Понятие действительного числа

Числовые множества

Обозначение	Название множества
N	Множество натуральных чисел
Z	Множество целых чисел
Q=m/n	Множество рациональных чисел
I=R/Q	Множество иррациональных чисел
R	Множество действительных чисел

1. Множество натуральных чисел

N = {1; 2; 3;…}

Натуральные числа - это числа счета.

- сумма и произведение нат. чисел являются числами натуральными

7 + 7 = 14

12 – 7 = 5

7 – 7 =0

7 – 12 = -5

- разность и частное – <u>могут не быть</u> натуральными числами

2. Множество целых чисел

$Z = \{\ldots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

- сумма, разность и произведение целых чисел всегда являются целыми числами
- частное – может не быть

$5 + (-7) = -2$

$-7 - 7 = -14$

$7 \cdot (-12) = -5$

$-7 : (-7) = 1$

$5 : (-7) = \frac{-5}{7}$

3. Множество рациональных чисел

$$Q=\{\frac{m}{n};m\in Z,n\in N\}$$

- сумма, разность, произведение и частное (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда являются рациональными числами.

4. Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби

Целое число	Конечная десятичная дробь	Бесконечная периодическая десятичная дробь
$\frac{360}{30}=12$	$\frac{m}{10^k}$; где **m** – целое число, **k** – натуральное число $\frac{275}{100}=2{,}75$	$\frac{29}{9}=3{,}222...=3{,}(2)$
Период равен нулю 12, 000…= 12,(0)	**Период равен нулю 2,75000…=2,75(0)**	**Период равен 2**

5. Справедливо и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом

4. Множество иррациональных чисел

Числа, которые представляются бесконечной **непериодической дробью**, будем называть **иррациональными.**

Множество иррациональных чисел обозначим I.

Для **иррациональных чисел нет единой формы** обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это число π и e.

$\pi \approx 3.14159 \quad e \approx 2{,}7182818284$

5. Множество действительных чисел

Множество действительных (вещественных) чисел состоит из множества рациональных и множества иррациональных чисел. Оно обозначается буквой R , а также его можно записать как (-∞; +∞).

Можно записать так, что R есть объединение двух множеств: рациональных и иррациональных чисел:

$$R = Q \cup I .$$

Примеры действительных чисел:

$7,\ 2038,\ -24, \frac{2}{9},\ -53\frac{12}{47},\ -3{,}15,\ 0{,}36(142)\ -19{,}75283584...,\ e,\ \pi,$
$\sqrt{10}$

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа а, называется неотрицательное действительное число:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

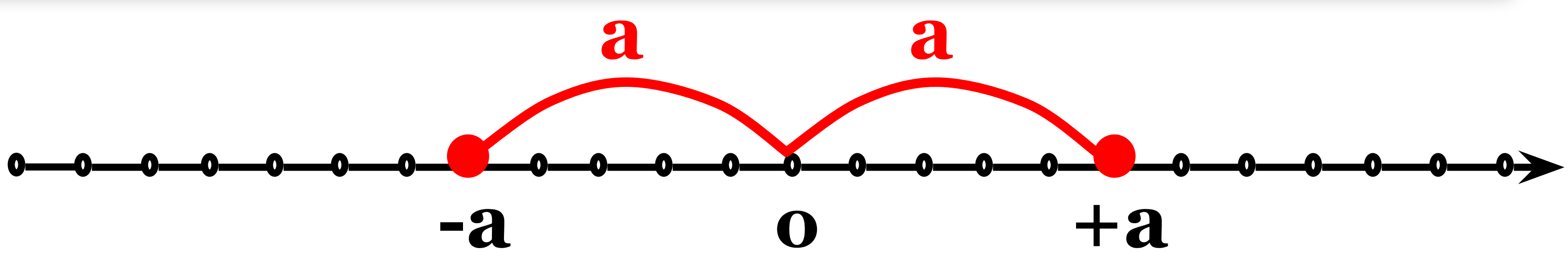
Примеры.

$$|5| = 5$$

$$|-5| = 5$$

Геометрическое истолкование

Модуль действительного числа а есть расстояние (в единичных отрезках) от точки с координатой а на числовой оси до начала координат.



$$|-a| = a$$

$$|a| = a$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Например,

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36\cdot(-1)} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью является число -1:

$$i^1 = i; \quad i^2 = -1;$$

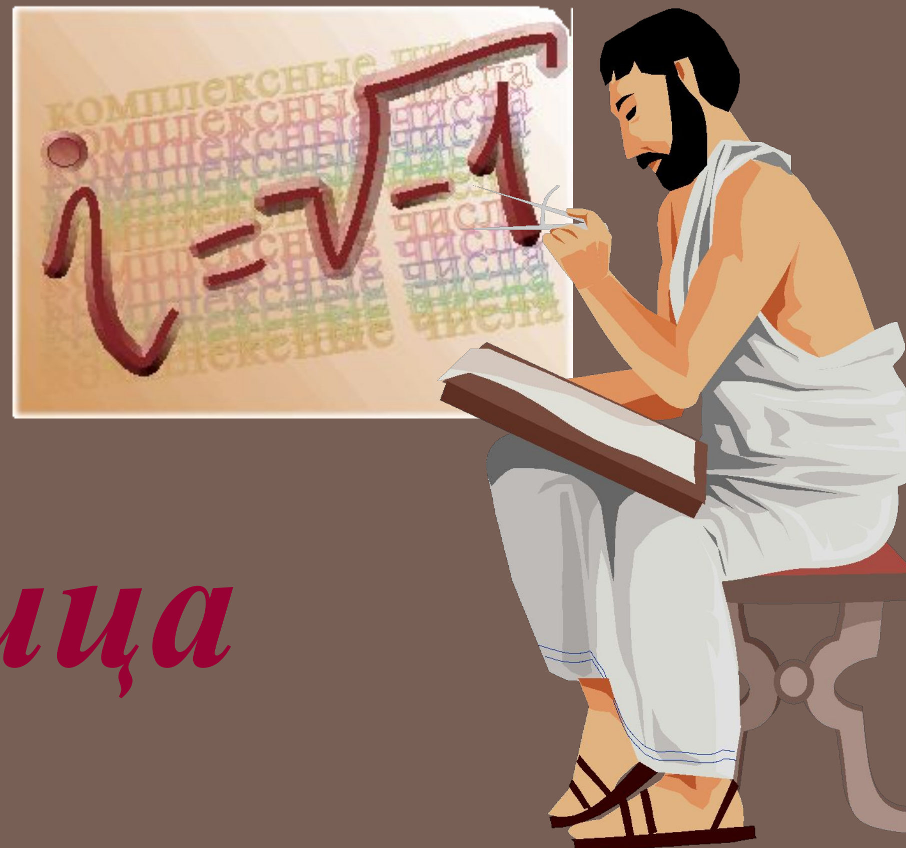
$$i^3 = -i; \quad i^4 = 1$$

При любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i.$$

Мнимая единица



i **– начальная буква французского слова imaginaire – «мнимый»**

Компле́ксные числа

Определение 1. **Числа вида *a + bi*, где *a* и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, называются *компле́ксными*.**

a **– действительная часть компле́ксного числа,**
b **– мнимая часть компле́ксного числа.**

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\, b = d.$$

Множество комплексных чисел обозначается буквой С.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Найти x и y из равенства:

$$2y + 4xi = 13 - 6i$$

Решение.

Используя условие равенства комплексных чисел имеем

$2y = 13$, $4x = -6$, тогда

$$\boxed{x = -1{,}5; \quad y = 6{,}5.}$$

Арифметические операции с мнимыми числами

$$ai+bi=(a+b)i; \qquad ai-bi=(a-b)i;$$

$$a(bi)=(ab)i; \qquad (ai)(bi)=abi^2=ab(-1)=-ab$$

a **и** ***b*** **— действительные числа.**

$$3i+12i=(3+12)\cdot i=15i$$

$$3i\cdot 12i=(3\cdot 12)(i\cdot i)=36\cdot i^2=-36$$

$$i^7=\left(i^2\right)^3\cdot i=(-1)^3\cdot i=-i$$

Арифметические операции над комплексными числами

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Арифметические действия

$$(3-4i)+(-5+7i)=-2+3i;$$

$$(3-4i)\cdot(-5+7i)=3\cdot(-5)-(-4)\cdot 7+(3\cdot 7+(-4)\cdot(-5))i=13+41i;$$

$$\frac{-5+7i}{3-4i}=\frac{(-5+7i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}=\frac{-43+i}{25}=-\frac{43}{25}+\frac{1}{25}i;$$

$$(1+i)^4=(1+i)^2\cdot(1+i)^2=(1+2i-1)^2=(2i)^2=-4$$

Сложение и вычитание

$z_1 = 12 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$.

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

а) $z_1 + z_2 = (12 + 3i) + (5 - 7i) = (12 + 5) + (3i - 7i) = \underline{17 - 4i;}$

б) $z_1 - z_2 = (12 + 3i) - (5 - 7i) = (12 - 5) + (3i + 7i) = \underline{-7 + 10i;}$

Умножение

$$(a+bi)\,(c+di) =$$

$$= ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$$

$$-1$$

Деление

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{2+3i}{5-7i}\cdot\frac{5+7i}{5+7i} = \frac{-11+29i}{74} = \boxed{-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i}$$

Выполните действия:

$$(2 + 3i)(5 - 7i) =$$

$$= (10+21) + (-14+15)i = 31+i$$

$$(5 + 3i)(5 - 3i) = 25-9i^2 = 34$$

$$(2 - 7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45-28i$$

Сопряженные комплексные числа

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному.

Если данное комплексное число обозначается буквой *z*, то сопряженное число обозначается $\overline{z}$

$$z = x + yi; \overline{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа *a* + *bi* и *a* - *bi* называются сопряженными комплексными числами.

Свойство сопряженных комплексных чисел

Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$

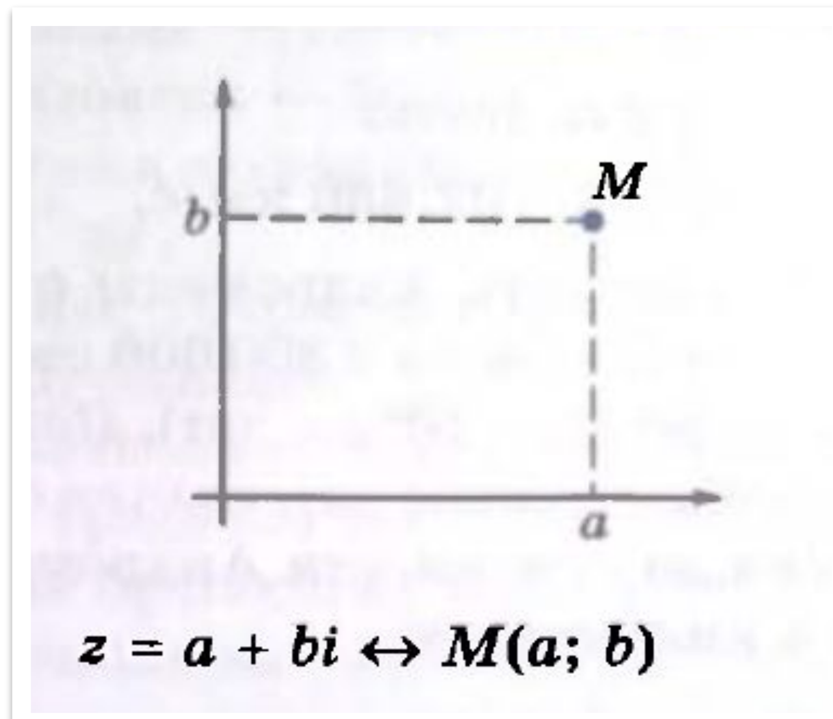
$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

Для комплексных чисел существует несколько форм записи:

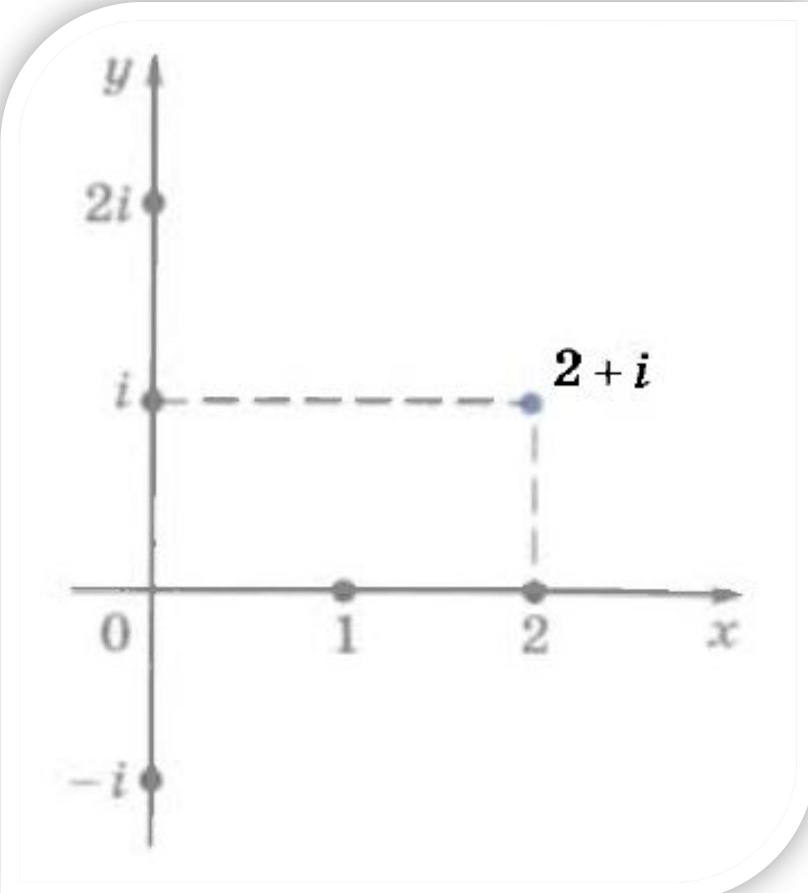
- **алгебраическая форма записи,**
- **тригонометрическая форма записи,**
- **экспоненциальная (показательная) форма записи.**

Геометрическое изображение комплексных чисел

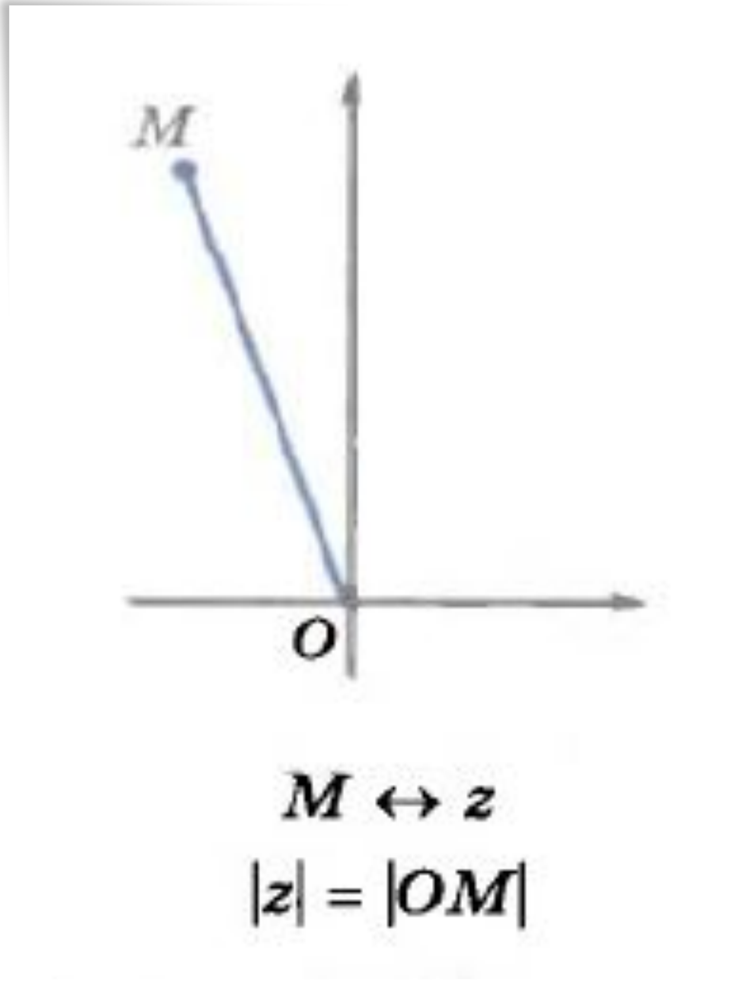
Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).



Геометрическое изображение комплексных чисел



Геометрическое изображение комплексных чисел



Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

равное расстоянию от точки М до начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$