§14. Линейные операторы

п.1. Основные определения.

Оператором называется закон, по которому каждому вектору x пространства $\mathbf{R}^n$ ставится в соответствие единственный вектор y пространства $\mathbf{R}^m$.

Обозначается:

$$y = A(x), \quad A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

Вектор y называется образом вектора x.

Вектор x называется прообразом вектора y.

Пример.

$$A:(x_1,x_2)\to(x_1^2,x_2^2,x_1^2+x_2^2),$$

$$(2,-1)\to(4,1,5).$$

$$A:(x_1,x_2,x_3)\to(x_1,x_2).$$

$$(1,2,6)\to(1,2).$$

Оператор называется линейным, если для любых векторов x и y пространства $\mathbf{R}^n$ и любого числа λ выполняются соотношения:

1) Свойство аддитивности:

$$A(x+y)=A(x)+A(y).$$

2) Свойство однородности:

$$A(\lambda x)=\lambda A(x).$$

Пример. Будет ли указанный оператор линейным?

$$A:(x_1,x_2)\to(x_1^2,x_2^2,x_1^2+x_2^2).$$

Пусть $x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2).$

Тогда

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2),$$

$$A(x+y)=((x_1+y_1)^2,(x_2+y_2)^2,(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2),$$

$$A(x)+A(y)=(x_1^2,x_2^2,x_1^2+x_2^2)+(y_1^2,y_2^2,y_1^2+y_2^2)=$$

$$=(x_1^2+y_1^2,x_2^2+y_2^2,x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2).$$

Значит, оператор A не является линейным.

Пример. Будет ли указанный оператор линейным?

$$A:(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3).$

Тогда

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$A(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$A(x) + A(y) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

Свойство аддитивности выполняется.

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

$$A(\lambda x) = (\lambda x_1, \lambda x_2),$$

$$\lambda A(x) = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Свойство однородности выполняется.

Значит, оператор A является линейным.

В дальнейшем будем рассматривать линейные операторы

$$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Матрица оператора

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — базис пространства $\mathbf{R}^n$.

Тогда для любого вектора

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Если $y = A(x)$ — линейный оператор, то

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n) = \\ &= A(x_1 e_1) + A(x_2 e_2) + ... + A(x_n e_n) = \\ &= x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + ... + x_n A(e_n). \end{aligned}$$

Так как

$$A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n) \in \mathbf{R}^n,$$

то

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n,$$
$$A(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n, \dots,$$
$$A(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n.$$

Поэтому

$$A(x) = x_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n) + \dots +$$
$$+ x_n(a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n)e_1 + \dots +$$
$$= (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n. \quad (1)$$

С другой стороны, т.к. $y \in \mathbf{R}^n$, то

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n, \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора $y = A(x)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Любой линейный оператор $y = A(x)$ можно записать с помощью матричного уравнения

$$Y = AX.$$

Замечание. Для того, чтобы найти матрицу линейного оператора, достаточно найти образы базисных векторов.

Пример. Найти матрицу линейного оператора

$$A:(x_1,x_2,x_3)\to(2x_1,-x_2,x_1+x_3)$$

в базисе $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).$

Решение.

$$A(1,0,0)=(2,0,1),\ A(0,1,0)=(0,-1,0),\ A(0,0,1)=(0,0,1).$$

Значит, матрица оператора имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Связь между матрицами оператора в разных базисах

<u>Теорема</u>. Матрицы A и A^* линейного оператора в разных базисах связаны соотношением

$$A^* = C^{-1}AC,$$

где C — матрица перехода от старого базиса к новому.

Пример. Матрица линейного оператора в базисе e_1, e_2 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e_1 - 2e_2, 2e_1 + e_2.$$

Решение. Матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$A^{*}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}.$$