ***aij***.

Вычеркнем ***i***-ю строку и ***j***-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент ***aij***. В результате получается матрица (***n-1***)-го порядка.

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (*n-1*)-го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма ***i+j*** четная, и со знаком «-», если сумма нечетная:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Рассмотрим сам алгоритм метода Крамера на конкретном примере

Дано СЛАУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Найти неизвестные $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Алгоритм решения заключается в том, что составляется из системы матрица

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Далее вычисляется основной определитель матрицы $\Delta = |A|$ и дополнительные Δ_i, получающиеся из основного определителя путем поочередного замещения столбцов на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Если получается $\Delta=0$, тогда система не может быть решена методом Крамера!

Информация

Если получается $\Delta = 0$, тогда система не может быть решена методом Крамера!

В итоге по формуле метода Крамера находим неизвестные в системе линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Пример 1

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение

Составляем матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и выписываем столбец свободных членов $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Вычисляем главный определитель матрицы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 2 + 8 + 1 + 9 = 28$$

Замечаем, что $\Delta = 28 \neq 0$, то систему можно решить методом Крамера.

Вычисляем первый дополнительный определитель Δ_1. Подставляем столбец свободных членов $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ на место первого столбца в основной матрице:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 2 + 8 - 1 + 12 = 35$$

Аналогично вычислим Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 24 + 4 + 4 - 18 + 4 = 21$$

Точно также находим Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 4 + 16 - 3 - 2 = -7$$

По формуле Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{28} = -\frac{1}{4}$$

Ответ

$$x_1 = \frac{5}{4}; x_2 = \frac{3}{4}; x_3 = -\frac{1}{4}$$

Пример 2

Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ x - 4y + z = 3 \end{cases}$$

Решение

Попробуем решить методом Крамера. Найдем основной определитель системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 1 + 16 - 6 - 4 - 2 = 0$$

Внимание! Получили $\Delta = 0$, а это означает, что данную систему нельзя решить методом Крамера. Алгоритм завершает свою работу. Советуем воспользоваться другим методом для решения, например, матричным методом или Гаусса.

Ответ: метод Крамера нельзя применить к данной системе линейных уравнений

Пример. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. 1)Определитель матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

2) Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

3) Подставим полученные значения в формулу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = \text{[redacted]} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \text{[redacted]} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \text{[redacted]}$$

Метод Гаусса решения СЛАУ

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

Имя Гаусса известно почти во всех областях математики, а также в геодезии, астрономии, механике. За глубину и оригинальность мысли, за требовательность к себе и гениальность ученый и получил звание «король математиков».

Метод решения системных уравнений, открытый ученым, был назван методом Гаусса. Метод состоит в последовательном исключении переменных до приведения уравнения к ступенчатому виду. Решение методом Гаусса считается классическим и активно используется и сейчас.

Память о Гауссе навсегда осталась в математических и физических терминах (метод Гаусса, дискриминанты Гаусса, прямая Гаусса, Гаусс – единица измерения магнитной индукции и др.). Имя Гаусса носит лунный кратер, вулкан в Антарктиде и малая планета.

Метод Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Суть метода Гаусса

Чтобы решить систему m – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме.

Элементарные преобразования расширенной матрицы системы :

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.

Рассмотри пример решения СЛАУ методом Гаусса

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

1. Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы, состоящей из коэффициентов и столбца свободных членов. Вертикальная черта используется для удобства оформления.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований матрицы (вычитание одной строки из другой, умноженной на коэффициент, удаление одинаковых и нулевых строк, деление строки на число отличное от нуля) получаем нули под главной диагональю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

3 Используя элементарные преобразования, изложенные в пункте 2, приводим матрицу к виду содержащему нули везде, кроме главной диагонали

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Пример 1

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}.$$

Решение

Запишем расширенную матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3 и отдельно столбец свободных членов b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -7 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Приведем матрицу к нижнетреугольному виду (под главной диагональю должны быть нули) с помощью элементарных преобразований.

Прибавим ко второй строке первую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & -7 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Далее прибавляем к третьей строке первую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь осталось к третьей строке прибавить вторую строку, чтобы под главной диагональю были только нули.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Замечаем, что в третьей строке стоят числа, которые можно сократить на четыре. Для этого выполняем деление всей третьей строки на 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Теперь выполняем обратный ход Гаусса снизу вверх. Прибавляем ко второй строке третью строку.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Сразу замечаем, что вторую строку можно сократить на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Продолжаем обратный ход, вычитаем третью строку из первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Осталось из первой строки вычесть вторую строку, умноженную на 2, для того, чтобы в первой строке появился ноль.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Несовместность системы (нет решений)

Если в результате элементарных преобразований появилась нулевая строка вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & b \end{pmatrix} \text{ где } b \neq 0,$$

то система уравнений не имеет решений. На этом алгоритм Гаусса заканчивает свою работу и можно записывать ответ, что система несовместна, то есть нет решений.

Пример 2

Найти решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решение

Как обычно пишем расширенную матрицу по коэффициентам при неизвестных переменных и столбцу свободных членов

Решение

Как обычно пишем расширенную матрицу по коэффициентам при неизвестных переменных и столбцу свободных членов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Запускаем алгоритм Гаусса. Идём сверху вниз. Умножаем вторую строку на 7 и вычитаем из неё первую строчку умноженную на 6. Затем первую строку вичитаем из третьей, умноженной на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & -29 & 9 \\ 0 & 16 & 29 & 33 \end{array}\right)$$

Далее по алгоритму прибавляем вторую строку к третьей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & -29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array}\right)$$

Видим, что в результате элементарных преобразований появилась строка в которой все нули, кроме свободного члена. Это означает, что система несовместа, то есть у системы уравнений нет решения.

Ответ

Нет решений, так как система несовместна.

Не забудь прикрепить фото выполненной работы в СДО Moodle

Спасибо за внимание!!! =)