The background of the slide is a spiral-bound notebook with a light beige, textured cover and a silver metal spiral binding on the left side. The text is printed on the notebook's surface.

Элементы математической ЛОГИКИ

Модуль 5. Основы теории графов

Лекция №21 Связные графы.

Лекция №21

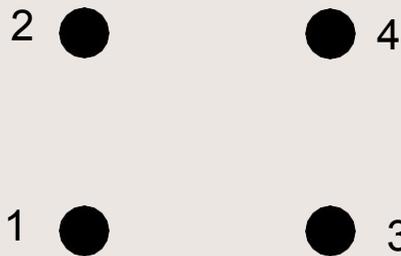
План

1. Операции над графами.
2. Маршрут, путь, цепь, цикл.
3. Достижимость в графах.
4. Связность в графах.
5. Расстояния в графах.
6. Метрические характеристики графа.
7. Эйлеровы и гамильтоновы графы.

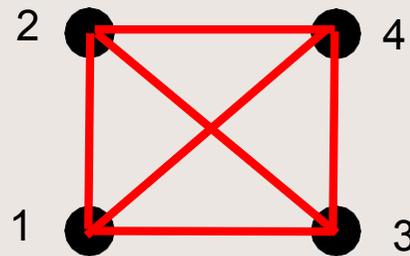
Пустой и полный графы

Пустой граф – это граф, не содержащий ни одного ребра (дуги). Пустой граф с n вершинами обозначается O_n .

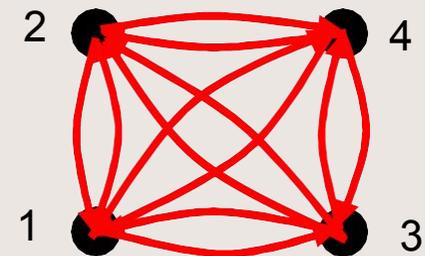
Полный граф – это граф, в котором каждые две вершины смежны. Полный граф с n вершинами обозначается K_n .



Пустой граф O_4



Полный неориент.
граф K_4

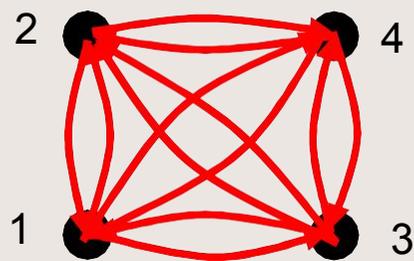


Полный ориент.
граф K_4

Свойства матриц пустых и полных графов

Все элементы матрицы смежности вершин **пустого графа** равны 0.

Все элементы матрицы смежности вершин как ориентированного, так и неориентированного **полного графа** равны 1, кроме элементов главной диагонали.



	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

Объединение графов

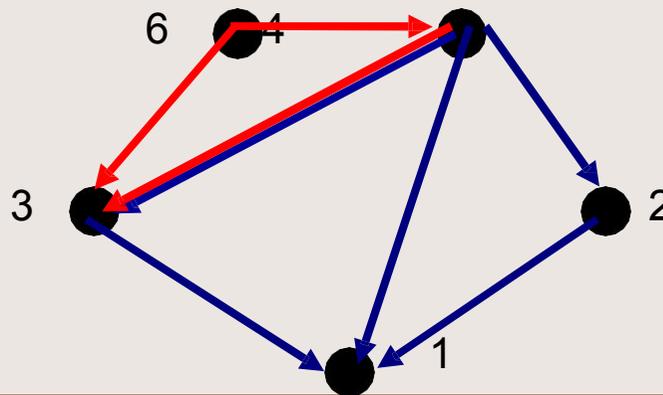
Объединением графов $G_1 = (X_1, R_1)$ и $G_2 = (X_2, R_2)$ называется граф, состоящий из объединений множеств вершин и множеств ребер (дуг) исходных графов **$G = (X_1 \cup X_2, R_1 \cup R_2)$**

Пример:

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$X_2 = \{3, 4, 6\} \quad R_2 = \{(4, 3), (6, 4), (6, 3)\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 4), (6, 3)\}$$



Пересечение графов

Пересечением графов $G_1 = (X_1, R_1)$ и $G_2 = (X_2, R_2)$ называется граф, состоящий из пересечений множеств вершин и множеств ребер (дуг) исходных графов **$G = (X_1 \cap X_2, R_1 \cap R_2)$**

Пример:

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$X_2 = \{3, 4, 6\} \quad R_2 = \{(4, 3), (6, 4), (6, 3)\}$$

$$X = \{3, 4\} \quad R = \{(4, 3)\}$$



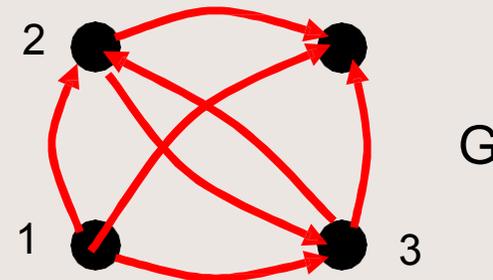
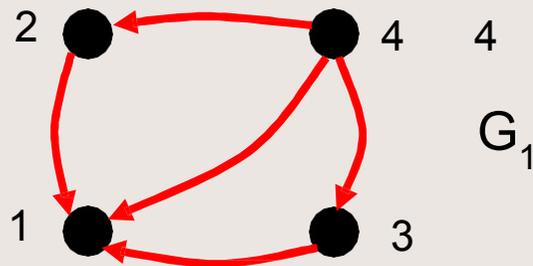
Дополнение графа

Дополнением графа $G_1 = (X_1, R_1)$ до полного графа называется граф $G = (X, R)$, состоящий из множества вершин исходного графа и дополнения множества ребер (дуг) исходного графа без пар с одинаковыми элементами.

Пример:

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4\} \quad R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

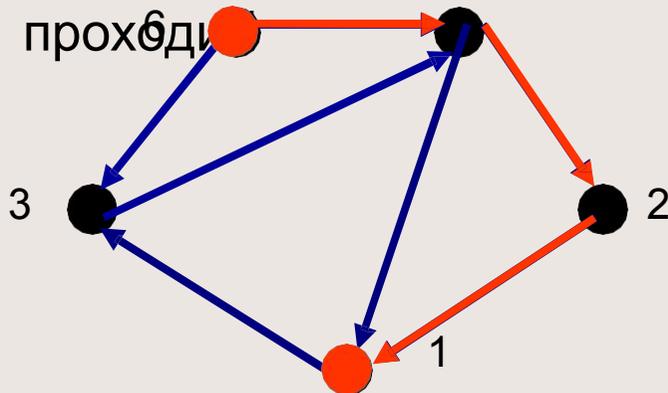
$$X = \{1, 2, 3, 4\} \quad R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$



Маршрут. Длина маршрута

Маршрут – это последовательность (x_1, x_2, \dots, x_n) вершин графа, такая, что для каждого $i=1, 2, \dots, n-1$ вершины x_i, x_{i+1} соединены дугой (ребром). Говорят, что маршрут **проходит** через эти ребра (дуги). Вершины x_1, x_n называются **началом и концом** маршрута, остальные вершины называются промежуточными.

Длина маршрута – количество ребер (дуг), через которые он проходит.



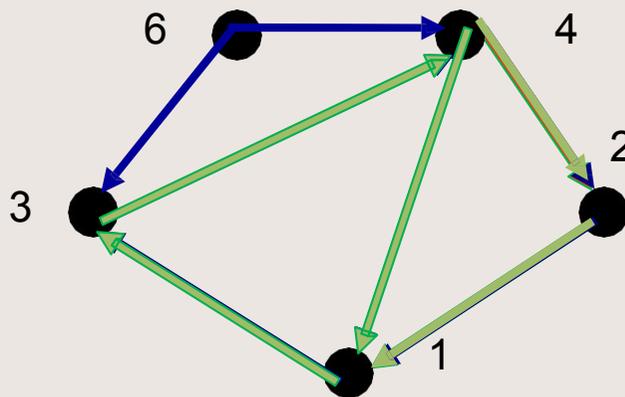
$(6, 4, 2, 1)$ – маршрут,
проходит через дуги $(6,4), (4,2), (2,1)$
6 – начало маршрута, 1 – конец маршрута.

Длина маршрута = 3

Путь

Путь – это маршрут, в котором все дуги (ребра) различны, т. е. ни одно ребро (дуга) не встречается дважды. Если кроме этого в пути различны и все вершины (кроме, может быть, начала и конца пути), то путь называется **простым**.

Если в графе имеется маршрут из вершины X_1 в вершину X_2 , то в нем имеется и путь из вершины X_1 в вершину X_2

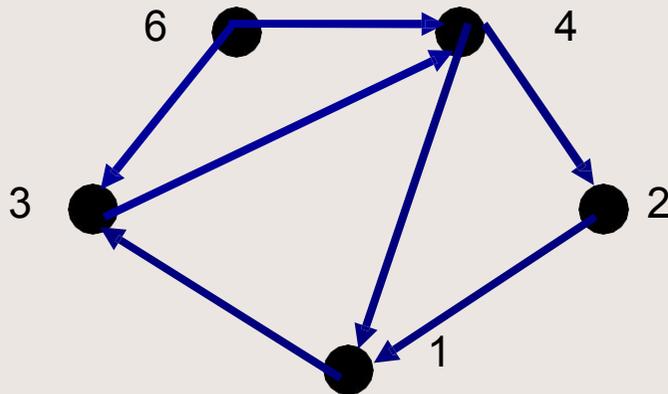


(4, 2, 1, 3, 4, 1) – маршрут из вершины 4 в вершину 1, который является **путем**, потому что ни одна дуга не встречается дважды. При этом он не является простым, т. к. вершины 1 и 4 встречаются в нем по два раза;

(4, 2, 1) – **простой путь** из вершины 4 в вершину 1.

Замкнутый маршрут

Маршрут, начало и конец которого **совпадают**, называется **замкнутым**.



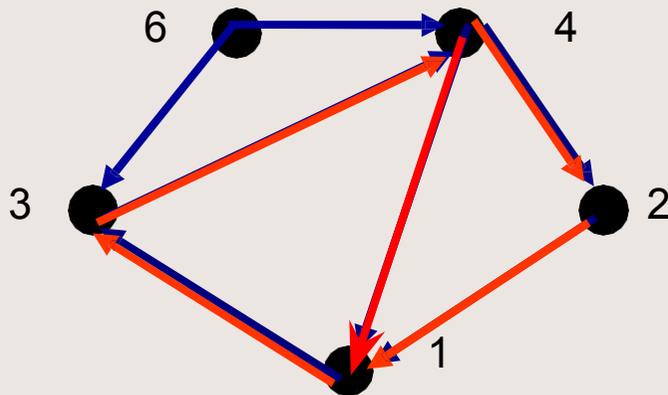
**(4, 2, 1, 3, 4, 1, 3, 4) –
замкнутый маршрут**

начало и конец совпадают –
это вершина 4.

Этот маршрут не является
путем, потому что дуги (1;3)
и (3;4) встречаются дважды.

Цепь

Цепь – путь, который не является замкнутым.



(4,2,1,3,4,1) – **цепь** из
вершины 4 в вершину 1

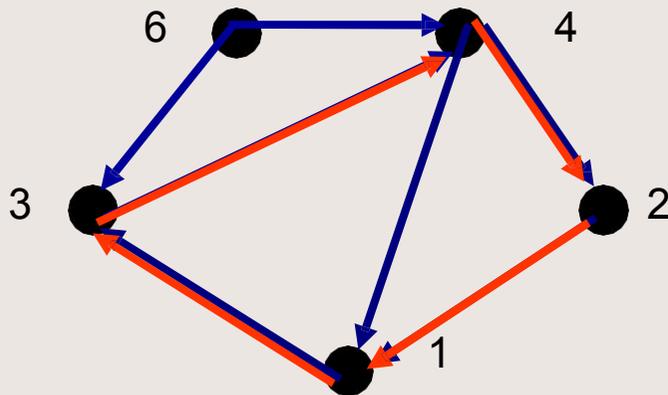
является путем, т.к. не
проходит дважды через одну
и ту же дугу;

не является простой цепью, т.
к. проходит дважды через
одни и те же вершины (4 и 1)

(4, 2, 1, 3) –
простая цепь

Цикл

Цикл (контур) – замкнутый путь.

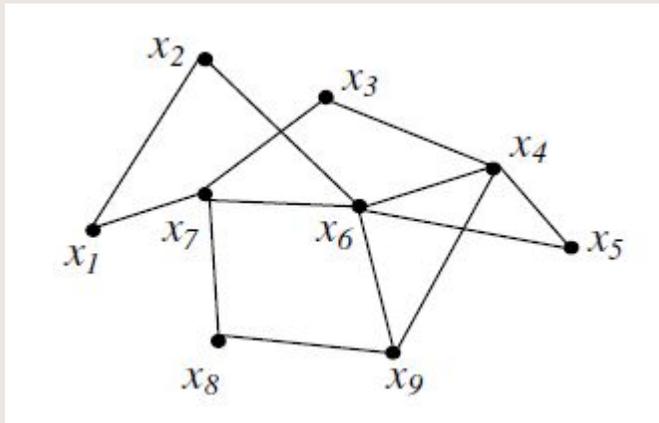


**(4, 2, 1, 3, 4) –
простой цикл**

(4, 2, 1, 3, 4, 1, 3, 4) –
циклом не является, хотя
начало и конец совпадают (это
вершина 4), но при этом дуги
(1;3) и (3;4) встречаются
дважды, следовательно, не
является путем.

Маршрут, который не является путем, содержит 1 или
несколько циклов.

Пример



!!! Все определения, сформулированные выше, остаются справедливыми и для неориентированных графов.

Решение. Пример (незамкнутого) маршрута:

$x_1 - x_7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_9 - x_8.$

Пример замкнутого маршрута:

$x_1 - x_2 - x_6 - x_5 - x_4 - x_6 - x_7 - x_1.$

Пример цепи (не являющейся простой):

$x_9 - x_6 - x_2 - x_1 - x_7 - x_6 - x_4.$

Пример простой цепи:

$x_8 - x_7 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_2.$

Пример цикла (не являющегося простым):

$x_1 - x_2 - x_6 - x_9 - x_4 - x_6 - x_7 - x_1.$

Пример простого цикла:

$x_7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_9 - x_8 - x_7.$

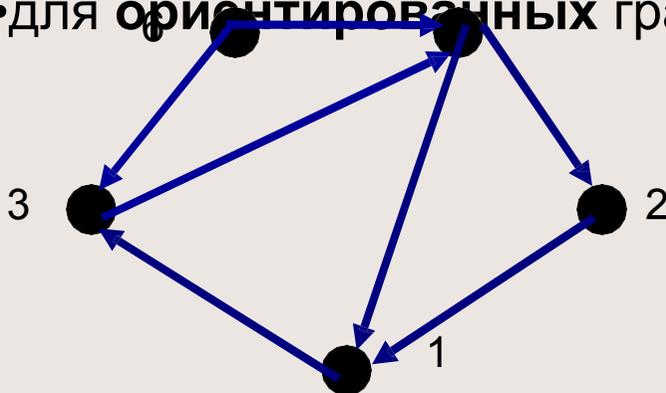
Достижимость

Вершина графа X_j **достижима** из вершины X_i , если **существует маршрут** между X_i и X_j .

Каждая вершина достижима из самой себя маршрутом длины 0.

Достижимость задает новое отношение на множестве вершин графа. Это отношение:

- **рефлексивно** (каждая вершина достижима из самой себя)
- **транзитивно** (если есть маршрут из X_i в X_j и из X_j в X_k , то есть маршрут из X_i в X_k)
- для **ориентированных** графов **несимметрично**



Вершина 1 достижима из вершины 6 (6, 4, 1).

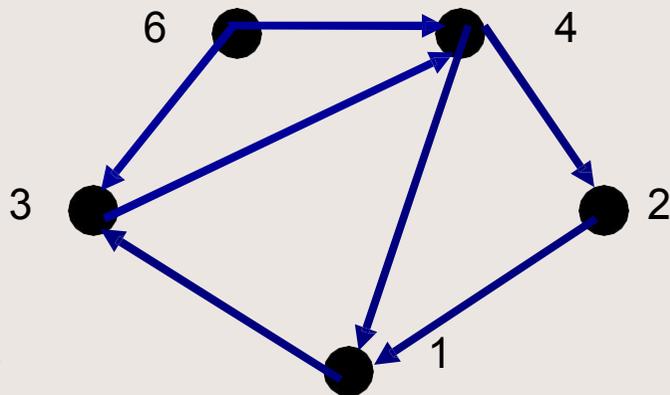
Вершина 6 не достижима из вершины 1

Матрица достижимости

Пусть граф $G=G(V,E)$ содержит n вершин.

Матрица достижимости – квадратная матрица размерности $n \times n$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа. Элементами матрицы являются:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я вершина достижима из } i\text{-й} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

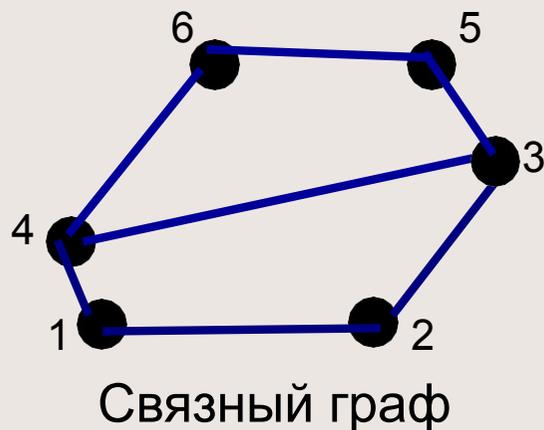


	1	2	3	4	6
1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	0
3	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	0
6	1	1	1	1	1

Связность неориентированного графа

Неориентированный граф называется **связным**, если в нем любые две вершины соединяются каким-либо маршрутом. В таком графе можно из любой вершины попасть в любую другую. В противном случае граф называется несвязным.

Все элементы матрицы достижимости связного графа равны 1.



Матрица достижимости

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

Связность неориентированного графа

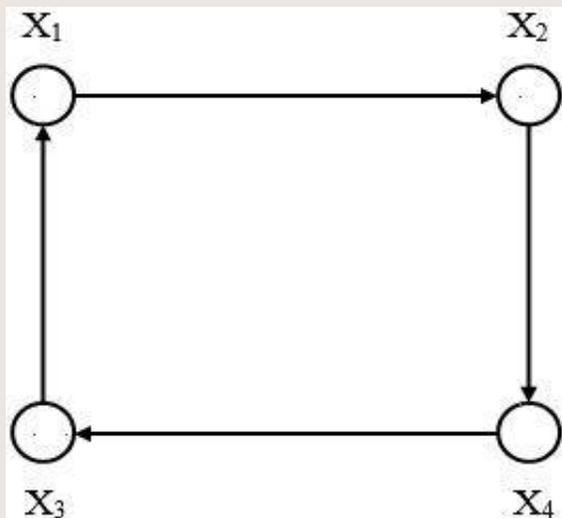
Теорема 1. Граф из n вершин, степень каждой из которых не менее $(n - 1) / 2$, является связным.

Теорема 2. Связный граф, в котором степень каждой вершины четна, при удалении любого ребра остается связным.

Теорема 3. Если из полного графа с n вершинами удалить не более чем $(n - 2)$ ребер, то граф останется связным.

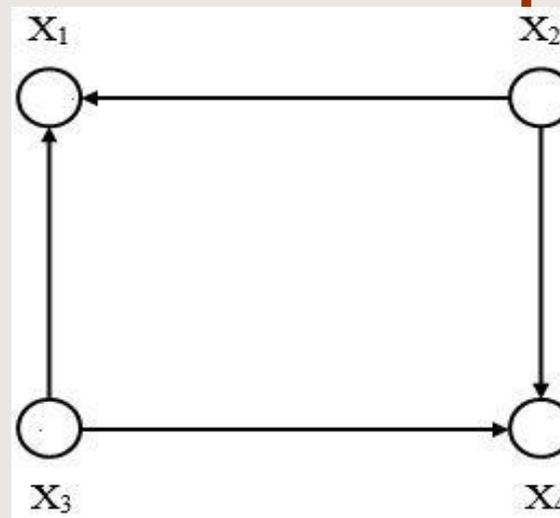
Связность ориентированного графа

Сильно связный



Это тот же связный граф, но только ориентированный. В таком графе точно так же можно из любой вершины попасть в любую другую.

Слабо связный граф



Граф, который не является сильно связным, но при замене всех дуг на рёбра становится связным, т.е. нет изолированных вершин.

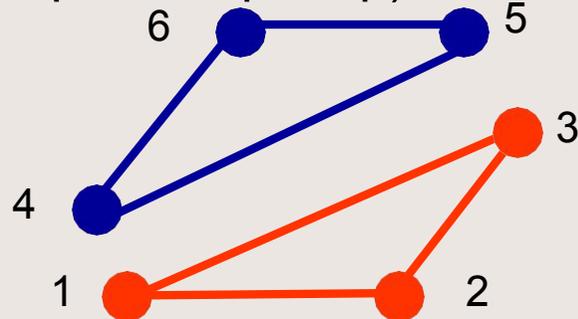
Компоненты связности

Для неориентированных графов отношение **достижимости** является **отношением эквивалентности** (рефлексивно, симметрично и транзитивно).

Это отношение разбивает множество вершин на непересекающиеся подмножества.

Каждое такое подмножество порождает **связный** граф, называемый **компонентой связности** исходного графа.

Компоненты связности не пересекаются (не имеют общих вершин и ребер).



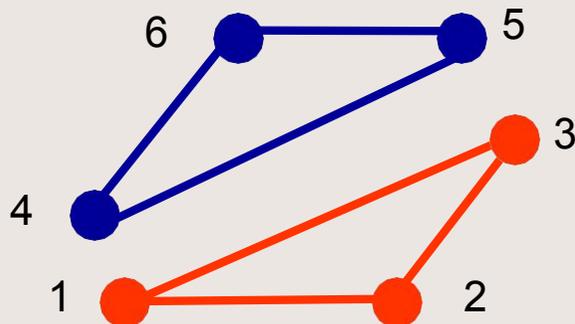
Несвязный граф,

2 компоненты связности:

$\{1,2,3\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\{4,5,6\}, \{(4,5), (4,6), (5,6)\}$

Матрица достижимости несвязного графа



Несвязный граф,
2 компоненты связности:
 $(\{1,2,3\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\})$
 $(\{4,5,6\}, \{(4,5), (4,6), (5,6)\})$

Матрица достижимости

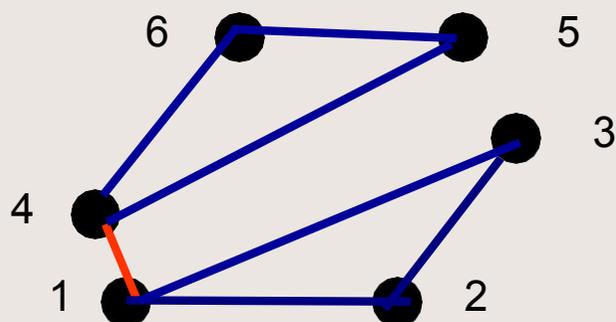
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1
6	0	0	0	1	1	1

Разбивается на 2
матрицы, состоящие
только из 1.

Каждая такая
матрица задает
компоненту
связности.

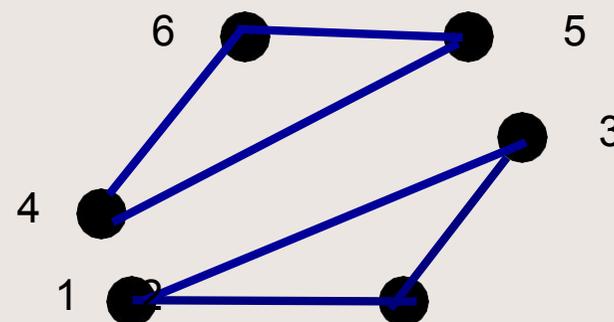
Удаление ребер

При удалении ребра из графа получается граф с теми же вершинами, что и исходный, и теми же ребрами, кроме удаленного ребра.



Исходный граф
 $\{1,2,3,4,5,6\}$
 $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3),$
 $(4,5), (4,6), (6,5)\}$

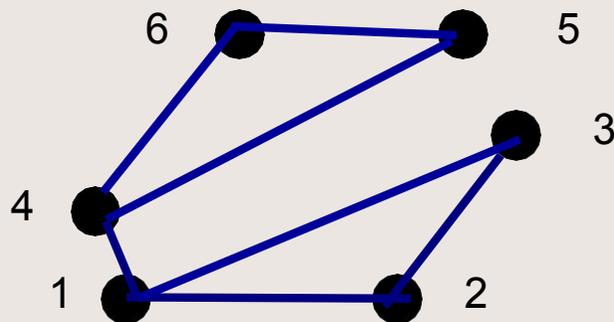
Удаление
ребра
(1,4)



Граф с удаленным ребром
 $\{1,2,3,4,5,6\}$
 $\{(1,2), (1,3), (2,3),$
 $(4,5), (4,6), (6,5)\}$

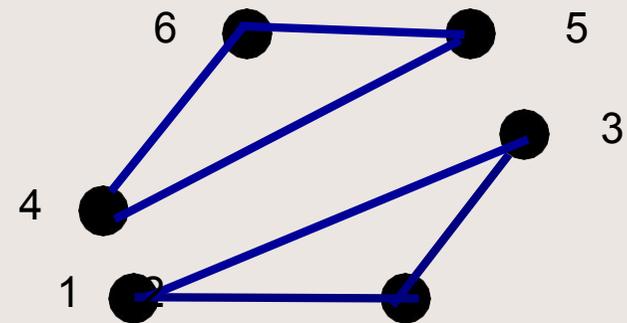
Мост

Ребро (a,b) называется **МОСТОМ** графа G , если в графе, полученном после удаления из G ребра (a,b) , число компонент связности **увеличивается**.



Исходный граф
1 компонента связности

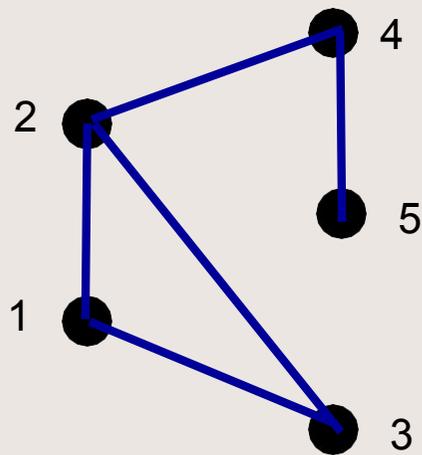
Удаление
ребра
(1,4)



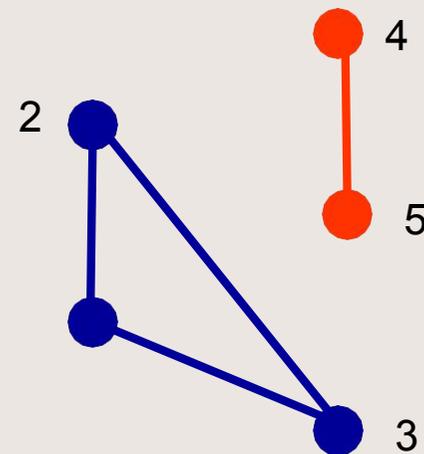
Граф с удаленным ребром
2 компоненты связности

Ребро $(1,4)$ является мостом

Примеры мостов - 1



Исходный граф



Ребро (2,4) является мостом.

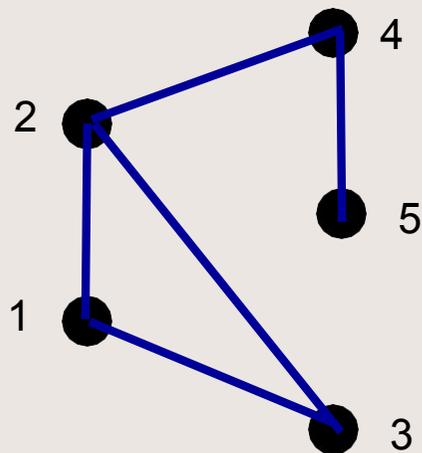
Удаление этого ребра
разбивает связный граф на 2

компоненты связности:

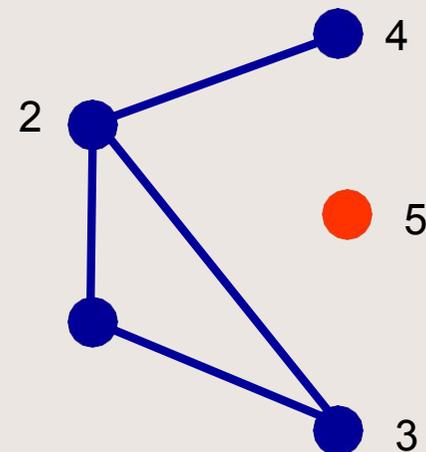
$(\{1,2,3\}, \{(1,2), (1,3), (2,3)\})$ и

$(\{4,5\}, \{(4,5)\})$

Примеры мостов - 2



Исходный граф



Ребро (4,5) является мостом.
Удаление этого ребра разбивает
связный граф на 2 компоненты
связности:

$(\{1,2,3,4\}, \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4)\})$ и
 $(\{5\}, \emptyset)$ – пустой граф O_1

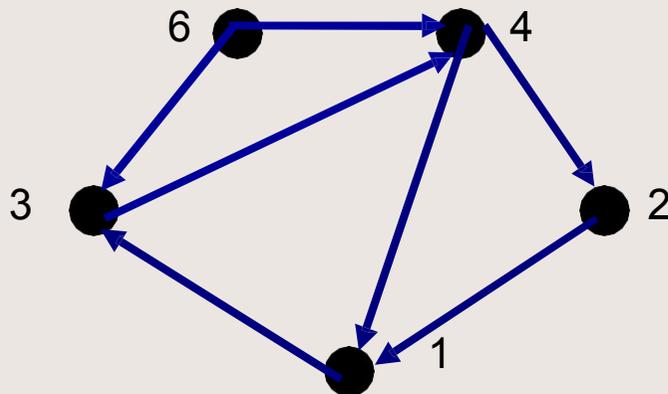
Расстояние в графах

Расстоянием $R(X_i, X_j)$ между вершинами X_i и X_j называется **наименьшая** длина маршрута, соединяющего эти вершины.

Расстояние от вершины до самой себя считается равным **0**.

Если в графе нет маршрута, соединяющего вершины, расстояние между ними считается **бесконечным**.

Для того, чтобы определить расстояние между вершинами, нужно проанализировать **все простые пути** между этими вершинами.



Простые пути из вершины 4 в 3:

(4,1,3) длина пути 2

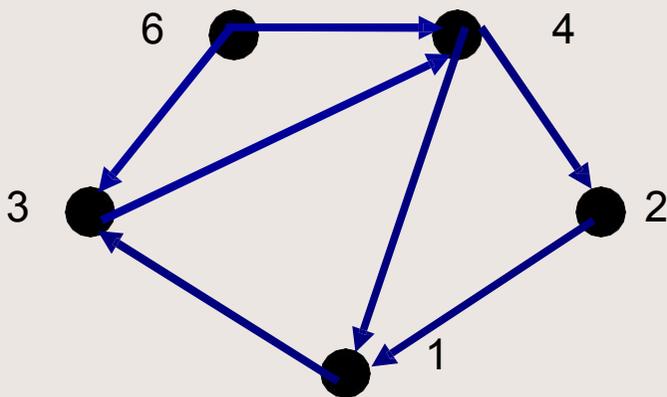
(4,2,1,3) длина пути

3 $R(4,3)=2$

Матрица расстояний

Пусть граф $G=G(V,E)$ содержит n вершин..

Матрица расстояний – квадратная матрица размерности $n*n$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа. Элементами матрицы R_{ij} являются расстояния от вершины X_i до вершины X_j



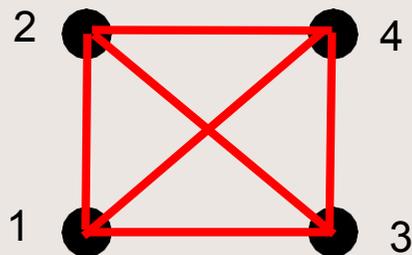
	1	2	3	4	6
1	0	3	1	2	∞
2	1	0	2	3	∞
3	2	2	0	1	∞
4	1	1	2	0	∞
6	2	2	1	1	0

Для **ориентированных** графов матрица расстояний **несимметрична**

Расстояния в пустом и полном графе

В **пустом** графе все расстояния между вершинами **бесконечны** (элементы матрицы расстояний, кроме диагональных, равны бесконечности).

В **полном** графе все расстояния между вершинами равны **1** (все элементы матрицы расстояний, кроме диагональных, равны 1).



	1	2	3	4	e
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1

$$\text{diam}=\text{rad}=1$$

Метрические характеристики графа

Эксцентритетом вершины X_i называется расстояние до наиболее удаленной от нее вершины.

$e(X_i) = \max d(X_i, X)$, где X – множество вершин графа

Диаметром графа называется максимальное из расстояний между его вершинами (максимальный эксцентритет).

$\text{diam} = \max e(X)$, где X – множество вершин графа

Вершина графа, у которой эксцентриситет равен диаметру графа называется **периферийной**.

Простая цепь, расстояние между концами которой равно диаметру графа, называется **диаметральной цепью**.

Метрические характеристики графа

Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют **центральной**.

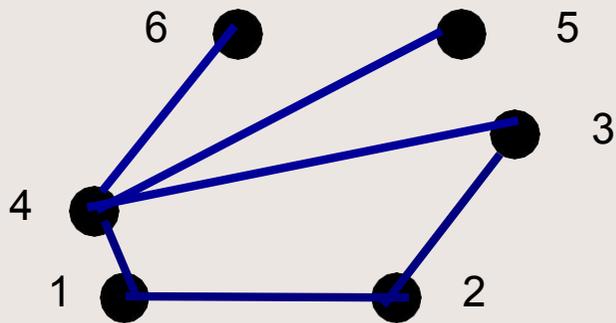
Множество всех центральных вершин называется **центром** графа.

Величина наименьшего эксцентриситета называется **радиусом** графа

$rad = \min e(X)$, где X – множество вершин графа.

Нахождение центра графа полезно для решения задач оптимального размещения предприятий, целью которых является минимизация наиболее дальних расстояний до предприятия. Например, размещение госпиталя в центре объекта уменьшает максимальное расстояние, которое придется преодолевать машинам медицинской помощи.

Пример



Матрица расстояний симметрична, поскольку граф неориентированный

	1	2	3	4	5	6	e
1	0	1	2	1	2	2	2
2	1	0	1	2	3	3	3
3	2	1	0	1	2	2	2
4	1	2	1	0	1	1	2
5	2	3	2	1	0	2	3
6	2	3	2	1	2	0	3

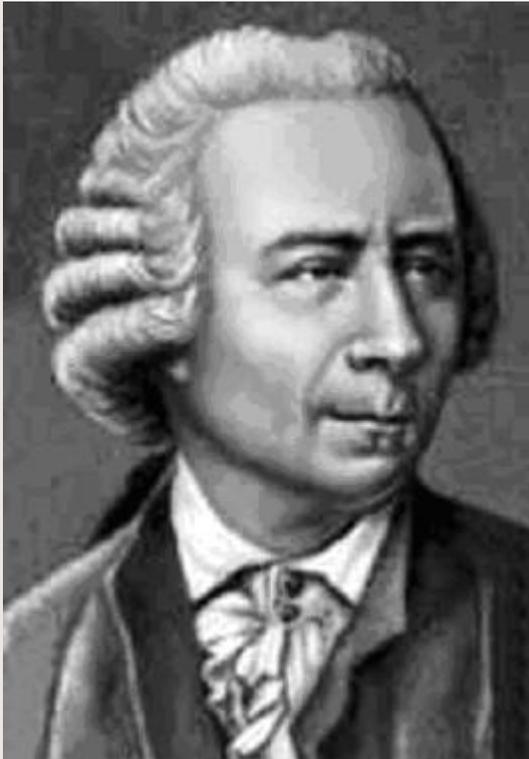
$$\text{diam} = \max e(X) = 3$$

$$\text{rad} = \min e(X) = 2$$

Центр графа – вершины с минимальным эксцентритетом

{1, 3, 4}

Эйлеровы графы



Леонард Эйлер
(1707-1783)

Статья Леонарда Эйлера 1736 года «Решение вопроса, связанного с геометрией положения» положила начало теории графов как математической дисциплине. Поводом для исследования послужила задача о семи мостах Кёнигсберга.

Эйлеровы графы

Путь (цикл) называется **эйлеровым**, если он проходит по одному разу через каждое ребро графа G .

Граф G называется **эйлеровым**, если он содержит эйлеров цикл.

Теорема 4. Для того, чтобы связный граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.

Теорема 5. Для того, чтобы связный граф обладал эйлеровым путем, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.

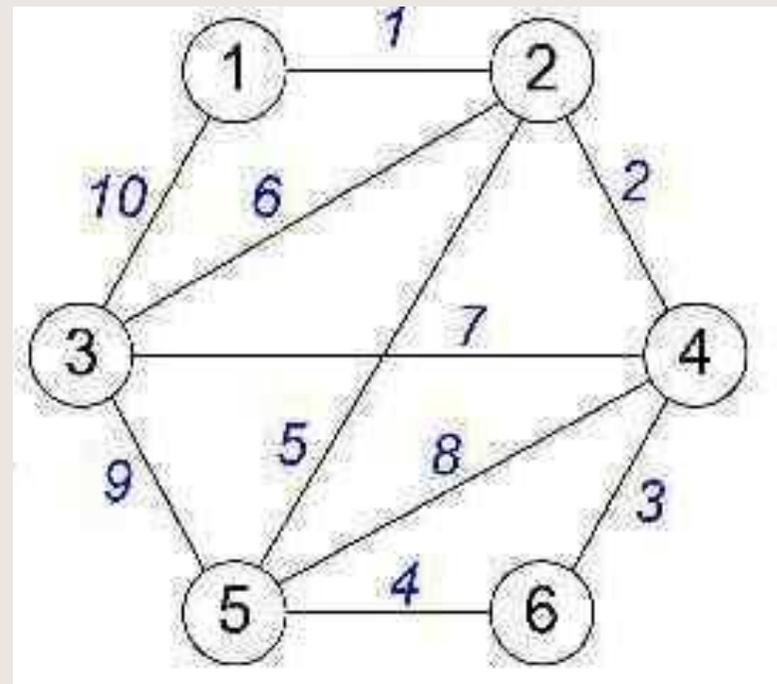
Эти вершины являются началом и концом пути.

Эйлеровы графы

На рисунке показан эйлеров цикл:
номера на ребрах –
пример правильного
обхода.

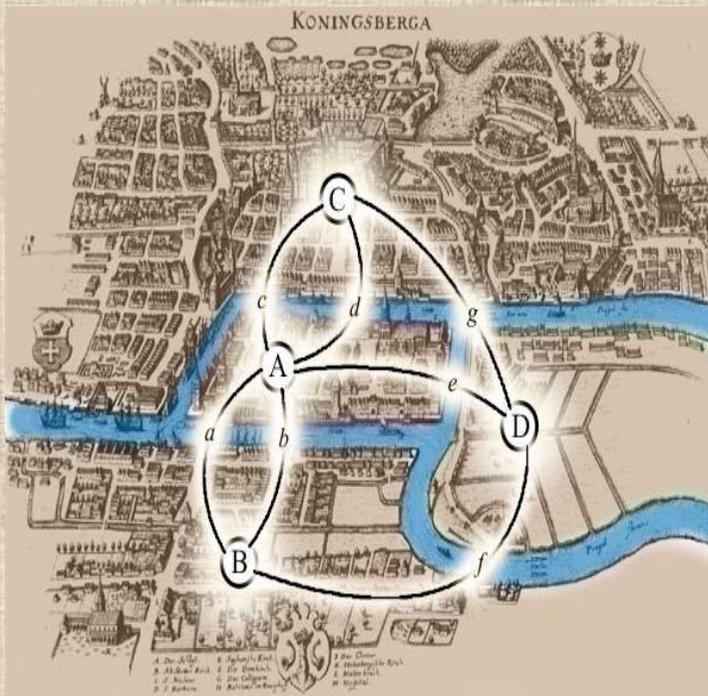
Пример неправильного
начала обхода:

1 – 2 – 3 – 1 - ???



Эйлеровы графы

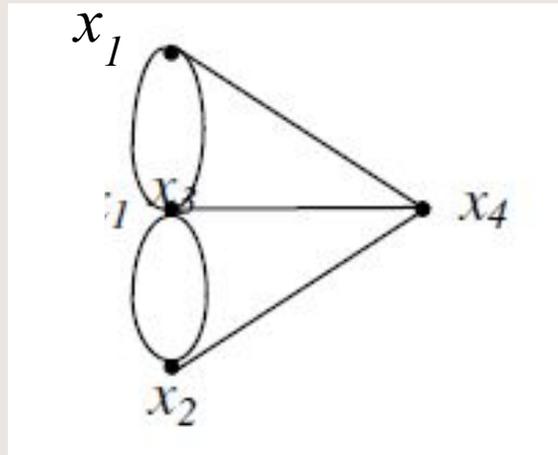
Решение задачи о Кенигсбергских мостах



Кенигсберцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз.

Эйлеровы графы

Поставим в соответствие схеме центральной части города Кенигсберг граф G , в котором каждой части суши



соответствует вершина, а каждому мосту – ребро, соединяющее соответствующие вершины. На языке теории графов задача формулируется следующим образом: найти эйлеров цикл в графе G .

Воспользуемся теоремой 4. Определим степени вершин графа G : $deg(x_1)=3$, $deg(x_2)=3$, $deg(x_3)=5$, $deg(x_4)=3$.

Таким образом, необходимое и достаточное условие существования эйлерова цикла в графе не выполнено, следовательно, граф не обладает эйлеровым циклом.

Эйлеровы графы

Исходя из теорем 4 и 5, чтобы найти в графе эйлеров путь (цепь) необходимо соединить две вершины с нечетными степенями фиктивным ребром. Тогда задача сводится к нахождению в графе эйлерова цикла по алгоритму, приводимому ниже. После чего из найденного цикла удаляется фиктивное ребро, тем самым находится искомым эйлеров путь (цепь).

Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе

Рассмотрим связный граф G с четными степенями вершин.

1. Выделим из G цикл μ_1 (т.к. степени вершин четные, то висячие вершины отсутствуют). Положим $i=1$, $G' = G$.

2. Удалим из G' ребра, которые принадлежат циклу μ_1 . Полученный граф обозначим снова G' . Если в G' есть ребра, то выделяем из G' цикл μ_{i+1} и переходим к шагу 3. Если в G' ребер нет, то переходим к шагу 4.

Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе

3. Присваиваем $i=i+1$ и переходим к шагу 2.

4. По построению выделенные циклы содержат все ребра по одному разу. Если $i=1$, то эйлеров цикл найден (конец работы алгоритма). В противном случае находим циклы, содержащие хотя бы по одной общей вершине (в силу связности графа это всегда можно сделать). Склеиваем эти циклы.

Повторяем эти операции до тех пор, пока не останется один цикл, который и является искомым.

Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе

Пример нахождения эйлерова цикла в графе будет отдельно рассмотрен в разделе «Примеры решения типовых задач» в индивидуальном задании по теме «Связные графы».

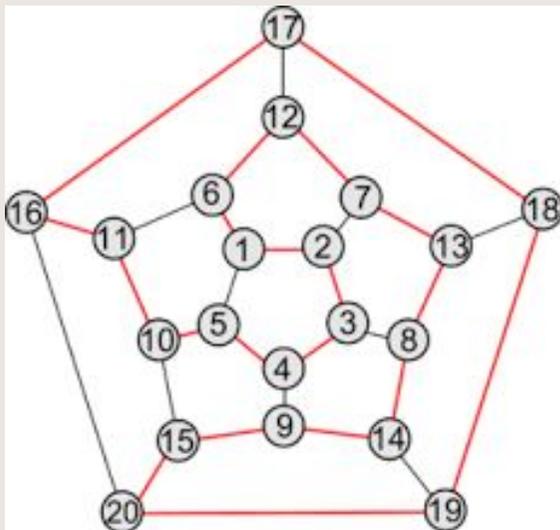
Гамильтоновы графы



**Уильям Роуэн
Гамильтон
(1805-1865)**

В 1859 году ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие». Она включала додекаэдр – правильный многогранник, 12 граней которого представляли собой равные правильные пятиугольники.

Гамильтоновы графы



Додекаэдр на плоскости изображается так, как показано на рисунке.

В каждой из 20 вершин тела просверливалась дырка, в которую вставлялся колышек, изображавший город (столицу).

Используя веревку, требовалось найти путь через города, посетив каждый город один раз и вернуться в исходный город.

На языке теории графов задача сводится к нахождению в графе простого цикла, проходящего через каждую вершину.

Гамильтоновы графы

Простой путь (цикл) называется **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**, если он проходит через каждую вершину графа G .

Граф G называется **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**, если он содержит гамильтонов цикл.

Следует отметить, что простое необходимое и достаточное условие существования гамильтонова цикла неизвестно. Однако имеется класс графов, в которых заведомо существуют гамильтоновы пути и циклы – это полные графы.

Очевидным простейшим необходимым условием существования гамильтоновых путей и циклов в простом графе является его связность.

Если неориентированный граф G содержит гамильтонов цикл, тогда в нём не существует ни одной вершины X_i , степень которой $deg(X_i) < 2$.