Лекция 1. Системы линейных алгебраических уравнений

Мустафина Ляззат Мухамеджановна

Доцент кафедры Высшая математика

План лекции

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Определители. Формулы Крамера
2. Матричный способ решения систем линейных уравнений
3. Ранг матрицы.
4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Определители	Матрицы	
$m=n$	$m=n$	m может быть $\neq n$
Формулы Крамера	***Матричный способ***	***Метод Гаусса***

Определители: $m=n$ — *Формулы Крамера*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ единств. решение

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ – ***формулы Крамера***

2. $\Delta = 0$ и $\Delta_i \neq 0 \Rightarrow$ **нет решений**.

3. $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = 0 \Rightarrow$

бесчисл.множ. реш. или нет решений.

Матрицы: $m=n$ — *Матричный способ*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение:

$$A \cdot X = B.$$

$\Delta(A) = det(A) \neq 0.$ существует A^{-1}.

Решение.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Матрицы: m может быть $\neq n$ — *Метод Гаусса*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

I этап (прямой ход):

Теорема Кронекера-Капелли:

1. $rang(A) = rang(\overline{A}) = n \Rightarrow$ единств. решение
2. $rang(A) = rang(\overline{A}) \neq n \Rightarrow$ бесчисл.множ. реш.
3. $rang(A) \neq rang(\overline{A}) \Rightarrow$ нет решений.

II этап (обратный ход): если система совместна, найти все ее решения.

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера

Определение 1. Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 2. Решением системы (1) называется совокупность чисел

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ \ldots, \quad x_n = \alpha_n,$$

которые при подстановке в систему все уравнения обращают в тождества.

Примеры:

$$а)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 = -1 \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases} \qquad в)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

1.1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

С помощью исключения неизвестных, систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} (a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{cases}.$$

Если ввести обозначения

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = b_2 c_1 - b_1 c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Система перепишется в виде:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи решения этой системы:

1. если $\Delta \neq 0$ - система имеет единственное решение.

Решение находится по *формулам Крамера*: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}.$

2. если $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ - система не имеет решений.

3. если $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ - система имеет бесчисленное множество решений.

Определение 1. ***Определителем второго порядка*** называется число, получающееся из квадратной таблицы, по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - (-5) \cdot 3 = -8 + 15 = 7$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - (-6) \cdot (-3) = 14 - 18 = -4$

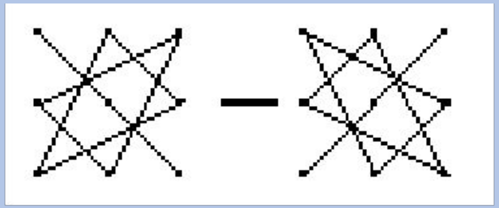
1.2. Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Определение 2. ***Определителем третьего порядка*** называется число, получающееся из квадратной таблицы, по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}\right)$$

Вычисления проводят по схеме: 

Пример 3.
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot(-3)+(-5)\cdot(-1)\cdot 6+3\cdot 2\cdot 1-$$

$$-(6\cdot 4\cdot 1+3\cdot(-5)\cdot(-3)+2\cdot(-1)\cdot 2) = -24+30+6-(24+45-4) = 12-65 = -53$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Положим $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

2. Матричный способ решения систем линейных уравнений

Определение 1. Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из $m \times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах.

Обозначаются матрицы, как правило, большими буквами $A, B, C, \ldots$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ или $A = \left(a_{ij}\right) \sim m \times n$

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ имеет размерность 2×3: 2 строки и 3 столбца.

2.1. Виды матриц

1) *Квадратная матрица.* Матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов, размерности $n \times n$, называется *квадратной матрицей* порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы A называются *диагональными элементами* (или говорят, что они лежат на главной диагонали матрицы).

2) *Матрица – строка* - это матрица размера $1 \times n$

$$A = (a_{11}, \ldots, a_{1n}).$$

3) *Матрица – столбец* - это матрица размера $m \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

4) *Треугольная матрица* – это квадратная матрица, в которой элементы, расположенные под диагональю (или над диагональю), равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) *Нулевая матрица* - это матрица, все элементы которой равны нулю. Нулевая матрица обозначается символом O.

6) *Единичная матрица.* Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные – нулю, называется единичной и обозначается E или E_n, где n ее порядок. Таким образом,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0... & 0 \\ 0 & 1... & 0 \\ 0 & 0... & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Две матрицы называются *равными*, если

1) матрицы имеют одинаковые размерности;

2) элементы, стоящие на соответственных местах этих матриц, равны.

2.2. Действия над матрицами

1) Умножение матрицы на число

Определение 3. Чтобы умножить число α на матрицу A или матрицу A на число α, нужно умножить на α все элементы матрицы A. Очевидно, $\alpha A = A\alpha$.

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Найти матрицы 2A, -3A.

2). Сложение матриц

Определение 4. Суммой двух матриц $A=(a_{ij})\sim m\times n$ и $B=(b_{ij})\sim m\times n$ одной размерности называется матрица $C=(c_{ij})\sim m\times n$ той же размерности (обозначается $C=A+B$), элементы которой определяются равенствами:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n\,.$$

Пример 5. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы *A+B, A-B, 2A-3B.*

3) Умножение матриц

Определение 5. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}.$$

Положим $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *произведением* А на B и обозначается АВ.

Замечание. Размерность произведения матриц можно определить по правилу, которое в дальнейшем будет называться *правилом умножения размерностей:* $(m\times p)(p\times n)=m\times n$.

Пример 6. Пусть $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц A·B и B·A.

Таким образом, мы можем сделать важный вывод: *при перемножении матриц нельзя менять порядок сомножителей* (произведение матриц не коммутативно).

Пример 7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти произведение A·B.

4) Транспонирование матриц

Рассмотрим произвольную матрицу $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$	*Определение 6.* Матрица $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, получающаяся из A заменой строк столбцами, называется *транспонированной* к A.

Пример 8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^T.

5) Нахождение обратных матриц

Определение 7. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если имеет место равенство: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$

Определение 8. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной в противном случае.

Теорема 1. Для того чтобы матрица $A = (a_{ij})$ имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. При этом обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(\tilde{A})^T, \text{ где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ называется *присоединенной*, элементами этой матрицы являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

Находить обратную матрицу будем по схеме:

1. Размерность $n \times n$ - квадратная матрица

2. $\Delta(A) = detA \neq 0$ - невырожденная матрица

3. Найти матрицу $\widetilde{A}$ - присоединенная матрица

4. Найти матрицу $\left(\widetilde{A}\right)^T$ - транспонированная матрица

5. Записать матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}(\widetilde{A})^T$

2.3. Решение систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными матричным способом

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Введем три матрицы для системы (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрица A, составленная из коэффициентов системы, называется *матрицей системы*.

X - матрица-столбец неизвестных;

B - матрица-столбец свободных членов.

Тогда, используя правило умножения матриц, систему можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Если $\Delta(A) = det(A) \neq 0.$ Тогда матрица A имеет обратную. Следовательно, решение системы запишется в виде $X = A^{-1} \cdot B.$

Действительно, умножая матичное уравнение $A \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$ на обратную матрицу A^{-1} слева, получим

$$A^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = A^{-1} \cdot \mathrm{B} \Rightarrow \quad \mathrm{E} \cdot \mathrm{X} = A^{-1} \cdot \mathrm{B} \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot \mathrm{B}$$

Такой способ решения системы линейных уравнений называется *матричным.*

3. Ранг матрицы

Минором k-го *порядка матрицы* A называется определитель, образованный элементами, расположенными на пересечении каких-либо k строк и каких-либо k столбцов.

Пусть A - матрица размера $m \times n$. Если матрица A нулевая, то ее ранг равен нулю. Если матрица A ненулевая, то ее *рангом* называется наибольший порядок r минора, отличного от нуля.

Ступенчатой матрицей будем называть матрицу, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1) все нулевые строки находятся ниже всех ненулевых;

2) у каждой ненулевой строки, кроме первой, число нулевых элементов, предшествующих первому ненулевому, больше, чем у предыдущей строки.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Элементарные преобразования матрицы:

1) перестановку строк;

2) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;

3) сложение строк;

4) те же операции со столбцами.

Матрицы, полученные одна из другой элементарными преобразованиями, называются *эквивалентными*.

Эквивалентность матриц A и B обозначается символом ~: $A \sim B$.

Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = (A \mid B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае.

Определение 4. Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной* в противном случае.

Определение 5. Две системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

В методе Гаусса 2 этапа.

I этап (прямой ход): пользуясь теоремой Кронекера-Капелли, выяснить совместность или несовместность системы, ее определенность или неопределенность.

II этап (обратный ход): если система совместна, найти все решения системы.

Теорема (Кронекера-Капелли). Для того чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$: $rang(A) = rang(\overline{A})$

При этом будем различать случаи:

1. система имеет единственное решение, если $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$;

2. система имеет бесчисленное множество решений, если $rang(A) = rang(\overline{A}) \neq n$;

3. система не имеет решений, если $rang(A) \neq rang(\overline{A})$.

Здесь n - число неизвестных системы.

Контрольные вопросы и задания

1. Вычислить определители: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Можно ли сказать, чему равны определители, не вычисляя их:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$. Поясните ответ.

3. В силу какого свойства определитель $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$ равен нулю?

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C= 2A-3B$.

5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Можно ли умножить матрицу B на матрицу A. Если да, найдите матрице $D=BA$.

6. Возможно ли, найти обратные матрицы для матриц: $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$? Ответ поясните.

7. Чему равен ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$?

8. Запишите формулы Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными.

9. Как записывается решение системы при решении ее матричным способом?

10. Сколько решений имеет система, если выполнено условие: $rang(A)=rang(\overline{A})\neq n$?

11. Какая система уравнений называется определенной?

12. Какая система уравнений называется совместной?

13. Какая система уравнений называется однородной?

Список рекомендуемой литературы

1. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2016.

2. Мустафина Л.М., Яруллина А.Р. Индивидуальные задания по высшей математике для самостоятельной работы студентов технических специальностей. Часть 1 (Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений. Элементы векторного анализа. Элементы аналитической геометрии). Изд-во КарТУ, Караганда, 2021.