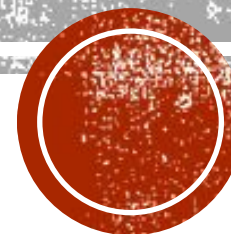


ДЕРЕВЬЯ

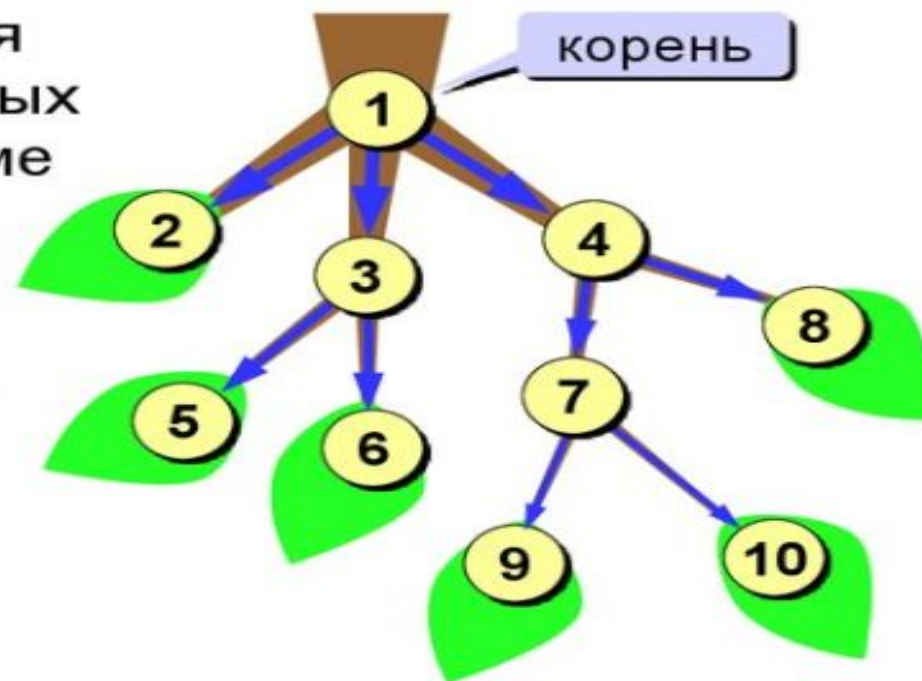


Деревья

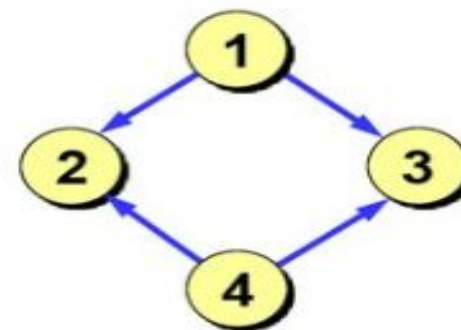
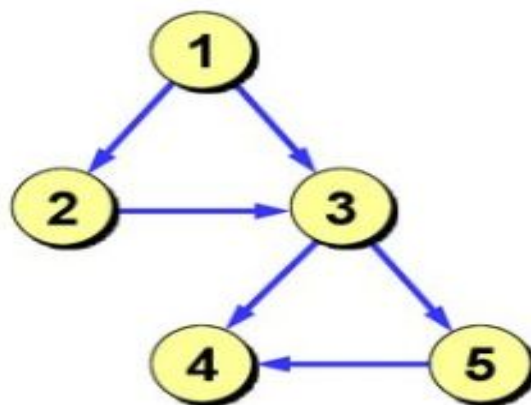
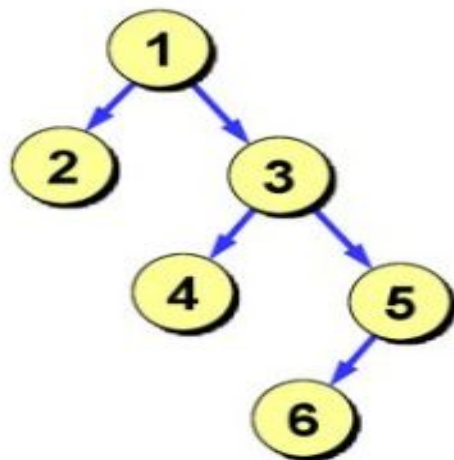
Дерево – это структура данных, состоящая из узлов и соединяющих их направленных ребер (дуг), причем в каждый узел (кроме корневого) ведет ровно одна дуга.

Корень – это начальный узел дерева.

Лист – это узел, из которого не выходит ни одной дуги.



Какие структуры – не деревья?



С помощью деревьев отображают отношения подчиненности

Предок узла x – это узел, из которого существует путь по стрелкам в узел x .

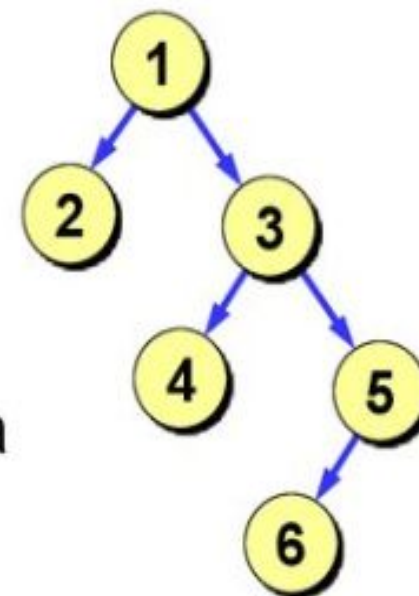
Потомок узла x – это узел, в который существует путь по стрелкам из узла x .

Родитель узла x – это узел, из которого существует дуга непосредственно в узел x .

Сын узла x – это узел, в который существует дуга непосредственно из узла x .

Брат узла x (*sibling*) – это узел, у которого тот же родитель, что и у узла x .

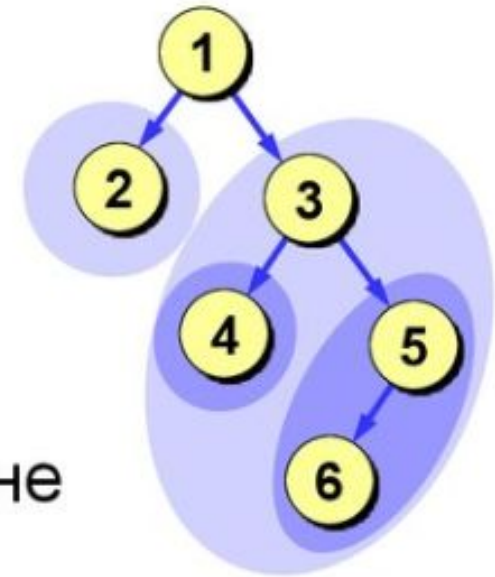
Высота дерева – это наибольшее расстояние от корня до листа (количество дуг).



Дерево – рекурсивная структура данных

Рекурсивное определение:

1. Пустая структура – это дерево.
2. Дерево – это корень и несколько связанных с ним деревьев.



Двоичное (бинарное) дерево – это дерево, в котором каждый узел имеет не более двух сыновей.

1. Пустая структура – это двоичное дерево.
2. Двоичное дерево – это корень и два связанных с ним двоичных дерева (левое и правое поддеревья).



Уровни дерева

Корень дерева имеет *нулевой уровень*.

Уровень потомков увеличивается на 1.

Глубина (высота) дерева равна максимальному уровню потомка плюс 1.

Если элемент не имеет потомков, он называется *листом* или *терминальным узлом* дерева.

Число потомков внутреннего узла называется его *степенью*.

Максимальная степень всех узлов есть *степень дерева*.

Число ветвей, которое нужно пройти от корня к узлу x , называется *длиной пути* к x .

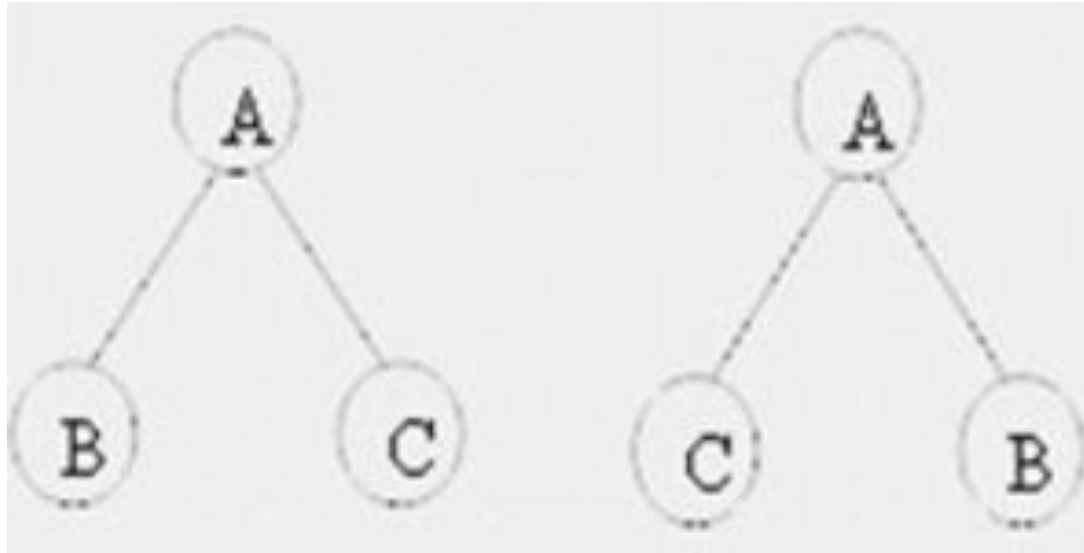
Корень имеет длину пути равную 0; узел на уровне i имеет длину пути равную i .



Порядок деревьев

Если в определении дерева имеет значение порядок поддеревьев **дерево1**, **дерево2**, ..., **деревоN**, то дерево является упорядоченным.

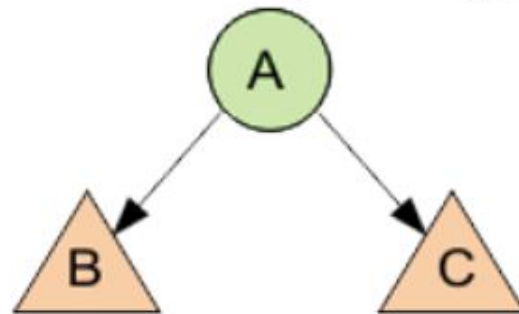
Потомки узла упорядочиваются слева направо.



Обходы дерева

Три наиболее часто используемых обхода деревьев:

Пусть имеем дерево, где А — корень, В и С — левое и правое поддеревья.



Существует три способа обхода дерева:

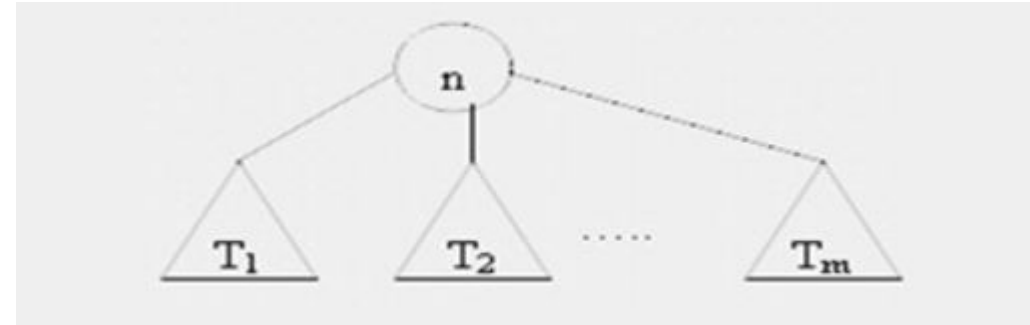
- ❑ Обход дерева сверху вниз (в прямом порядке): А, В, С — префиксная форма.
- ❑ Обход дерева в симметричном порядке (слева направо): В, А, С — инфиксная форма.
- ❑ Обход дерева в обратном порядке (снизу вверх): В, С, А — постфиксная форма.

Общей принцип обхода: если дерево является нулевым деревом, то список обхода записывается пустая строка, если дерево состоит из одного узла, то список обхода записывается этот узел.



Общий принцип обхода деревьев

Дерево T имеет корень n и m поддеревьев: $T_1, T_2, \dots, T_m$.



Способы обхода

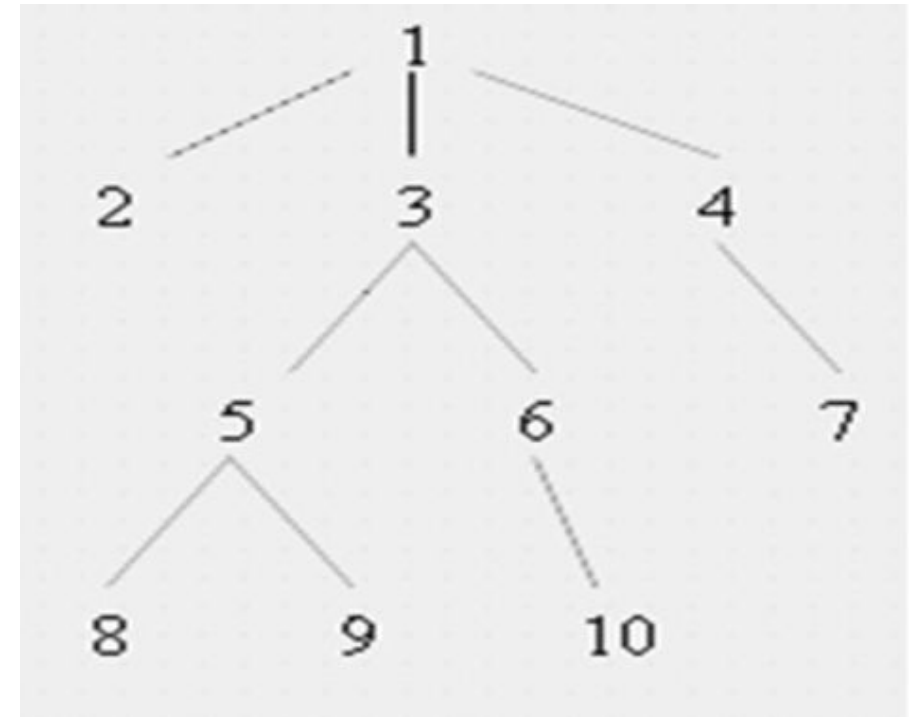
- Прямой. Сначала посещается корень n , затем в прямом порядке узлы поддерева T_1 , затем узлы поддерева T_2 и т.д. и последним посещают в прямом порядке узлы поддерева T_m .
- Обратный обход. Сначала посещаются в обратном порядке все узлы поддерева T_1 , затем в обратном порядке узлы поддеревьев $T_2 \dots T_m$ и последним рассматривают корень n .
- Симметричный обход. Сначала в симметричном порядке посещают все узлы поддерева T_1 ? Затем корень n , после в симметричном порядке все узлы поддеревьев $T_2 \dots T_m$.



Обход дерева с множеством ветвей

Результаты обходов:

- Прямой 1 2 3 5 8 9 6 10 4 7
- Обратный 2 8 9 5 10 6 3 7 4 1
- Симметричный 2 1 8 5 9 3 10 6 7 4



Помеченные деревья и деревья выражений

Дерево, у которого сопоставлены метки, называют **помеченным деревом**.

Метка узла – это значение, которое «хранится» в узле.

Дерево – это список;

Узел – это позиция;

Метка – это элемент.

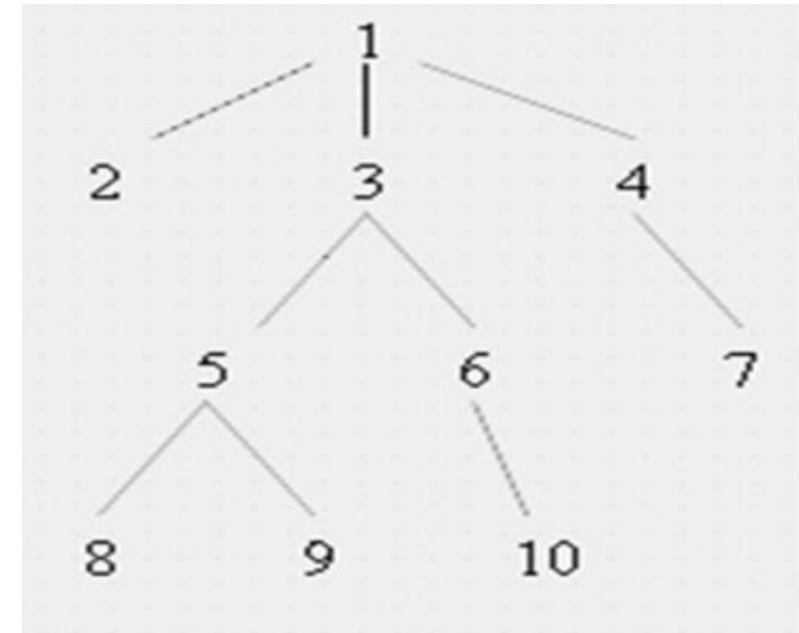
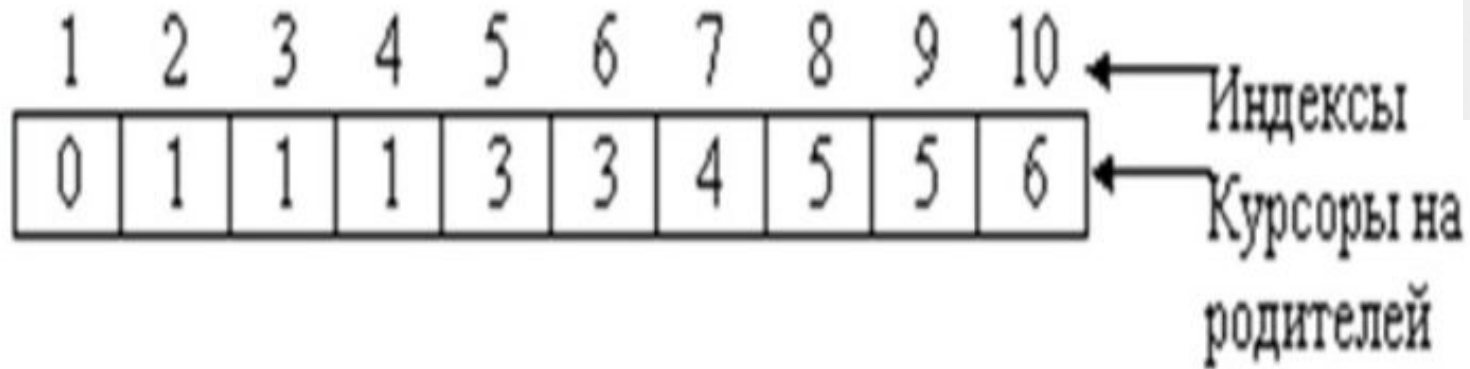


Реализация дерева при помощи массива

Массив где каждый элемент $A[i]$ содержит, номер родительского узла j .

$A[i]=j$

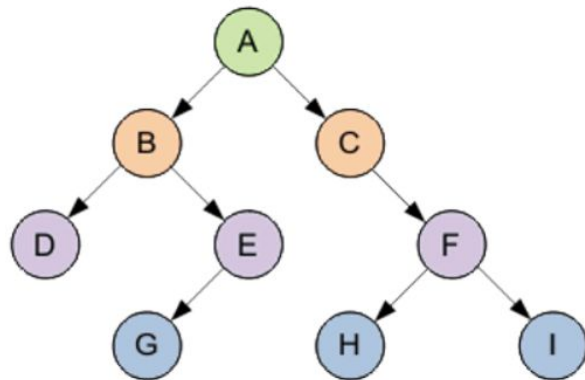
Корень дерева $A[i]=0$



Двоичные(бинарные) деревья

Бинарное дерево — это конечное множество элементов, которое либо пусто, либо содержит элемент (**корень**), связанный с двумя различными бинарными деревьями, называемыми **левым и правым поддеревьями**. Каждый элемент бинарного дерева называется **узлом**. Связи между узлами дерева называются его **ветвями**.

Бинарное дерево

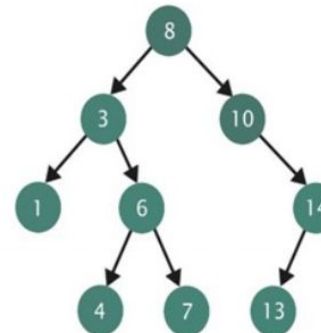


- A — корень дерева
- B — корень левого поддерева
- C — корень правого поддерева

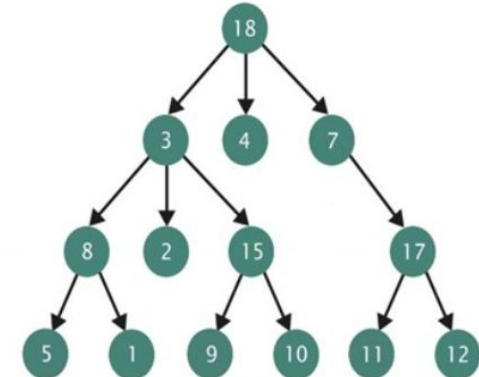
Корень дерева расположен на уровне с минимальным значением.

Виды деревьев

упорядоченное
(двоичное) дерево



неупорядоченное
дерево



Представление двоичных деревьев

Двоичное дерево можно представить динамической структурой, где каждый узел представляет собой ссылку на правое и левое поддереву.

```
1 struct tnode {  
2     int field;           // поле данных  
3     struct tnode *left; // левый потомок  
4     struct tnode *right; // правый потомок  
5 };
```



Действия с двоичными деревьями

- Обход дерева
- Поиск по дереву
- Включение узла в дерево
- Удаление узла дерева.



Обход двоичных деревьев в прямом, симметричном и обратном порядке

При этом обход дерева в префиксной форме будет иметь вид

```
1 void treeprint(tnode *tree) {  
2     if (tree!=NULL) { //Пока не встретится пустой узел  
3         cout << tree->field; //Отображаем корень дерева  
4         treeprint(tree->left); //Рекурсивная функция для левого поддерев  
5         treeprint(tree->right); //Рекурсивная функция для правого поддерев  
6     }  
7 }
```

Обход дерева в инфиксной форме будет иметь вид

```
1 void treeprint(tnode *tree) {  
2     if (tree!=NULL) { //Пока не встретится пустой узел  
3         treeprint(tree->left); //Рекурсивная функция для левого поддерев  
4         cout << tree->field; //Отображаем корень дерева  
5         treeprint(tree->right); //Рекурсивная функция для правого поддерев  
6     }  
7 }
```

Обход дерева в постфиксной форме будет иметь вид

```
1 void treeprint(tnode *tree) {  
2     if (tree!=NULL) { //Пока не встретится пустой узел  
3         treeprint(tree->left); //Рекурсивная функция для левого поддерев  
4         treeprint(tree->right); //Рекурсивная функция для правого поддерев  
5         cout << tree->field; //Отображаем корень дерева  
6     }  
7 }
```

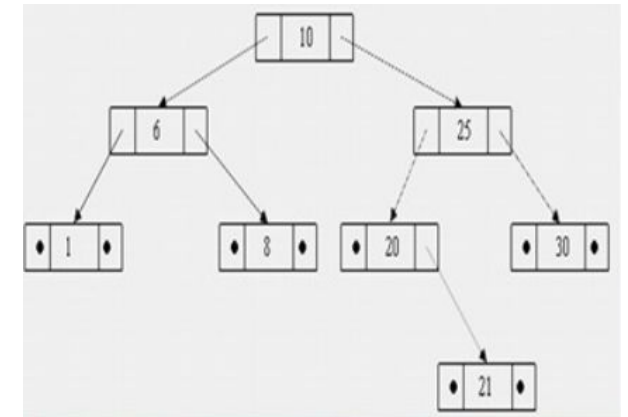
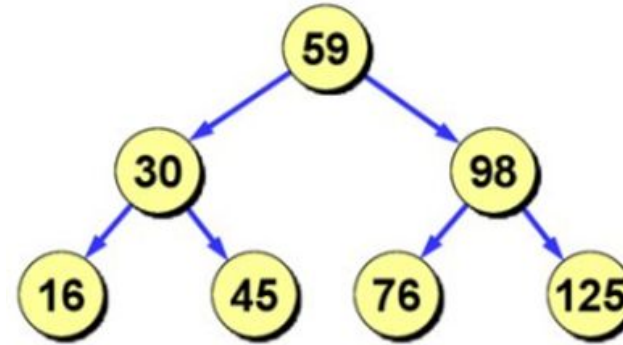


Организация дерева динамической структурой

Все значения узлов(ключи) левого поддерева меньше ключа этого узла, а все ключи правого поддерева больше. Такое дерево является упорядоченным двоичным деревом или деревом поиска.

Алгоритм поиска по упорядоченному

- Если дерево не пусто, то сравниваем искомый ключ с ключом в корне дерева:
 - если ключ совпадает, то поиск завершен;
 - если ключ в корне больше искомого, выполнить поиск в левом поддереве;
 - если ключ в корне меньше искомого, выполнить поиск в правом поддереве.
- Если дерево пусто, то искомый элемент не найден.



Ключ - это характеристика узла по которой выполняется поиск(чаще всего это одно из полей структуры).



Реализация поиска при помощи двоичных деревьев

Бинарное (двоичное) дерево поиска – это бинарное дерево, для которого выполняются следующие дополнительные условия (свойства дерева поиска):

- оба поддерева – левое и правое, являются двоичными деревьями поиска;
- у всех узлов левого поддерева произвольного узла X значения ключей данных меньше, чем значение ключа данных самого узла X ;
- у всех узлов правого поддерева произвольного узла X значения ключей данных не меньше, чем значение ключа данных узла X .

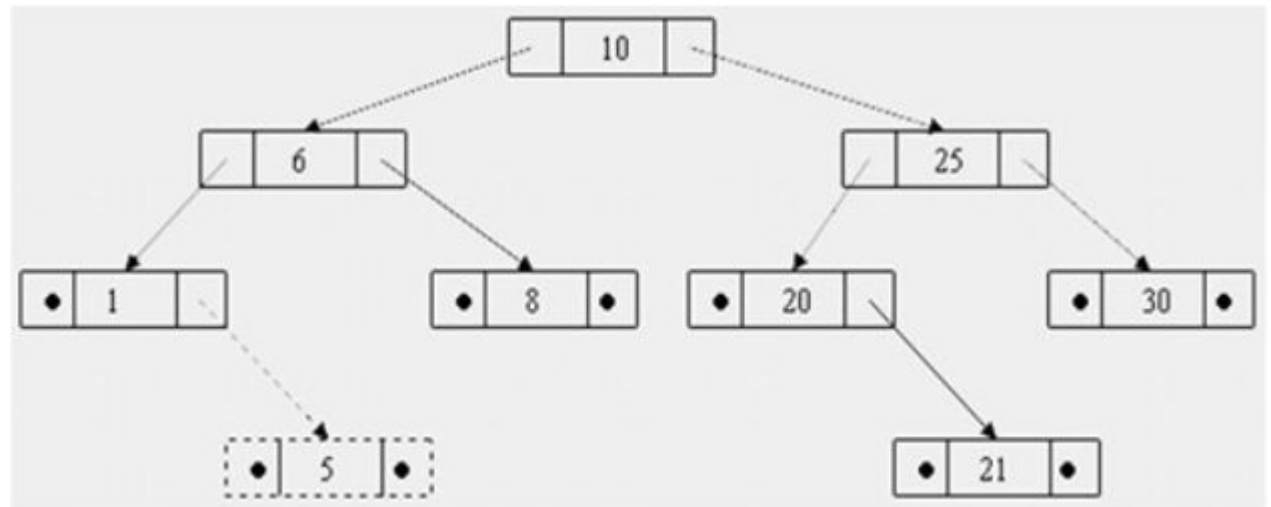
Данные в каждом узле должны обладать ключами, на которых определена операция сравнения меньше.

Информация, представляющая каждый узел, является структурой, а не единственным полем данных.



Вставка узла (5) в упорядоченное дерево

1. Сравниваем 5 с ключом корня ($5 < 10$).
2. Уходим в левое поддерево.
3. Сравниваем 5 и 6 ($5 < 6$).
4. Уходим влево.
5. Узел конечный (лист).
6. Сравниваем 5 и 1 ($5 > 1$).
7. Вставляем правого сына.
8. Получили дерево с новым узлом, которое сохранило все свойства дерева поиска.



Добавление узла в двоичное дерево

Добавление элемента – это добавление элемента в конкретное место, которое определяется по алгоритму:

- Сравниваем ключ с корнем, если он меньше ключа корня, то уходим в левое поддерево, если нет, то в правое.
- Действие выполняем до конечного узла (листа).
- Если ключ меньше ключа листа, то добавляем листу левого сына, если нет, то правого сына.

```
1  struct tnode * addnode(int x, tnode *tree) {
2      if (tree == NULL) { // Если дерева нет, то сформируем корень
3          tree = new tnode; // память под узел
4          tree->field = x;    // поле данных
5          tree->left = NULL;
6          tree->right = NULL; // ветви инициализируем пустотой
7      } else if (x < tree->field) // условие добавление левого потомка
8          tree->left = addnode(x, tree->left);
9      else // условие добавление правого потомка
10         tree->right = addnode(x, tree->right);
11     return(tree);
12 }
```



Удаление поддерева

```
1 void freemem(tnode *tree) {  
2     if(tree!=NULL) {  
3         freemem(tree->left);  
4         freemem(tree->right);  
5         delete tree;  
6     }  
7 }
```



Работа с конкретными элементами дерева

Описание структуры

```
typedef struct tnode
{
    int field; // поле данных
    struct tnode *left; // указатель на левое поддерево
    struct tnode *right; // указатель на правое поддерево
    struct tnode *parent; // указатель на предка
} tnode;
```

Инициализация дерева

```
tnode *create(tnode *tree, int key)
{
    // выделение памяти под корень
    tnode *tmp = malloc(sizeof(tnode));
    // присваивание значения ключу
    tmp -> field = key;
    // присваивание указателю на родителя значения NULL
    tmp -> parent = NULL;
    // присваивание указателю на левое и правое поддерево значения NULL
    tmp -> left = tmp -> right = NULL;
    tree = tmp;
    return tree;
}
```



Поиск нужного элемента в дереве

При поиске помним, что слева расположены элементы с меньшим значением ключа, справа — с большим.

```
tnode *search(tnode * tree, int key)
{
    // Если дерево пусто или ключ корня равен искомому ключу,
    // то возвращается указатель на корень
    if ((tree == NULL) || (tree -> field == key))
        return tree;
    // Поиск нужного узла
    if (key < tree -> field)
        return search(tree -> left, key);
    else return search(tree -> right, key);
}
```

Поиск элемента с минимальным или максимальным ключом

```
// Минимальный элемент дерева
node *min(node *tree)
{
    node *l = tree;
    while (l -> left != NULL)
        l = l -> left;
    return l;
}
```

```
// Максимальный элемент дерева
node *max(node *tree)
{
    node *r = tree;
    while (r -> right != NULL)
        r = r -> right;
    return r;
}
```



Поиск нужного элемента в дереве

Поиск элемента за другим (для удаления элементов).

```
tnode *succ(tnode *tree)
{
    tnode *p = tree, *l = NULL;
    // если есть правое поддерево, то ищем минимальный элемент в этом поддереве
    if (p -> right != NULL)
        return min(p -> right);
    /* правое дерево пусто, идем по родителям до тех пор,
    пока не найдем родителя, для которого наше дерево левое */
    l = p -> parent;
    while ((l != NULL) && (p == l -> right))
    {
        p = l;
        l = l -> parent;
    }
    return l;
}
```



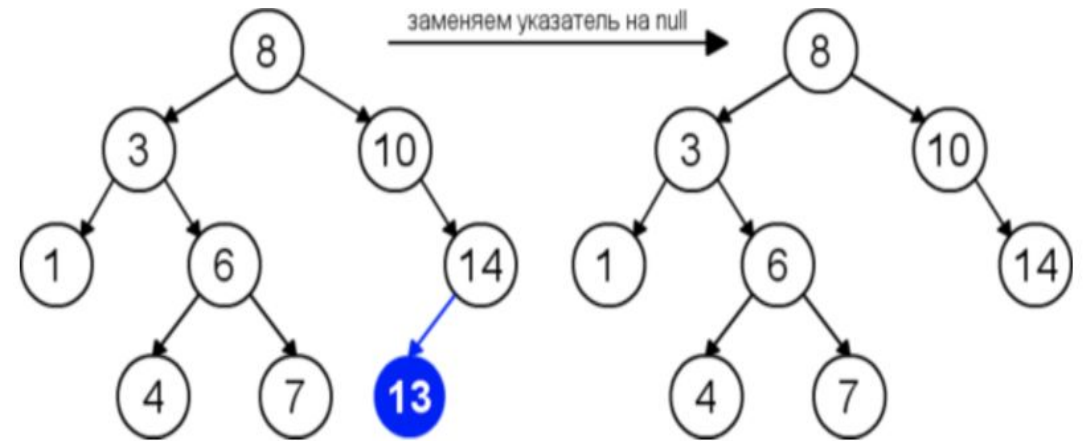
Удаление узла дерева

Удаление узла в дереве связано с его положением и наличием потомков.

Случай 1: удаляемый узел не имеет левого и правого поддерева, просто удаляем сам узел.

```
tnode *delete(tnode *tree, int key)
{
    // Поиск удаляемого узла по ключу
    tnode *p = tree, *l = NULL, *m = NULL;
    l = search(tree, key);
    // 1 случай
    if ((l -> left == NULL) && (l -> right == NULL))
    {
        m = l -> parent;
        if (l == m -> right) m -> right = NULL;
        else m -> left = NULL;
        free(l);
    }

    return tree;
}
```



Удаление узла дерева

Удаление узла в дереве связано с его положением и наличием потомков.

Случай 2 : у удаляемого узла одно поддерево.

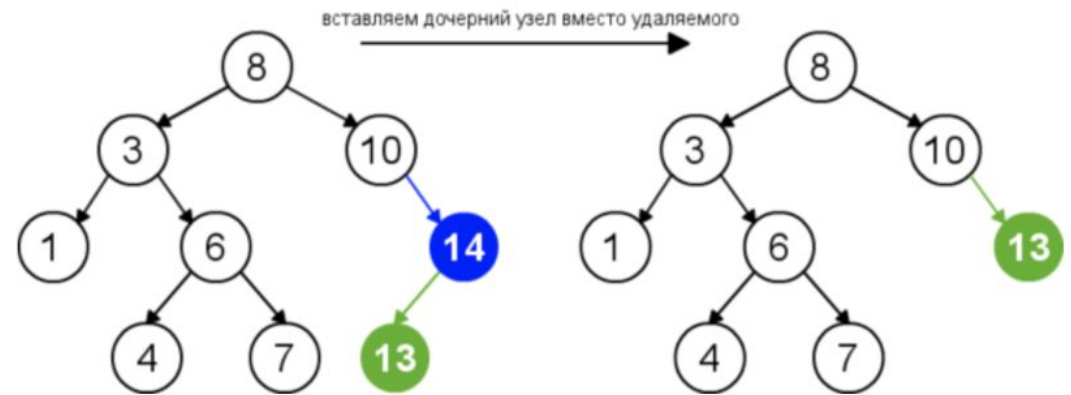
Тогда мы просто удаляем данный узел, а на его место ставим поддерево.

```
tnode *delete(tnode *tree, int key)
{
    // Поиск удаляемого узла по ключу
    tnode *p = tree, *l = NULL, *m = NULL;
    l = search(tree, key);

    // 2 случай, 1 вариант - поддерево справа
    if ((l -> left == NULL) && (l -> right != NULL))
    {
        m = l -> parent;
        if (l == m -> right) m -> right = l -> right;
        else m -> left = l -> right;
        free(l);
    }

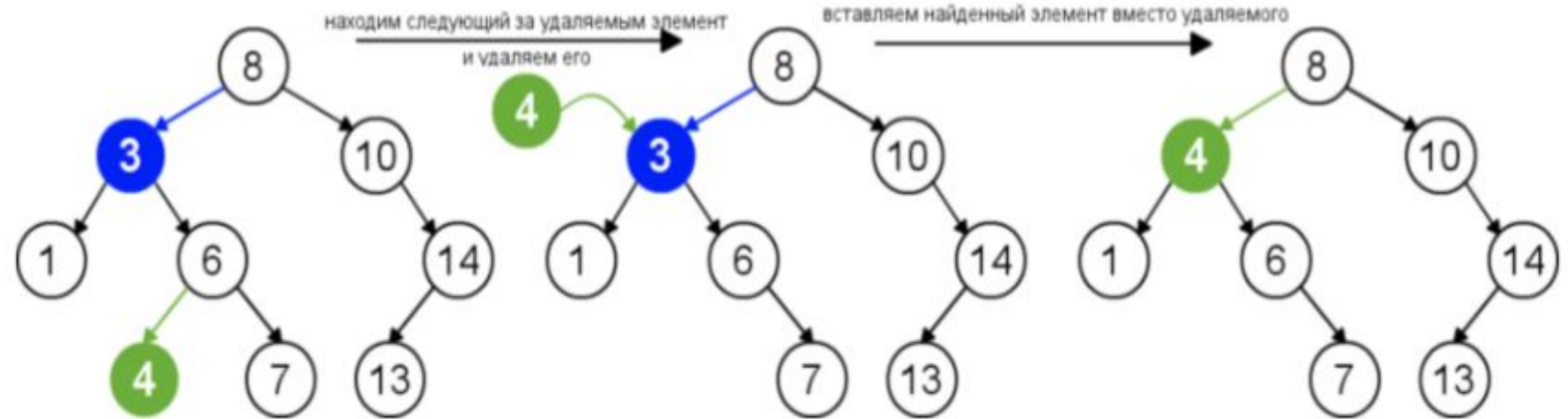
    // 2 случай, 2 вариант - поддерево слева
    if ((l -> left != NULL) && (l -> right == NULL))
    {
        m = l -> parent;
        if (l == m -> right) m -> right = l -> left;
        else m -> left = l -> left;
        free(l);
    }

    return tree;
}
```



Удаление узла дерева

Случай 3 : у удаляемого узла существуют оба поддерева. Тогда необходимо сначала найти следующий за удаляемым элемент, а потом его поставить на место удаляемого элемента.



```
tnode *delete(tnode *tree, int key)
{
    // Поиск удаляемого узла по ключу
    tnode *p = tree, *l = NULL, *m = NULL;
    l = search(tree, key);

    // 3 случай
    if ((l -> left != NULL) && (l -> right != NULL))
    {
        m = succ(l);
        l -> key = m -> key;
        if (m -> right == NULL)
            m -> parent -> left = NULL;
        else m -> parent -> left = m -> right;
        free(m);
    }
    return tree;
}
```

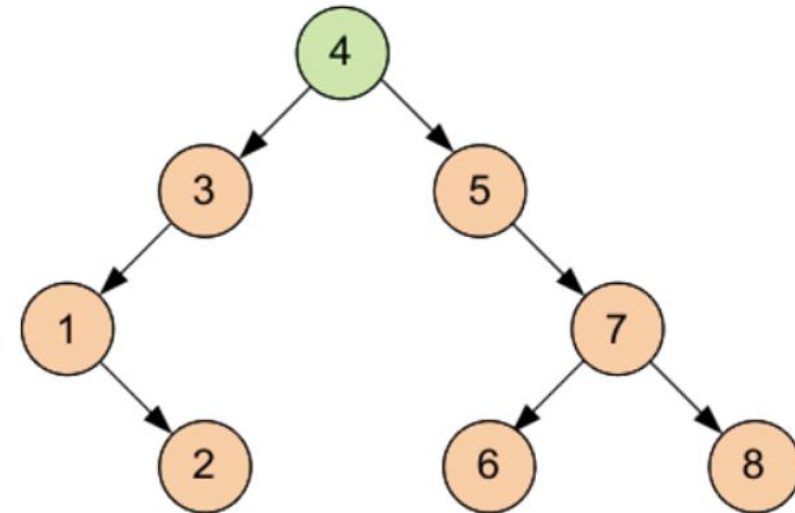


Пример сортировки связанных элементов на основе бинарного дерева поиска

Исходная последовательность имеет вид: 4, 3, 5, 1, 7, 8, 6, 2

Для сортировки с помощью дерева исходная сортируемая последовательность представляется в виде структуры данных «дерево».

Корень дерева – это начальный элемент последовательности. Остальные элементы, меньшие корневого, располагаются в левом поддереве, все элементы, большие корневого, располагаются в правом поддереве. Причем это правило должно соблюдаться на каждом уровне.



После того, как все элементы размещены в структуре «дерево», необходимо вывести их, используя инфиксную форму обхода.



Пример сортировки связанных элементов на основе бинарного дерева поиска

[*] Сортировка массива на основе дерева поиска.cpp

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  // Структура - узел дерева
4  struct tnode
5  {
6      int field;           // поле данных
7      struct tnode *left;  // левый потомок
8      struct tnode *right; // правый потомок
9  };
10 // Вывод узлов дерева (обход в инфиксной форме)
11 void treeprint(tnode *tree)
12 {
13     if (tree != NULL) { //Пока не встретится пустой узел
14         treeprint(tree->left); //Рекурсивная функция вывода левого поддерева
15         cout << tree->field << " "; //Отображаем корень дерева
16         treeprint(tree->right); //Рекурсивная функция вывода правого поддерева
17     }
18 }
19 // Добавление узлов в дерево
20 struct tnode * addnode(int x, tnode *tree) {
21     if (tree == NULL) // Если дерева нет, то формируем корень
22     {
23         tree = new tnode; //память под узел
24         tree->field = x;    //поле данных
25         tree->left = NULL;
26         tree->right = NULL; //ветви инициализируем пустотой
27     }
28     else // иначе
29     {
30         if (x < tree->field) //Если элемент x меньше корневого, уходим влево
31             tree->left = addnode(x, tree->left); //Рекурсивно добавляем элемент
32         else //иначе уходим вправо
33             tree->right = addnode(x, tree->right); //Рекурсивно добавляем элемент
34     }
35     return(tree);
36 }
```

```
35 //Освобождение памяти дерева
36 void freemem(tnode *tree)
37 {
38     if (tree != NULL) // если дерево не пустое
39     {
40         freemem(tree->left); // рекурсивно удаляем левую ветку
41         freemem(tree->right); // рекурсивно удаляем правую ветку
42         delete tree;         // удаляем корень
43     }
44 }
45 // Основная программа
46 int main()
47 {
48     struct tnode *root = 0; // Объявляем структуру дерева
49     system("chcp 1251");    // переходим на русский язык в консоли
50     system("cls");
51     int a;                  // текущее значение узла
52     // В цикле вводим 8 узлов дерева
53     for (int i = 0; i < 8; i++)
54     {
55         cout << "Введите узел " << i + 1 << ": ";
56         cin >> a;
57         root = addnode(a, root); // размещаем введенный узел на дереве
58     }
59     treeprint(root); // выводим элементы дерева, получаем отсортированный массив
60     freemem(root);   // удаляем выделенную память
61     cin.get(); cin.get();
62     return 0;
63 }
```

```
Введите узел 1: 4
Введите узел 2: 3
Введите узел 3: 5
Введите узел 4: 1
Введите узел 5: 7
Введите узел 6: 8
Введите узел 7: 6
Введите узел 8: 2
1 2 3 4 5 6 7 8
```



Пример поиска слов в выражении на основе бинарного дерева поиска

Написать программу, подсчитывающую частоту встречаемости слов входного потока(**now is the time for all good men to come to the aid of their party**).

Поскольку список слов заранее не известен, мы не можем предварительно упорядочить его. Неразумно пользоваться линейным поиском каждого полученного слова, чтобы определять, встречалось оно ранее или нет, т.к. в этом случае программа работает слишком медленно.

Один из способов — постоянно поддерживать упорядоченность уже полученных слов, помещая каждое новое слово в такое место, чтобы не нарушалась имеющаяся упорядоченность. Воспользуемся бинарным деревом.

В дереве каждый узел содержит:

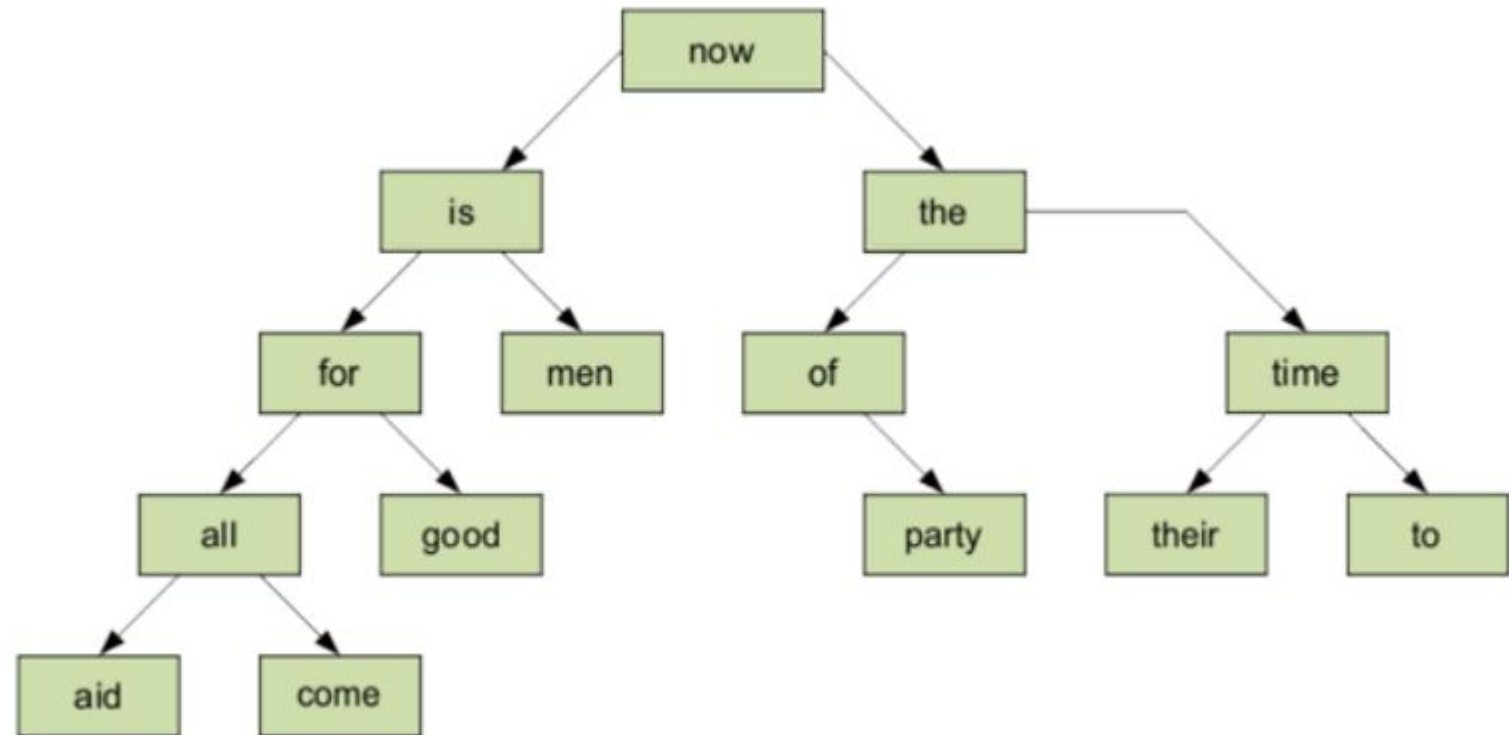
- указатель на текст слова;
- счетчик числа встречаемости;
- указатель на левого потомка;
- указатель на правого потомка.



Пример поиска слов в выражении на основе бинарного дерева поиска

Фраза для рассмотрения - **now is the time for all good men to come to the aid of their party** (сейчас самое время всем хорошим людям прийти на помощь своей партии).

Дерево имеет вид:



Пример поиска слов в выражении на основе бинарного дерева поиска

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <ctype.h>
3  #include <string.h>
4  #include <stdlib.h>
5  #include <csddef>
6  #define MAXWORD 100
7  struct tnode {                // узел дерева
8      char* word;                // указатель на строку (слово)
9      int count;                // число вхождений
10     struct tnode* left;        // левый потомок
11     struct tnode* right;       // правый потомок
12 };
13 // функция добавления узла к дереву
14 struct tnode* addtree(struct tnode* p, char* w) {
15     int cond;
16     if (p == NULL) {
17         p = (struct tnode*)malloc(sizeof(struct tnode));
18         p->word = _strdup(w);
19         p->count = 1;
20         p->left = p->right = NULL;
21     }
22     else if ((cond = strcmp(w, p->word)) == 0)
23         p->count++;
24     else if (cond < 0)
25         p->left = addtree(p->left, w);
26     else
27         p->right = addtree(p->right, w);
28     return p;
29 }
30 // функция удаления поддерева
31 void freemem(tnode* tree) {
32     if (tree != NULL) {
33         freemem(tree->left);
34         freemem(tree->right);
35         free(tree->word);
36         free(tree);
37     }
38 }
```

```
39 // функция вывода дерева
40 void treeprint(struct tnode* p) {
41     if (p != NULL) {
42         treeprint(p->left);
43         printf("%d %s\n", p->count, p->word);
44         treeprint(p->right);
45     }
46 }
47 int main() {
48     struct tnode* root;
49     char word[MAXWORD];
50     root = NULL;
51     do {
52         scanf_s("%s", word, MAXWORD);
53         if (isalpha(word[0]))
54             root = addtree(root, word);
55     } while (word[0] != '0'); // условие выхода - ввод символа '0'
56     treeprint(root);
57     freemem(root);
58     getchar();
59     return 0;
60 }
```

```
now is the time for all good men to come to the aid of their party 0
1 aid
1 all
1 come
1 for
1 good
1 is
1 men
1 now
1 of
1 party
2 the
1 their
1 time
2 to
```

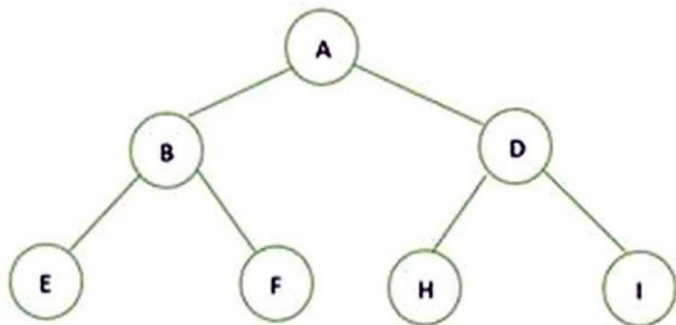


Полное бинарное дерево

Полное бинарное дерево это дерево у каждого узла которого есть либо 2 дочерних элемента, либо 0 дочерних элементов.

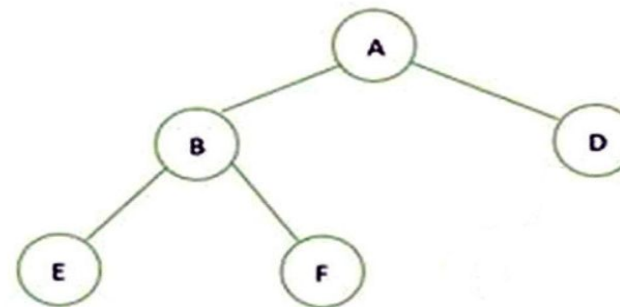
Пример 1

(идеальное двоичное дерево)



Пример 2

(неидеальное двоичное дерево)



Уровни n

Для A $n=0$, для B,D $n=1$, для E,F,H,I $n=2$

Глубина(высота) дерева

$$n+1=3$$

Максимальное количество узлов $2^{n+1}-1$

$$2^{2+1}-1=2^3-1=7$$



Полное бинарное дерево

Алгоритм:

Для создания полного двоичного дерева нам требуется структура данных очереди для отслеживания вставленных узлов.

- Шаг 1: Инициализируйте корень новым узлом, когда дерево пусто.
- Шаг 2: Если дерево не пусто, получите передний элемент

Если передний элемент не имеет левого дочернего элемента, установите левый дочерний элемент в новый узел

Если правый дочерний элемент отсутствует, установите правый дочерний элемент в качестве нового узла.

- Шаг 3: Если у узла есть оба дочерних элемента, извлеките его из очереди.
- Шаг 4: Поставьте в очередь новые данные.



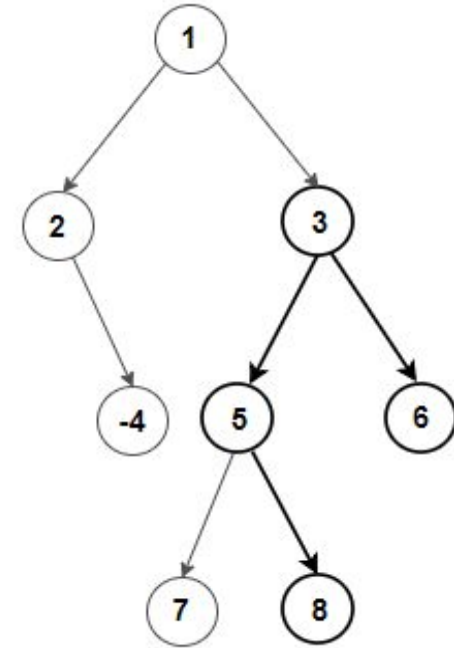
Определение максимального пути между листьями бинарного дерева

Максимальный суммарный путь между двумя листьями, который проходит через узел, имеет значение, равное максимальной сумме пути от узла к листу его левого и правого дочерних элементов плюс значение узла. Максимальное значение среди всех путей с максимальной суммой, найденных для каждого узла в дереве.

Временная сложность этого решения $O(n^2)$, где n - количество узлов в дереве.

Сложность для определения максимальной суммы пути для каждого узла с учетом его левого и правого поддерева занимает $O(n)$ время.

Обход выполняем снизу вверх, определяя максимальную сумму пути от узла к листу для каждого узла до его родителя



Определение максимального пути между листьями бинарного дерева

```
1  #include <iostream>
2  #include <climits>
3  using namespace std;
4
5  // Структура узла бинарного дерева
6  struct Node
7  {
8      int data;
9      Node *left, *right;
10
11     Node(int data)
12     {
13         this->data = data;
14         this->left = this->right = nullptr;
15     }
16 };
17
18 // Рекурсивная функция для нахождения пути максимальной суммы между двумя листьями
19 // в бинарном дереве
20 int findMaxSumPath(Node* root, int &max_sum)
21 {
22     // базовый случай: пустое дерево
23     if (root == nullptr) {
24         return 0;
25     }
26
27     // найти максимальную сумму пути от узла к листу, начиная с левого потомка
28     int left = findMaxSumPath(root->left, max_sum);
29
30     // найти максимальную сумму пути от узла к листу, начиная с правого потомка
31     int right = findMaxSumPath(root->right, max_sum);
32
33     // важно вернуть максимальную сумму пути от узла к листу, начиная с
34     // текущего узла
35
36     // случай 1: левый дочерний элемент равен нулю
37     if (root->left == nullptr) {
38         return right + root->data;
39     }
```

```
41     // случай 2: правый дочерний элемент равен нулю
42     if (root->right == nullptr) {
43         return left + root->data;
44     }
45
46     // найти максимальный суммарный путь "сквозь" текущий узел
47     int cur_sum = left + right + root->data;
48
49     // обновить путь максимальной суммы, найденный до сих пор
50     // (обратите внимание, что путь максимальной суммы
51     // "исключение" текущего узла в поддереве с корнем в текущем узле
52     // уже обновляется, так как мы выполняем обход в обратном порядке)
53
54     max_sum = max(cur_sum, max_sum);
55
56     // случай 3: существуют и левый, и правый дочерние элементы
57     return max(left, right) + root->data;
58 }
59
60 // функция для возврата пути максимальной суммы между
61 // двумя листьями в бинарном дереве
62 int findMaxSumPath(Node* root)
63 {
64     int max_sum = INT_MIN;
65     findMaxSumPath(root, max_sum);
66
67     return max_sum;
68 }
69
```



Определение максимального пути между листьями бинарного дерева

```
70 int main()
71 {
72     /* Построим следующее дерево
73     1
74     / \
75    /   \
76   2     3
77   \     / \
78  -4    5   6
79       / \
80      7   8
81     */
82
83     Node* root = new Node(1);
84     root->left = new Node(2);
85     root->right = new Node(3);
86     root->left->right = new Node(-4);
87     root->right->left = new Node(5);
88     root->right->right = new Node(6);
89     root->right->left->left = new Node(7);
90     root->right->left->right = new Node(8);
91
92     cout << findMaxSumPath(root) << endl;
93
94     return 0;
95 }
```



Реализация программного кода

главная.cpp

```
1 #include <iostream>
2 #include <climits>
3 Использование пространства имен std;
4
5 Структура данных для хранения узла двоичного дерева
6 struct Узел
7 {
8     int данные;
9     Узел *влево, *вправо;
10
11     Node(int data)
12     {
13         this->data = данные;
14         this->left = this->right = nullptr;
15     }
16 };
17
18 Рекурсивная функция для нахождения максимального суммарного пути между двумя листьями
19 в бинарном дереве
20 int findMaxSumPath(Node* root, int &max_sum)
21 {
22     Базовый вариант: пустое дерево
23     if (root == nullptr) {
24         возврат 0;
25     }
26
27     Найдите путь от узла до листа с максимальной суммой, начиная с левого дочернего элемента
28     int left = findMaxSumPath(root->left, max_sum);
```

Ввод необязательный

Выпуск

Принятый 0,005 с, 1068 КБ

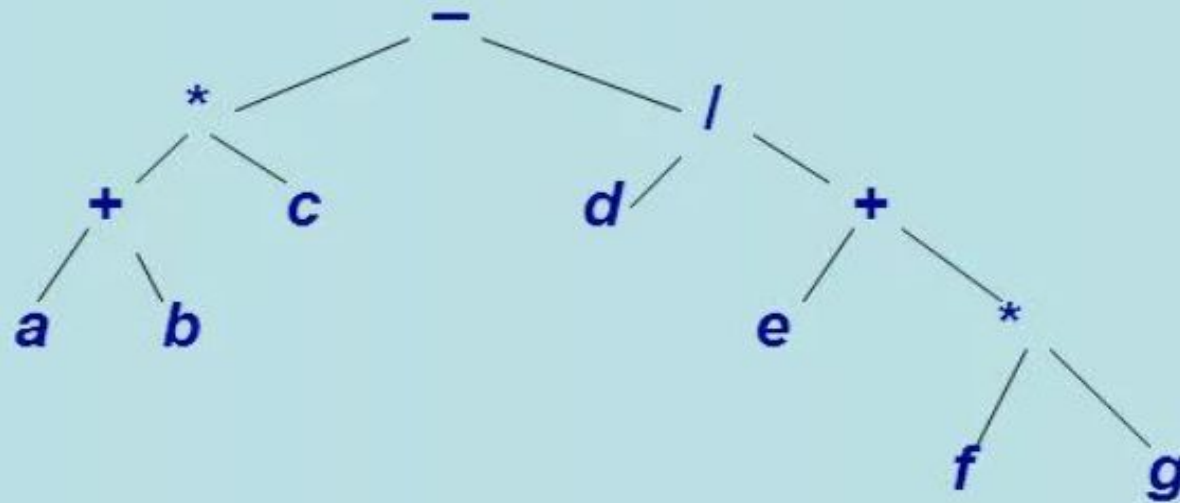
22



Обход бинарного дерева, представляющего арифметическое выражение с бинарными операциями

Арифметическое выражение

$$(a + b) * c - d / (e + f * g)$$



1) КЛП – префиксная запись: $- * + a b c / d + e * f g$;

2) ЛКП – инфиксная запись (без скобок): $a + b * c - d / e + f * g$;

3) ЛПК – постфиксная запись: $a b + c * d e f g * + / -$.



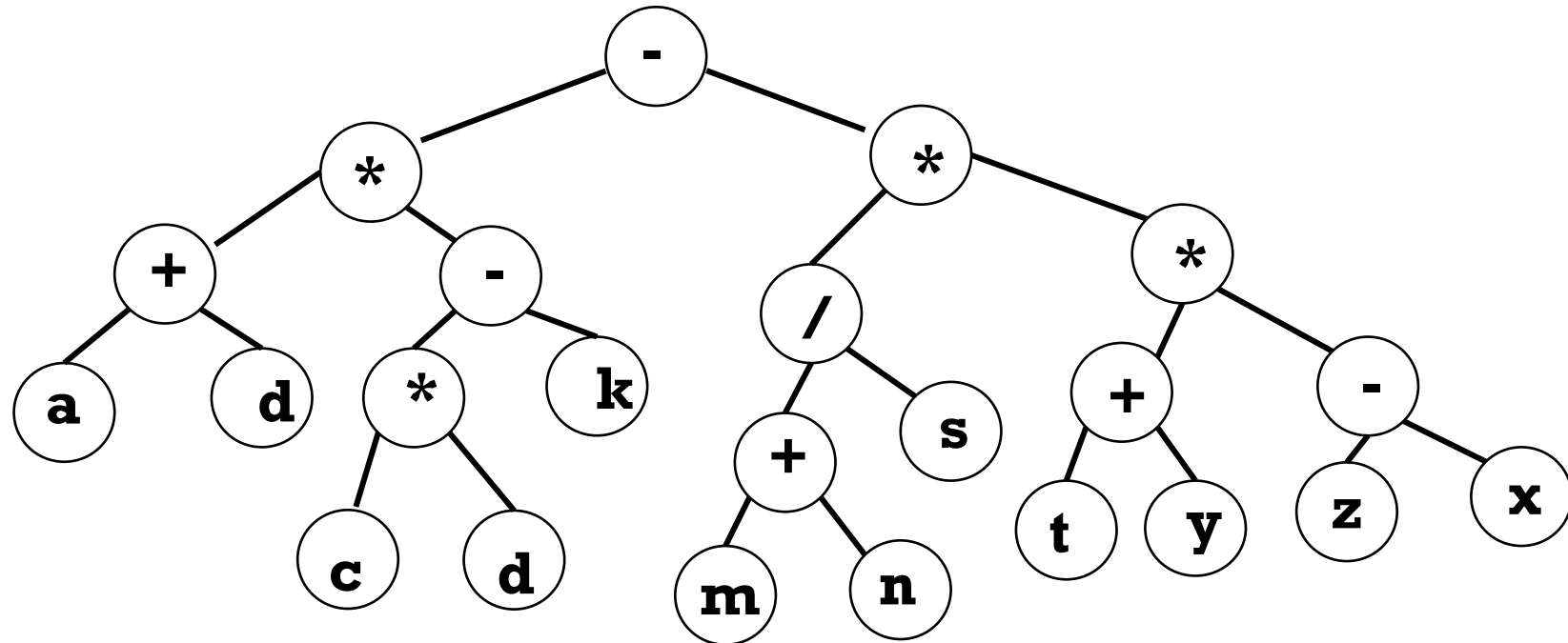
Построение бинарного дерева для арифметического выражения

$$\overset{2}{((a + d)} \overset{1}{*)} \overset{3}{(c * d - k)} \overset{4}{))} - \overset{11}{((m + n)} \overset{7}{/} \overset{6}{s * (t + y)} \overset{5}{*)} \overset{9}{(z - x)} \overset{8}{)} \overset{10}{)}$$

Представим выражение в префиксной форме

- * + a d * - c d k * + / m n s * + t y - z x

Построим бинарное дерево выражения



Построение бинарного дерева для алгоритма Хаффмана

Кодирование Хаффмана (жадный алгоритм) — это алгоритм сжатия данных, который формирует основную идею сжатия файлов.

мама мыла раму

Составим таблицу используемых символов и последовательно представим бинарные деревья, сначала для наименьших повторений одновременно корректируем таблицу символов.

В итоге получаем коды каждой буквы представленной в предложении и пробела.

Кол-во повторений	4	4	2	1	1	1	1
символ	'м'	'а'	' '	'л'	'р'	'ы'	'у'

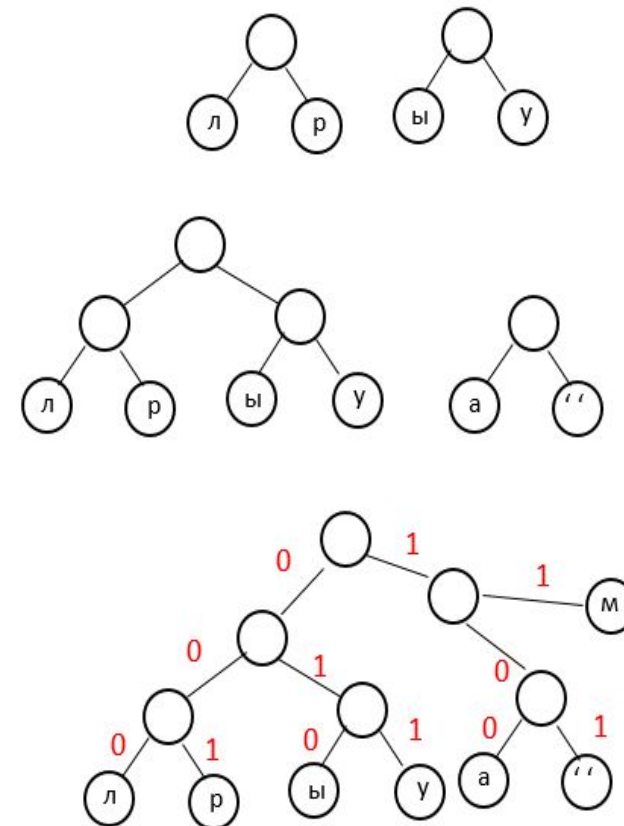
Кол-во повторений	4	4	2	2	2
символ	'м'	'а'	' '	'л','р'	'ы','у'

Кол-во повторений	4	4	2	4
символ	'м'	'а'	' '	'л','р','ы','у'

Кол-во повторений	4	6	4
символ	'м'	'а',' '	'л','р','ы','у'

Итоговая таблица кодов

коды	11	100	101	000	001	010	011
символ	'м'	'а'	' '	'л'	'р'	'ы'	'у'



Построение бинарного дерева для алгоритма Хаффмана

- Алгоритм, названный в честь Клода Шеннона и Роберта Фано, работает по следующему правилу:
- Отсортируйте символы по их частоте.
- Разделите символы в этом порядке на две группы, чтобы сумма частот в двух группах была как можно равной. Две группы соответствуют левому и правому поддереву создаваемого дерева Шеннона. Результирующее разделение не обязательно является лучшим, что может быть достигнуто с заданными частотами. Также не ищут лучшего разбиения, поскольку это не обязательно приводит к лучшему результату. Важно, чтобы среднее отклонение от энтропии символов было как можно меньше.
- Если в одной из результирующих групп более одного символа, рекурсивно примените алгоритм к этой группе.
- Важным элементом этого алгоритма является первый шаг. Это гарантирует, что символы с одинаковой вероятностью часто оказываются в одном поддереве. Это важно, потому что узлы в одном дереве получают битовые последовательности с одинаковой длиной кода (максимальная разница может быть только количеством узлов в этом дереве). Если вероятности сильно различаются, невозможно сгенерировать битовые последовательности с необходимыми различиями в длине. Это означает, что редкие символы получают слишком короткие битовые последовательности, а частые символы — слишком длинные битовые последовательности.



Кол-во повторений	4	4	2	1	1	1	1
символ	‘м’	‘а’	‘ ‘	‘л’	‘р’	‘ы’	‘у’

Разделим символы примерно на равновероятные части по мере их повторения

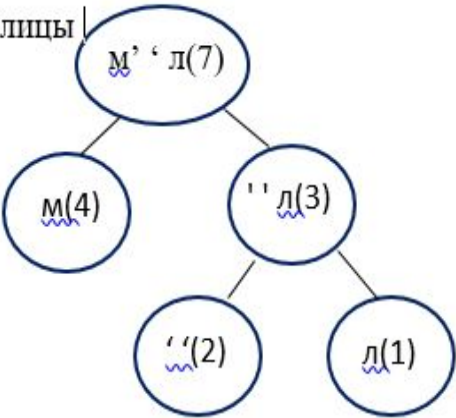
Кол-во повторений	4	2	1
символ	‘м’	‘ ‘	‘л’

Кол-во повторений	4	1	1	1
символ	‘а’	‘р’	‘ы’	‘у’

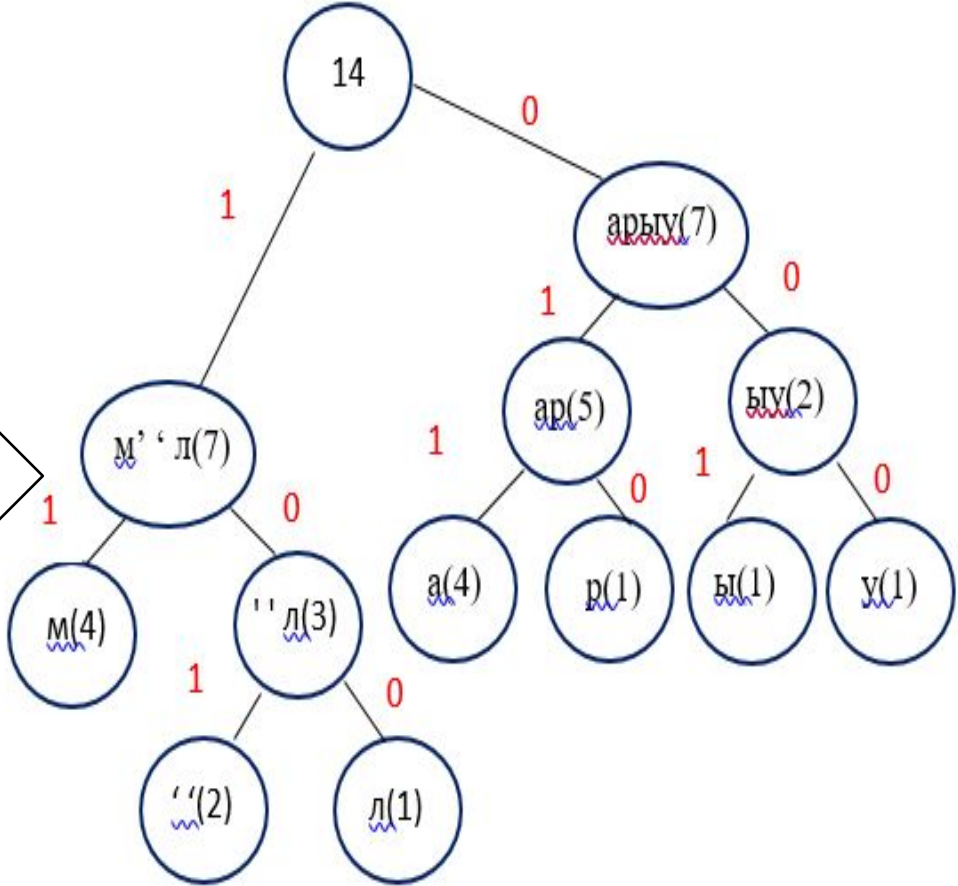
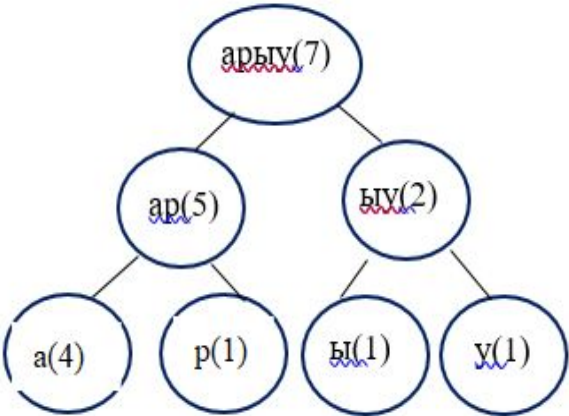
Строим дерево

Общее количество повторений всех символов предложения

Для первой таблицы



Для второй таблицы



Коды	11	011	101	100	010	001	000
символ	‘м’	‘а’	‘ ‘	‘л’	‘р’	‘ы’	‘у’

