

# Многогранники

---

10 класс. Геометрия

---

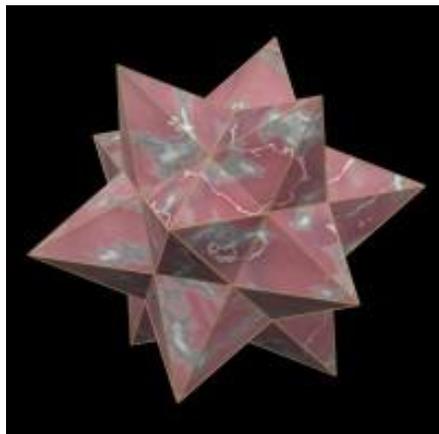
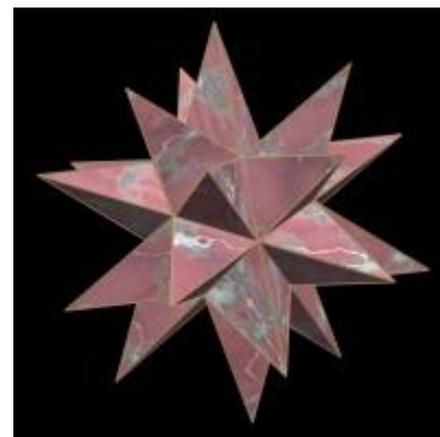
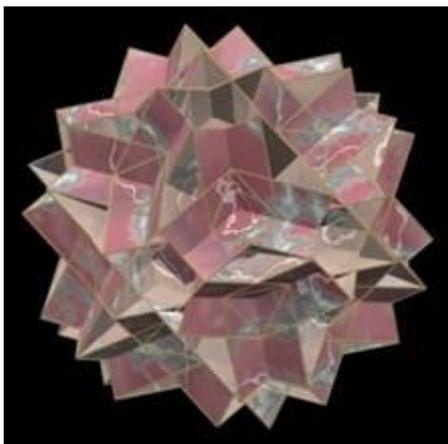
Урок 1

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ**

---

# *Многогранники*

---



# Цель урока

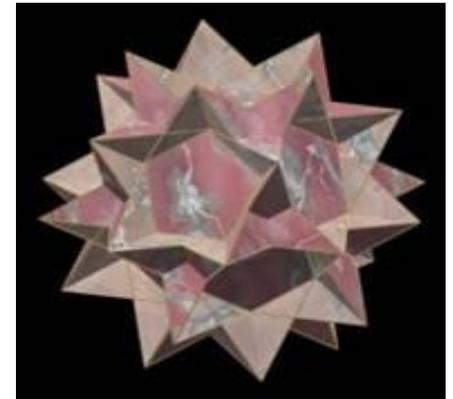
---

- Сформулируй для себя цели сегодняшнего урока.
-

---

**«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг - геометрия»**

**Ле Корбюзье**



---

Для общего развития Посмотри в интернете, кто такой Ле Корбюзье

---

Многоугольником называется  
плоская фигура, ограниченная  
отрезками прямых

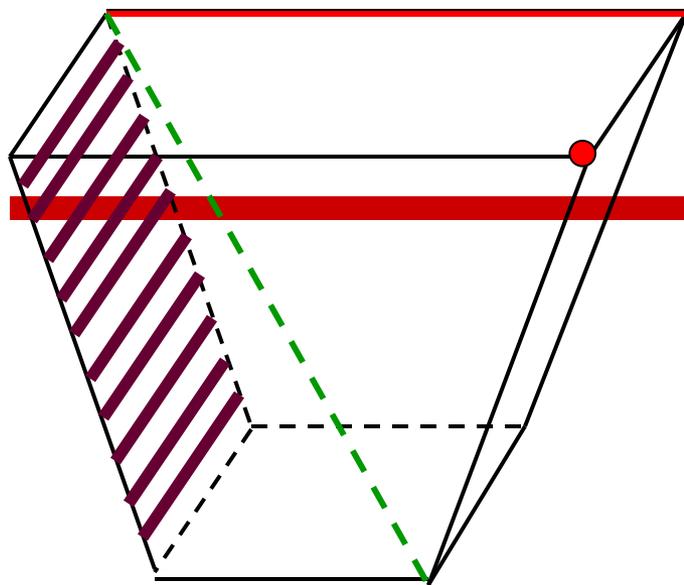
По аналогии, многогранник можно  
определить как часть пространства,  
ограниченную плоскими  
многоугольниками

---

# Хочу добавки

---

- Если данного объяснения тебе недостаточно, посмотри короткий видео-урок по ссылке
  - <https://resh.edu.ru/subject/lesson/6018/main/221554/>
  - В этой же ссылке для закрепления темы можно пройти тренировочные задания
-



## Многогранником

называется тело,  
поверхность которого  
состоит из конечного  
числа  
многоугольников,  
называемых гранями.

Стороны и вершины этих  
многоугольников

называются ребрами и вершинами.  
Отрезки, соединяющие вершины  
многогранника, не принадлежащие  
одной грани, называются диагоналями.

---

# многогранники

---

**Однородные  
выпуклые**

**Однородные  
невыпуклые**

**Тела  
Платона**

**Тела  
Архимеда**

**Выпуклые  
призмы и  
антипризмы**

**Тела  
Кеплера-  
Пуансо**

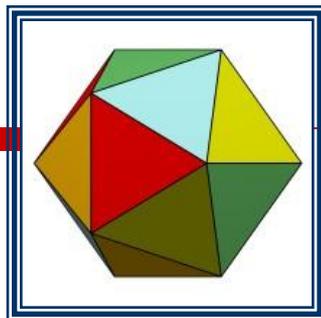
**Невыпуклые  
призмы и  
антипризмы**

**Невыпуклые  
полуправильные  
однородные  
многогранники**

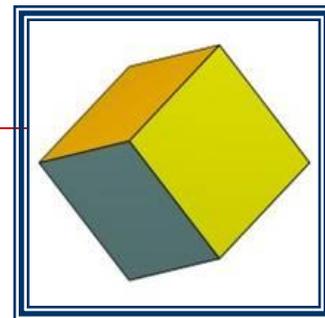
---

# Правильные многогранники

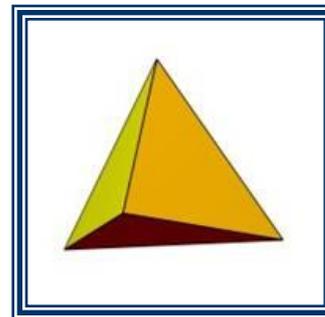
**Правильными многогранниками называют выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причём грани – правильные многоугольники одного типа**



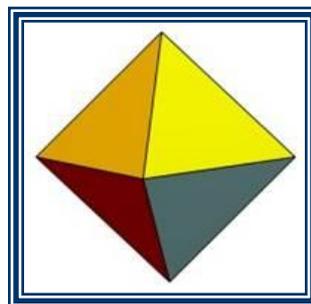
Икосаэдр



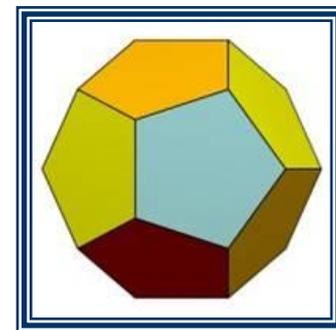
Гексаэдр



Тетраэдр



Октаэдр



Додекаэдр

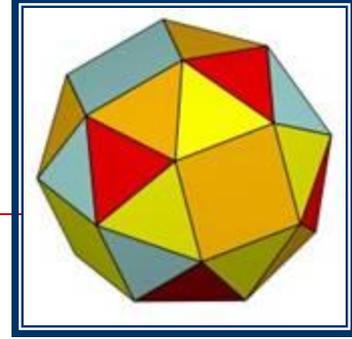
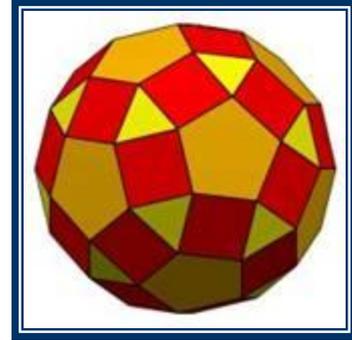
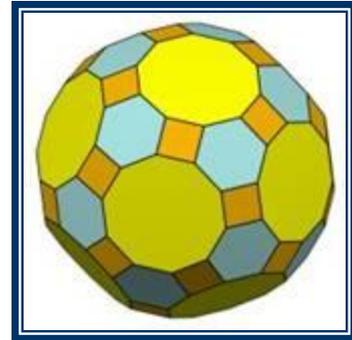
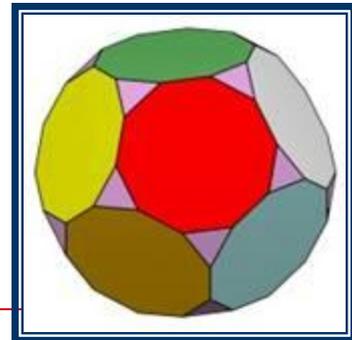
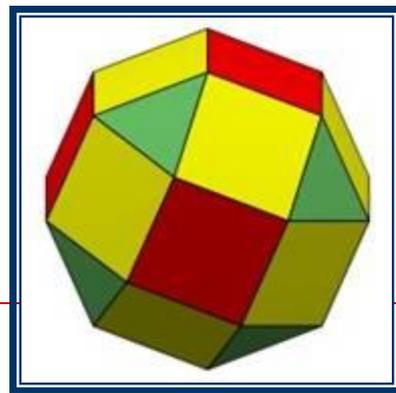
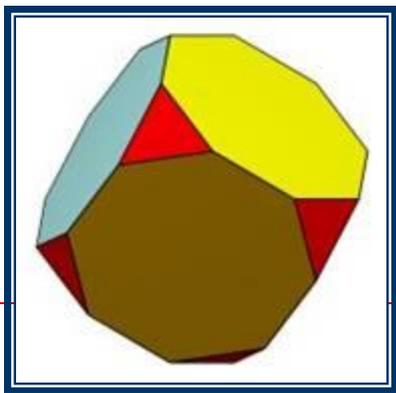
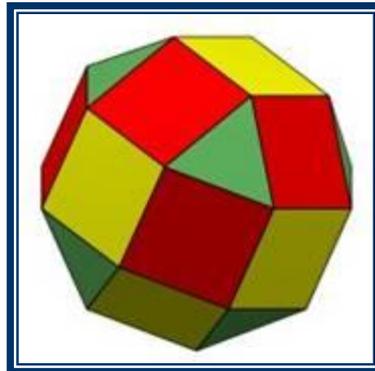
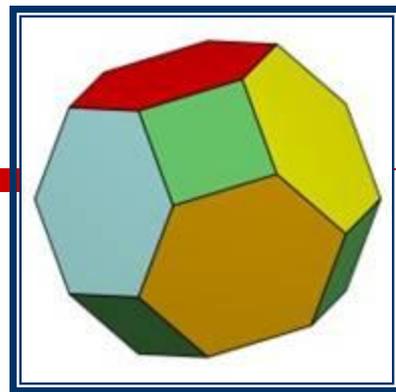
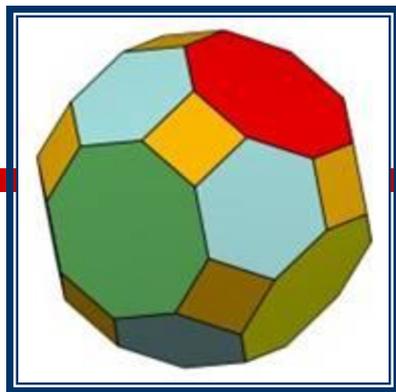
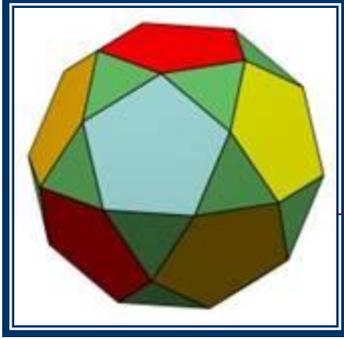
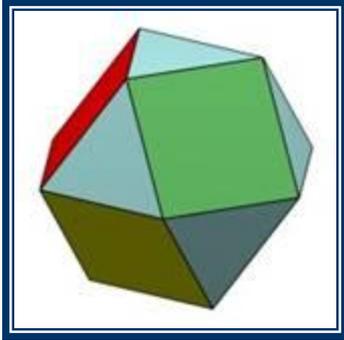
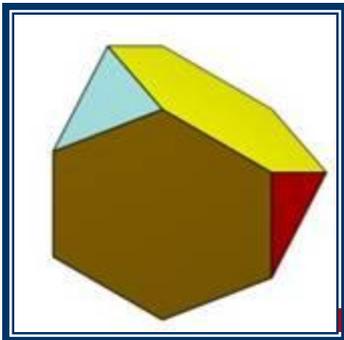
# Архимедовы тела

---

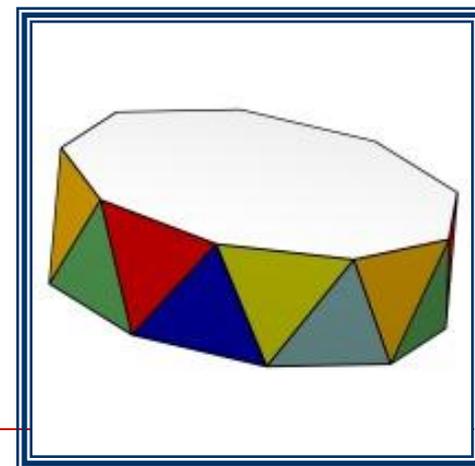
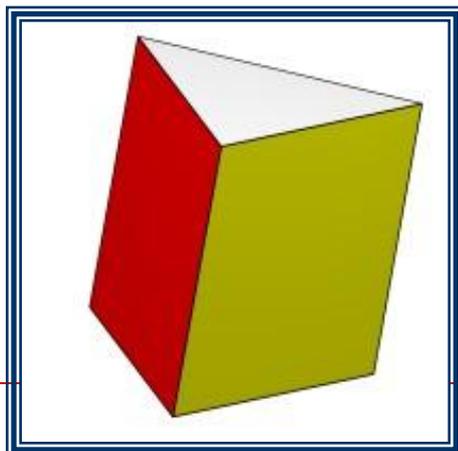
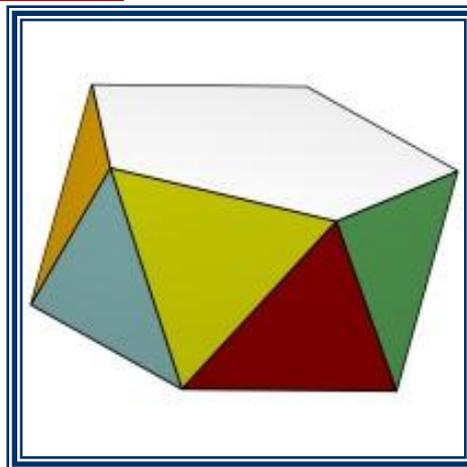
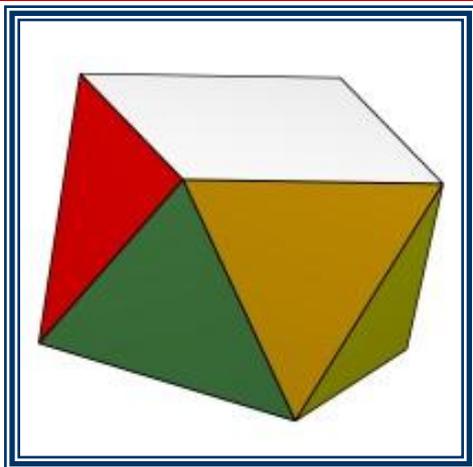
*Архимедовыми телами* называют выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов

---

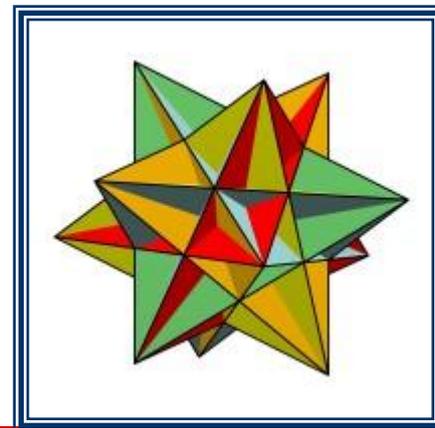
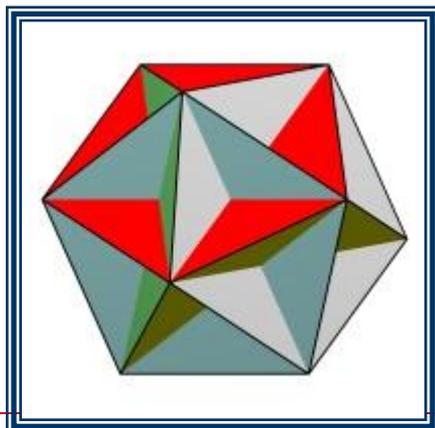
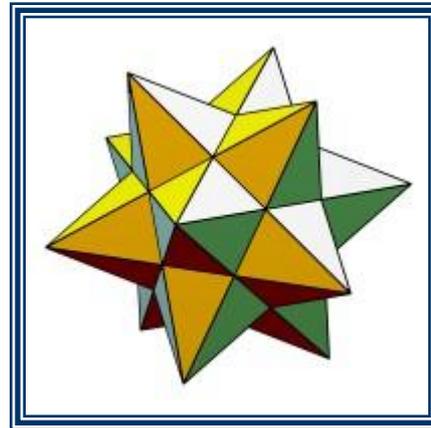
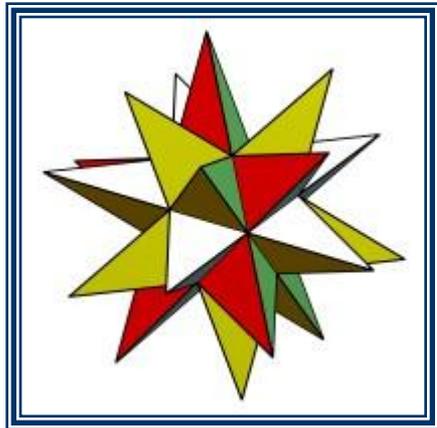
# тела Архимеда



# Выпуклые призмы и антипризмы

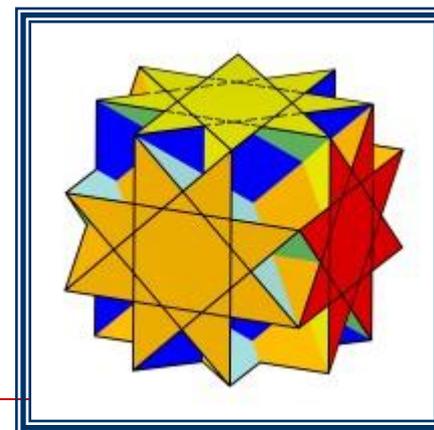
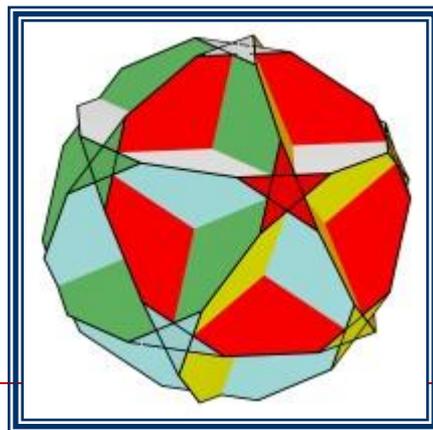
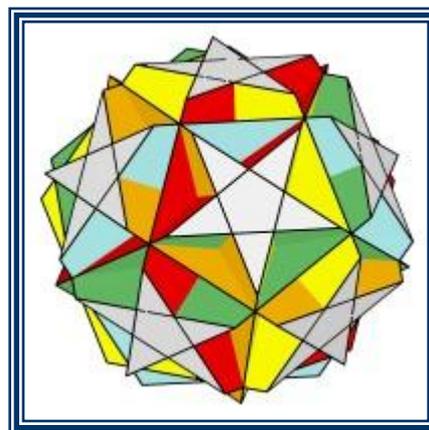
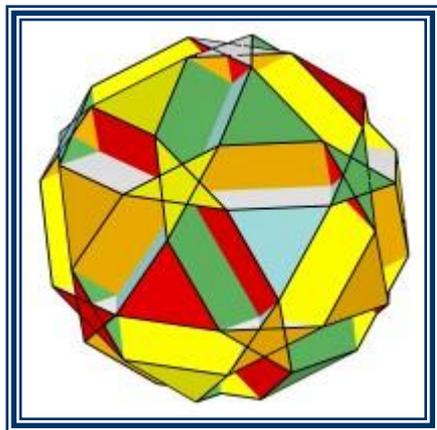


# *Тела Кеплера-Пуансо*



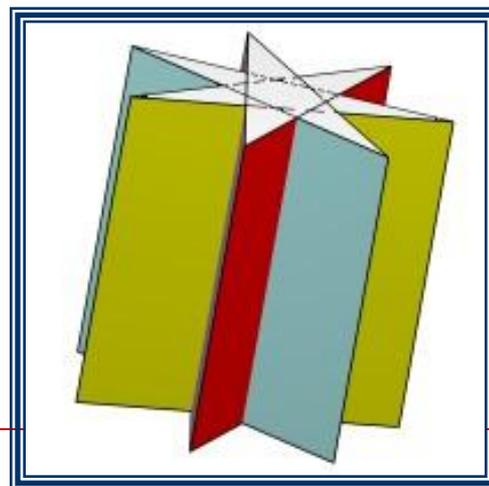
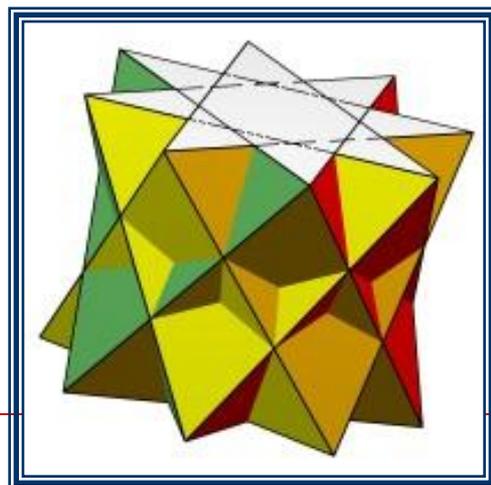
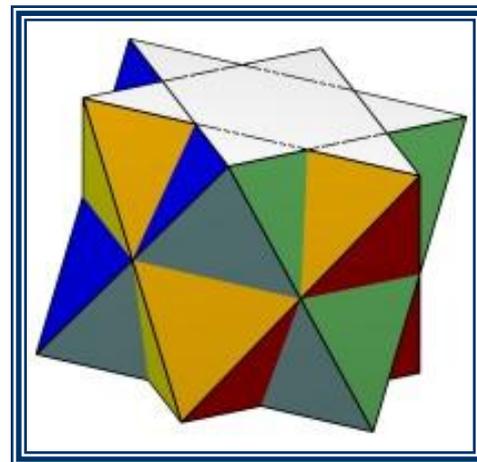
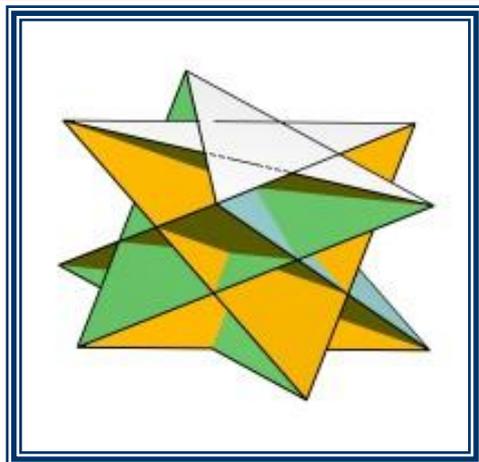
# *Невыпуклые полуправильные однородные многогранники*

---



# *Невыпуклые призмы и антипризмы*

---



# Домашнее задание

---

- Подготовить выступление на 2 минуты по одной из тем. Учитывается наличие не менее двух источников, наглядность, практическая значимость, способность заинтересовать слушателей
  - 1. Архимедовы тела
  - 2. Тела Кеплера  
\_ Пуансо
  - 3. Призмы и антипризмы
-

---

***Призма.***

**УРОК 2**

---

# Цель

---

- Изучить понятие призмы, различать прямую и наклонную призму
  - Вывести формулу боковой и общей площади поверхности призмы
  - Прорешать несколько задач по теме «Призма»
  - Самостоятельно решить задачи для закрепления материала
-

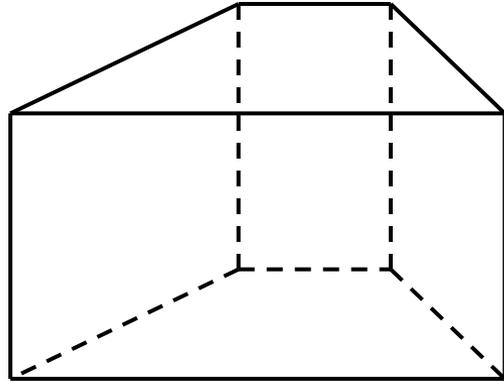
# План

---

- Просмотреть презентацию, делая записи в тетради
  - Выучить определение призмы, выучить формулу
  - Начертить треугольную и пятиугольную прямую призму
  - Разобрать решения предложенных задач, делая записи в тетради
  - Решить задачи 221,227
-

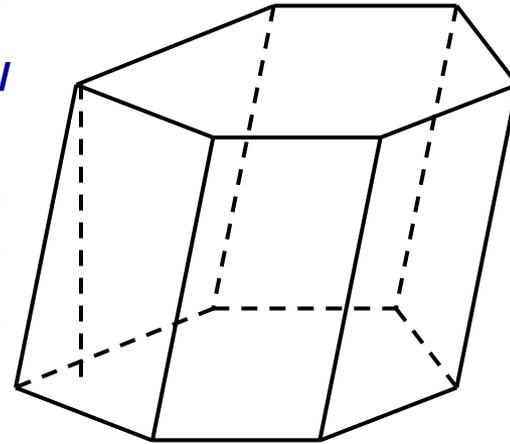
# Призм

Многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований.



П  
р  
я  
м  
а  
я

В  
ы  
с  
о  
т  
а



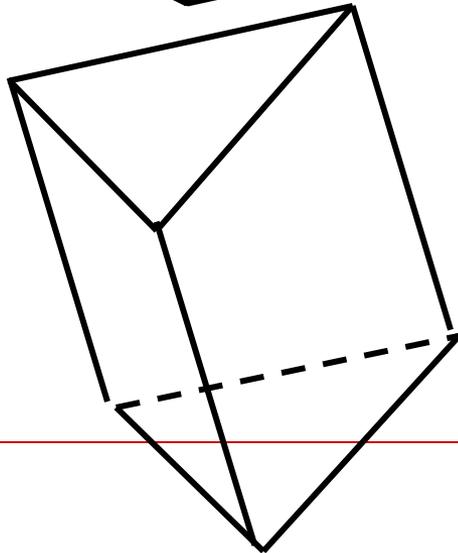
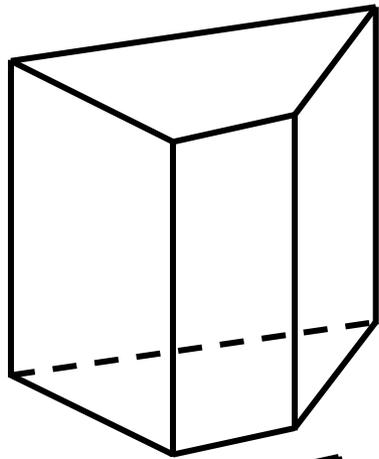
Н  
а  
к  
л  
о  
н  
н  
а  
я

□ Два равных многоугольника называют основаниями призмы

□ Параллелограммы называют боковыми гранями призмы

□ Перпендикуляр, проведенный из вершины одного основания к плоскости другого основания называют

# *Изображение призмы с данным многоугольником в основании:*

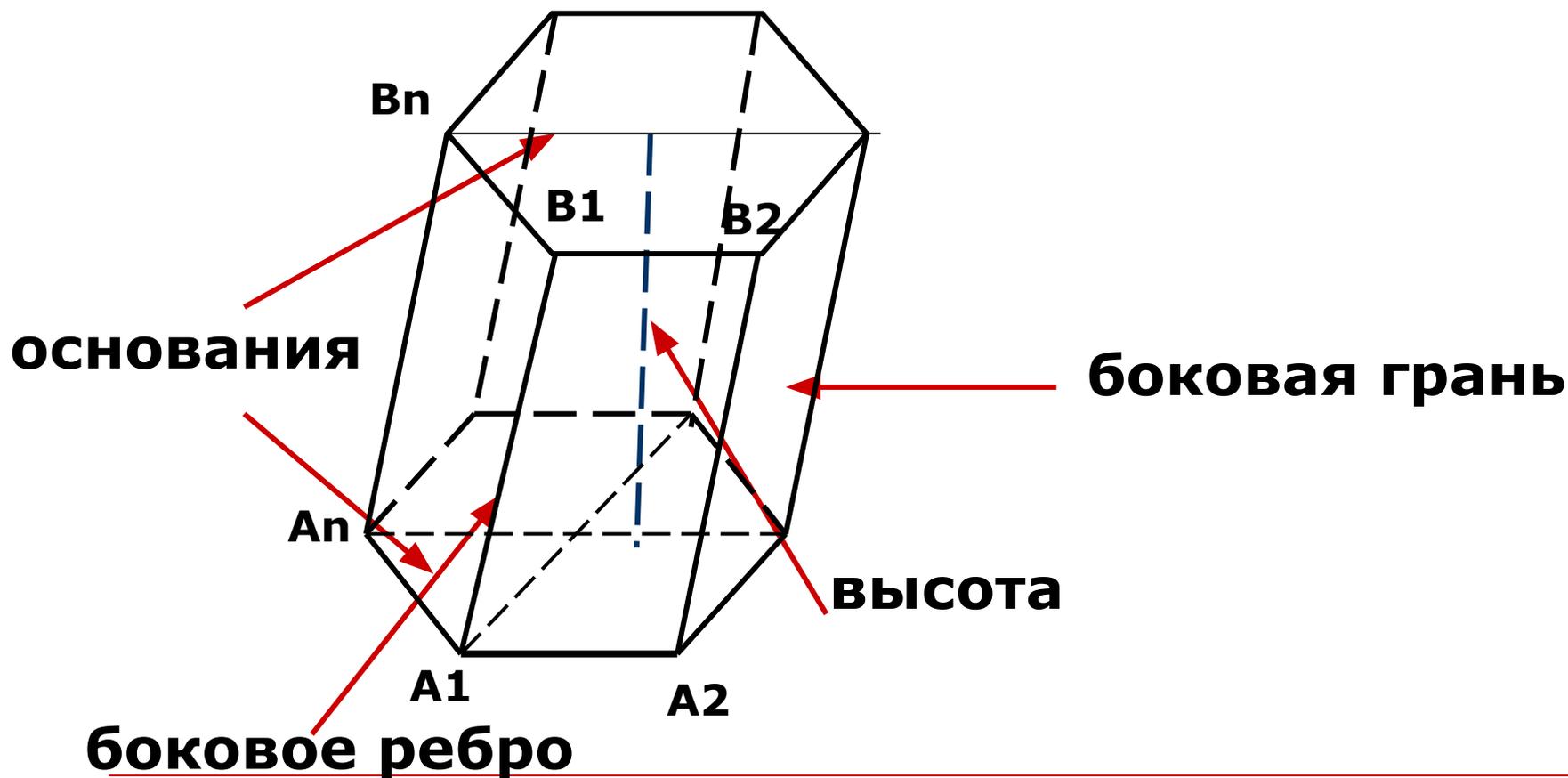


- Построить один из многоугольников основания
- провести из вершин многоугольника параллельные прямые
- отложить на них равные отрезки
- соединить их концы в той же последовательности, как и на заданном основании, невидимые рёбра проводя пунктиром

$A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_n$  –  
n-угольная призма

# призма

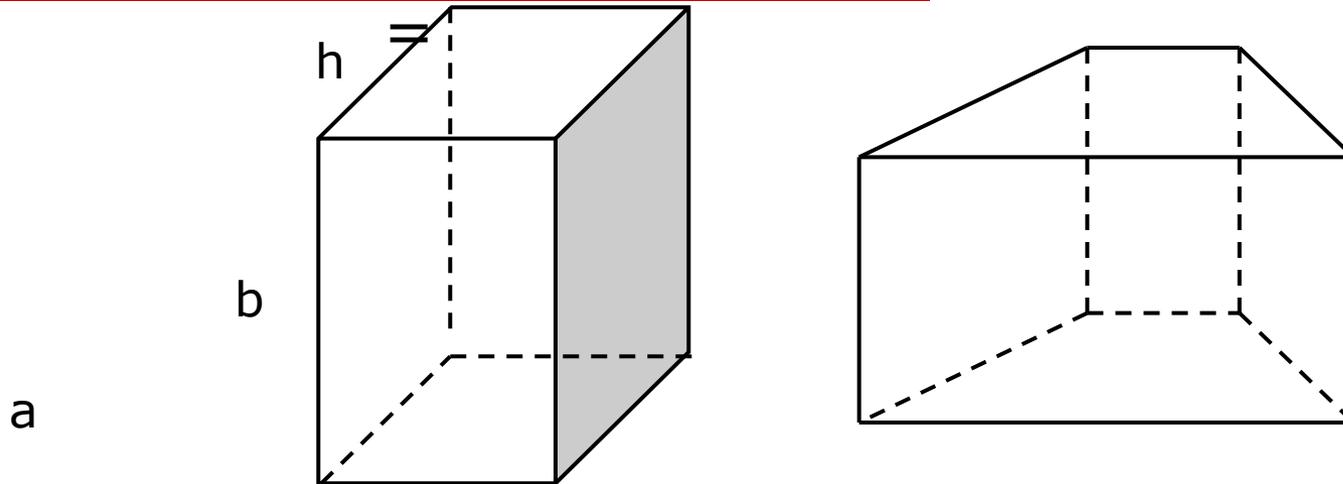
---



# Площадь поверхности призмы

$$\text{Сполн.} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн}}$$

---

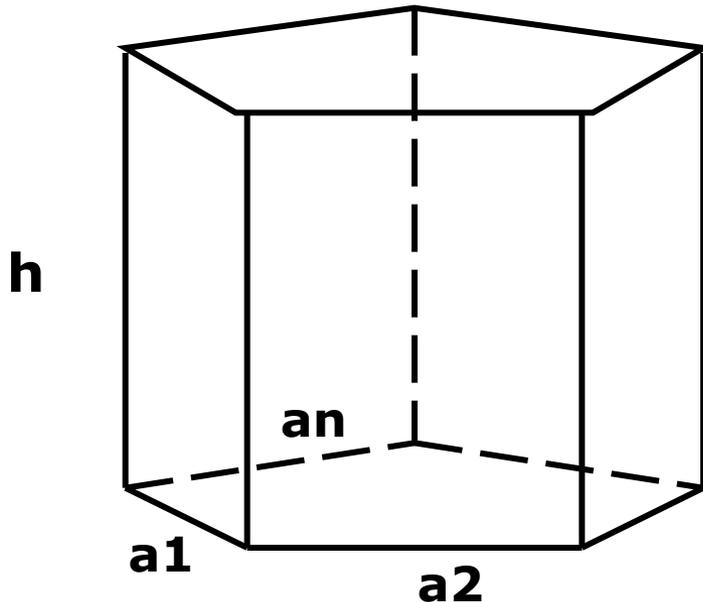


Площадью поверхности многогранника называют сумму всех площадей его граней. При вычислении площади боковой поверхности не учитывают величину оснований.

---

**Теорема:** площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту

---



**Дано:** прямая призма  
**h** – высота  
**a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..., a<sub>n</sub>** – стороны основания  
**P** – периметр основания

**Доказать:**  $S_{\text{бок}} = P \cdot h$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= S_1 + S_2 + \dots + S_n = \\ &= a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + \dots + a_n \cdot h = \\ &= h (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = P \cdot h \end{aligned}$$

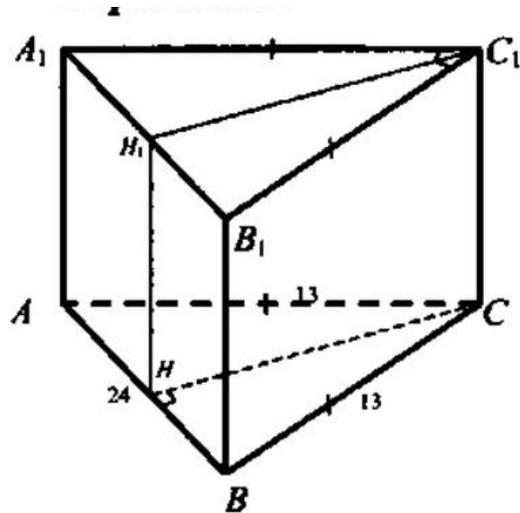
---

# План

---

- ☒+ Просмотреть презентацию, делая записи в тетради
  - ☒+ Выучить определение призмы, выучить формулу
  - ☐ Начертить треугольную и пятиугольную прямую призму
  - ☐ Разобрать решения предложенных задач, делая записи в тетради
  - ☐ Решить задачи 221,227
-

# Решение задач



## Задача 1 (заполни пропуски самостоятельно)

**Дано:**  $ABCA_1B_1C_1$  – прямая треугольная призма

$AC = BC = 13$  см,  $AB = 24$  см.  $HH_1C_1C$  – квадрат – наименьшее сечение призмы, проходящее через боковое ребро. Найти  $S_{полн.}$

**Решение:** Треугольник  $ABC$  – равнобедренный,  $CH$  – высота (наименьшую площадь сечение будет иметь, если  $CH$  – перпендикуляр).  $BH = 24 : 2$  (высота является медианой) По т. Пифагора найдём  $CH$ :  $CH = \sqrt{13^2 - 12^2} = \dots = 5$ .  $CH = CC_1 = 5$  (т.к. сечение – квадрат).  $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

$$S_{бок.} = P \cdot h = (AC + BC + AB) \cdot CC_1 = (13 + 13 + 24) \cdot 5 = \dots$$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \dots =$$

$$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = \dots = 370 \text{ см}^2$$

# Решение задач

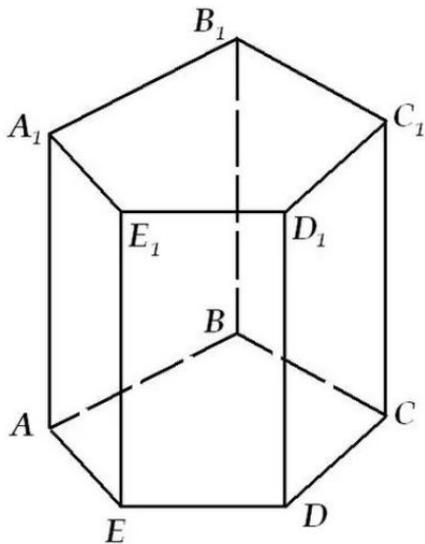
---

## Задача 2.

Дана правильная пятиугольная призма, все рёбра которой равны.  $S_{бок.} = 80$  см<sup>2</sup> Найти высоту призмы.

**Дано:** (заполни самостоятельно)

**Решение:** В основании призмы – правильный пятиугольник, пусть каждая его сторона равна  $a$ , значит площадь боковой поверхности призмы равна  $S_{бок.} = P \cdot h = 5a \cdot h$ . Но по условию все рёбра равны, значит  $a = h$ . Отсюда  $S_{бок.} = 5a \cdot a = 80$ , следовательно  $a \cdot a = 16$ ,  $a = 4$ . Значит и  $h = 4$  см



# Решение задач

---

Чертёж сделай  
самостоятельно

## Задача 3

Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона его основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

**Дано:** (запиши самостоятельно)

**Решение:**  $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$

В основании правильной призмы лежит квадрат, т. е.  $S_{\text{осн.}} = 20 * 20 = 400$

$S_{\text{бок.}} = P * h = 4 * 20 * h$

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = \dots$  а это равно 1760.

Составим и решим уравнение:

(продолжи решение самостоятельно)

---

# Тренировочные упражнения

---

- № 221, 227

# Домашнее задание

---

- Сделай макет призмы(на 3-из бумаги, на 4-5 из интересного материала)
  - Фотографию классной работы и призмы выслать на ПОЧТУ с указанием в теме письма названия и даты работы
-

# ***Пирамида***

---

## ***Урок 3***

---

Решите задачи 1 и 2 в тетради

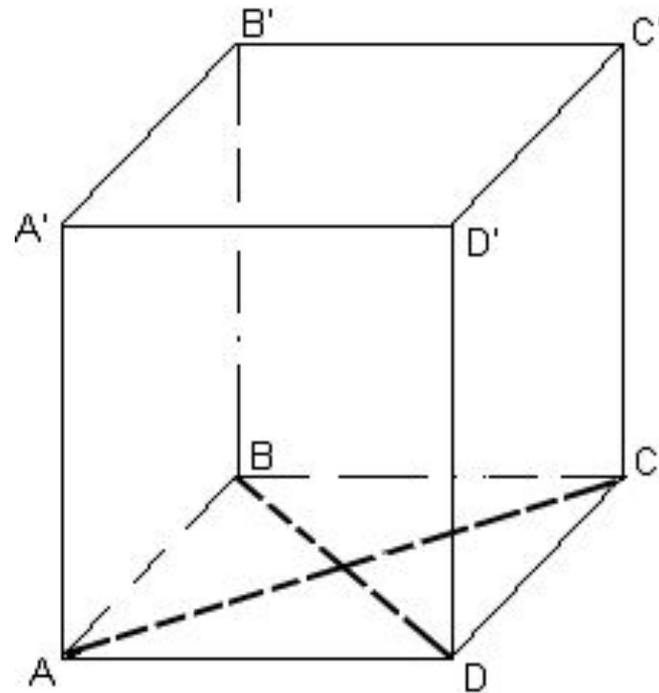
**ПОВТОРЕНИЕ**

---

# Задача 1

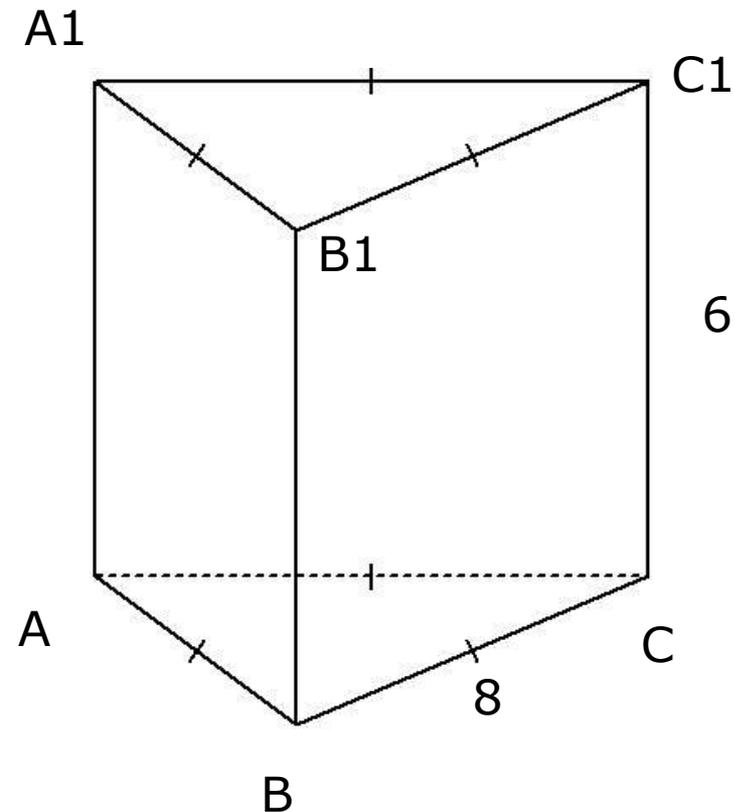
---

- Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с диагоналями 1,6 дм и 3 дм, боковое ребро призмы равно 10 дм. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.



# Задача 2

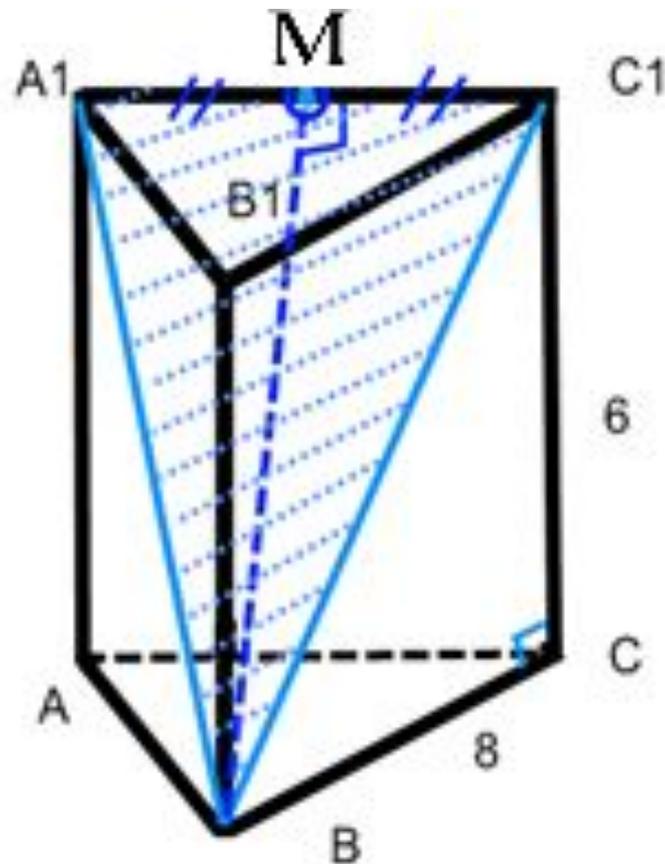
- Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро - 6 см. Найдите  $S_{\text{сеч}}$ , проходящего через сторону верхнего основания и противоположную вершину нижнего основания.



# План решения:

- 1) Найти сторону  $BC_1$
- 2) Найти высоту  $BM$
- 3) Вычислить площадь треугольника.

Если владеешь формулой Герона, можно на втором этапе найти площадь треугольника



---

# НОВЫЙ МАТЕРИАЛ

---

# Цель

---

- Изучить понятие пирамиды, различать прямую и наклонную пирамиду
  - Вывести формулу боковой и общей площади поверхности пирамиды
  - Прорешать несколько задач по теме «Пирамида»
  - Самостоятельно решить задачи для закрепления материала
-

# План

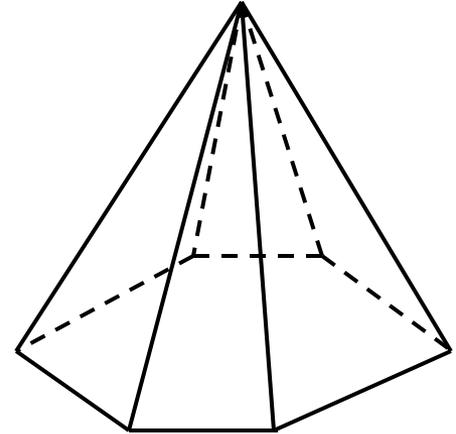
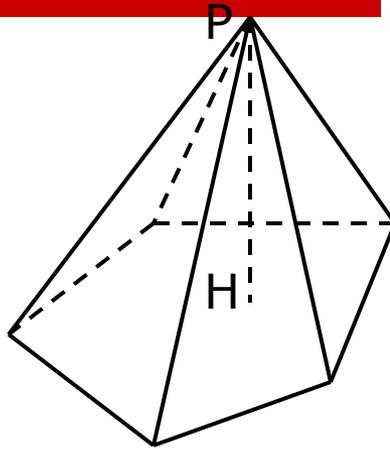
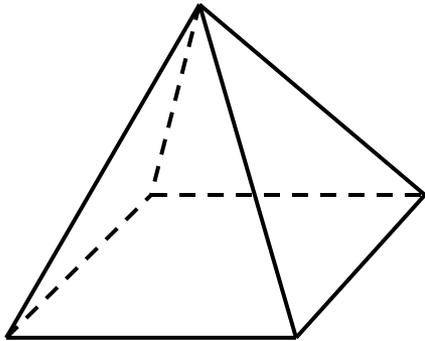
---

- Просмотреть презентацию, делая записи в тетради
  - Выучить определение пирамиды, выучить формулу боковой поверхности правильной пирамиды
  - Начертить треугольную и пятиугольную пирамиду
  - Разобрать решения предложенных задач, делая записи в тетради
  - Решить задачи
-

# Пирамид

Многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника и треугольников, имеющих общую вершину

---



□ Многоугольник называют основанием пирамиды

□ Треугольники называют боковыми гранями

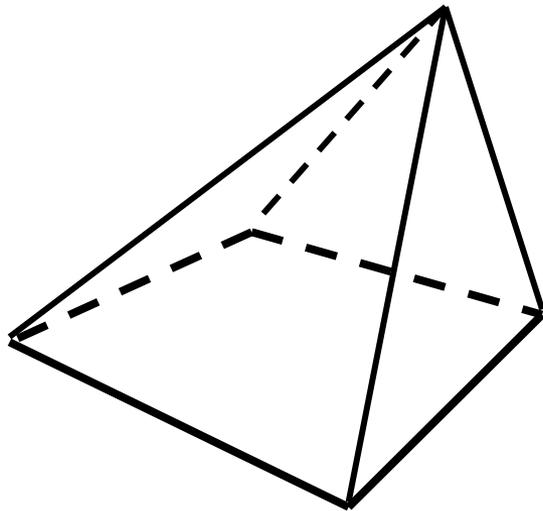
□ Общую вершину называют вершиной пирамиды

□ Перпендикуляр  $PH$  называют высотой

---

# *Изображение пирамиды:*

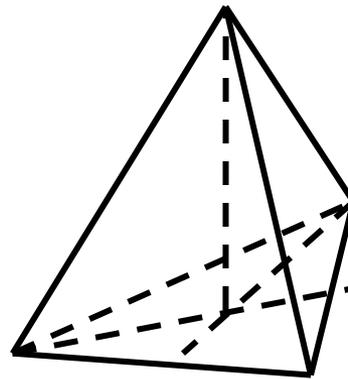
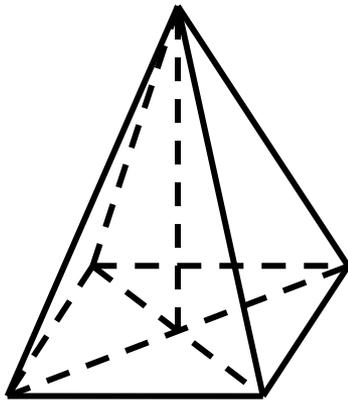
---



- **Начертить многоугольник основания пирамиды**
  - **Выбрать точку, не принадлежащую основанию — точку вершины пирамиды**
  - **Соединить каждую вершину основания с точкой, изображающей вершину пирамиды**
-

# В случае прямой пирамиды

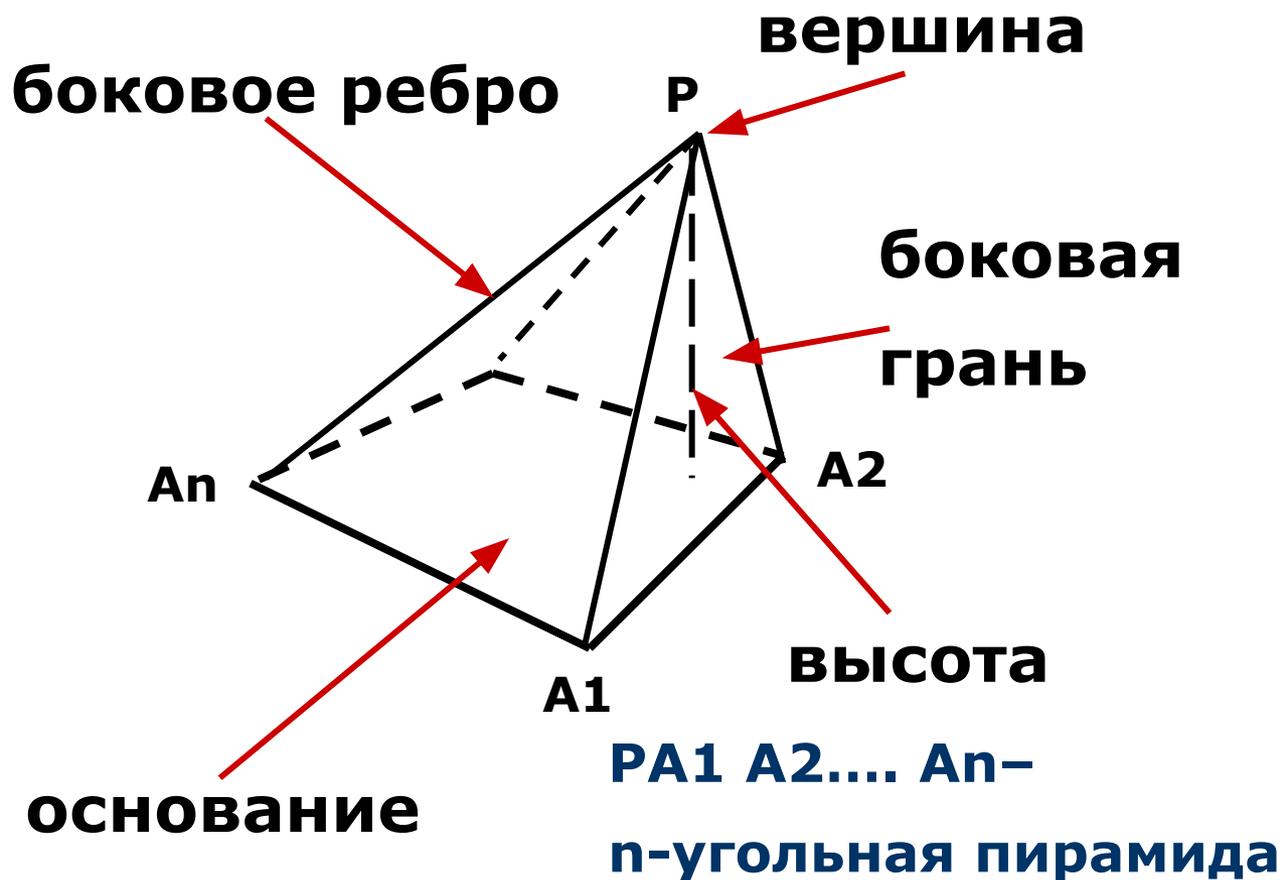
---



- высота изображается вертикальным отрезком
  - основание высоты является центром окружности, описанной около основания
-

# Пирамида (наклонная)

---

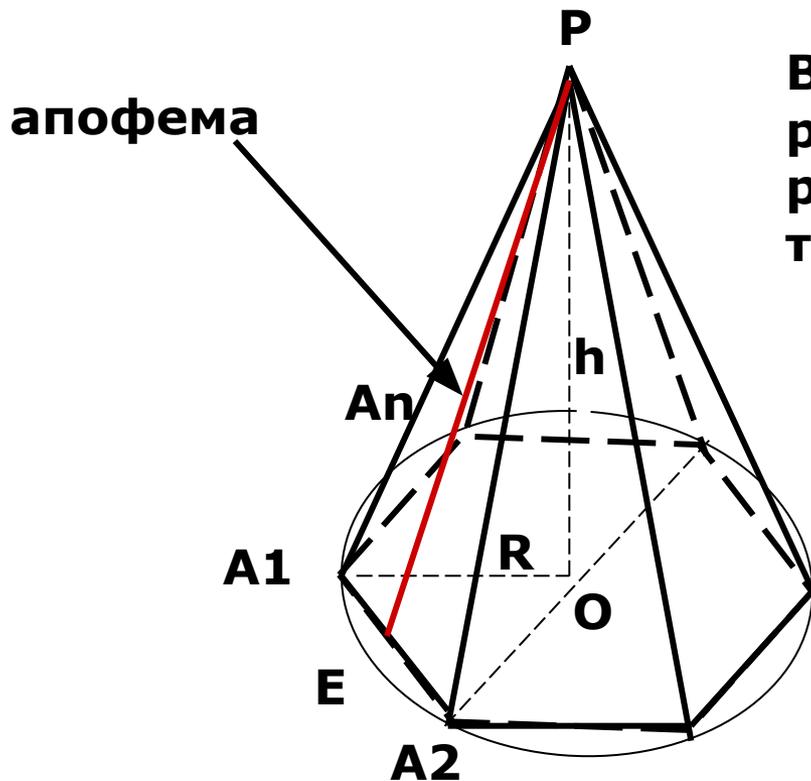


---

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

# Правильная пирамида

---



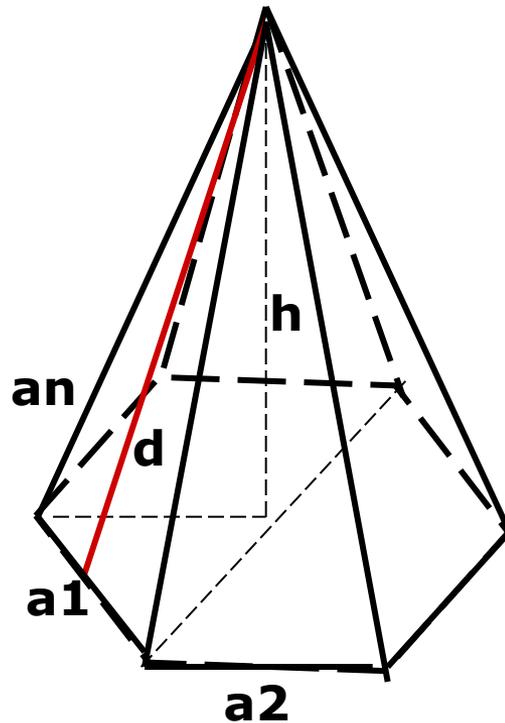
Все ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой

**Теорема:** площадь боковой поверхности  
правильной пирамиды равна половине произведения  
периметра основания на апофему

---

**Дано:** правильная пирамида  
 $h$  – высота  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – стороны  
основания  $P$  – периметр  
основания  $d$  – апофема  
**Доказать:**  $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot d$



**Доказательство:**

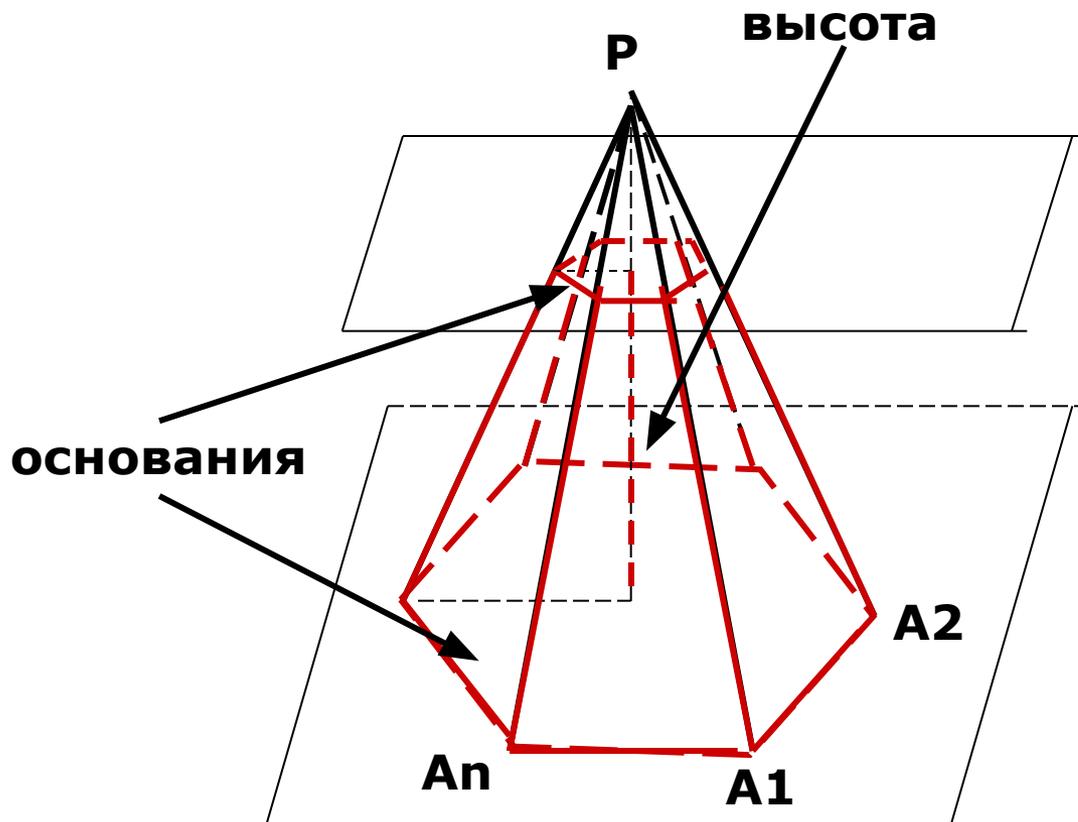
$$S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 \cdot d + \frac{1}{2} a_2 \cdot d + \dots + \frac{1}{2} a_n \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} P \cdot d$$

---

# Усеченная пирамида



Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания называется **высотой**

Боковые грани усеченной пирамиды-трапеции

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_1 * P_2 * d$   
 $P_1; P_2$ -периметры оснований,  $d$ -апофема

# Может пригодиться

*Площадь правильного многоугольника*

---

$$S = \frac{1}{2} P r$$

*Сторона правильного многоугольника*

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

*Радиус вписанной окружности*

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

---

---

Решите задачи в тетради

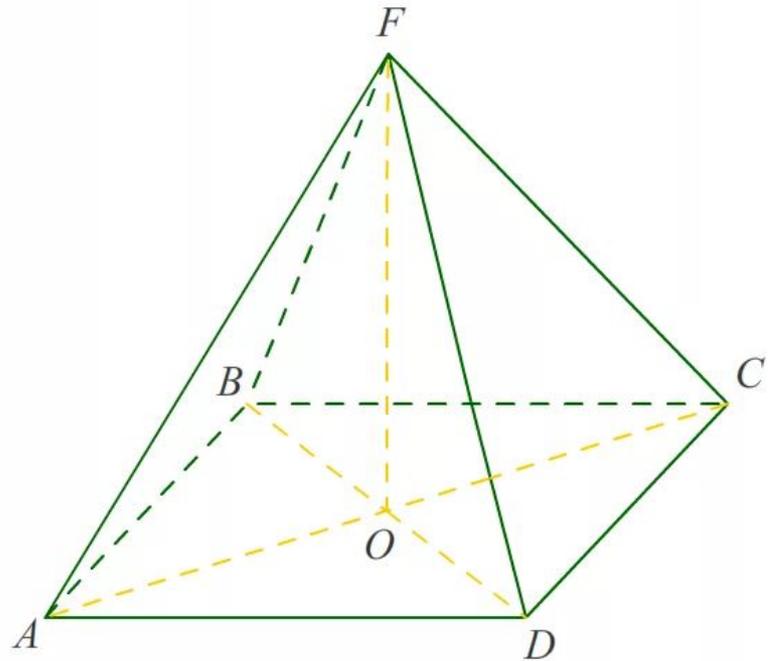
# **ОТРАБОТКА НОВОГО МАТЕРИАЛА**

---

# Задача 3

---

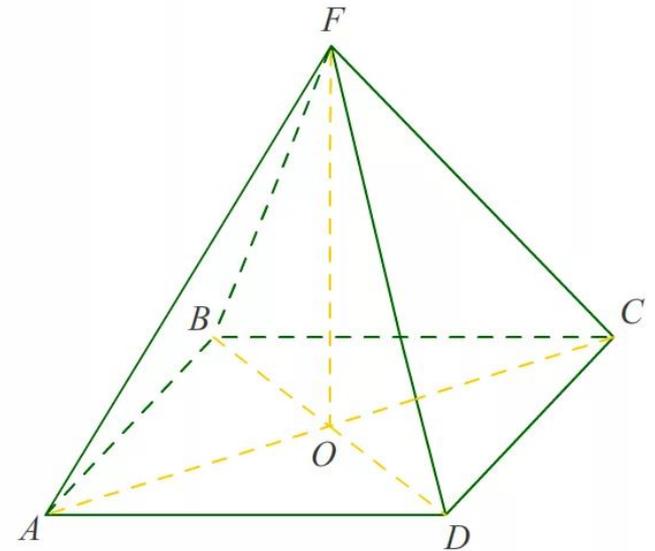
- Основание пирамиды-параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см, высота пирамиды- 12 см, а все боковые ребра равны между собой. Найдите длину бокового ребра.



# Задача 3

---

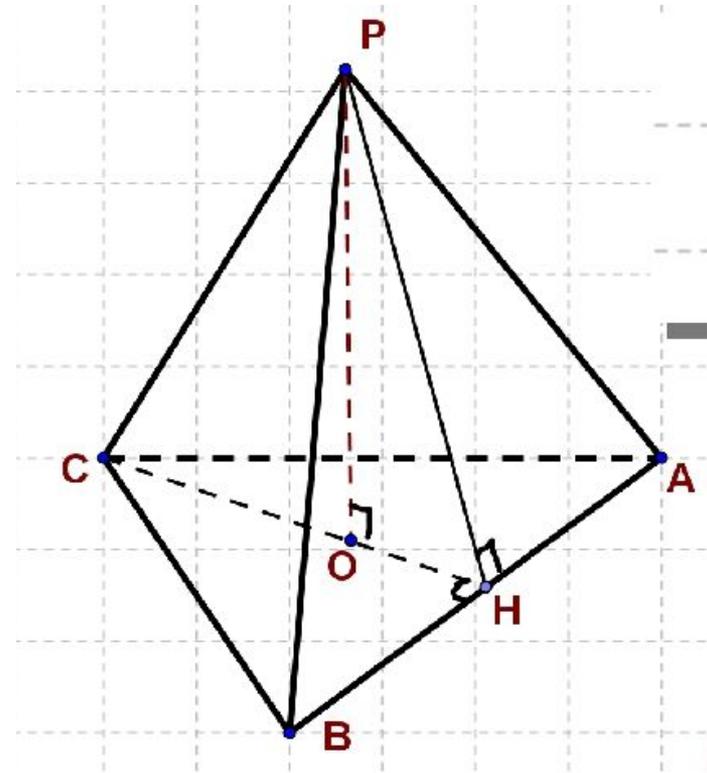
- Дано:  $FABCD$ - прямая четырёхугольная пирамида.  $AB=6$ ,  $AD=8$ ,  $FO = 12$ ,  $FA = FD=FD=FC$
- Найти:  $FA$
- Решение:  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма, из равенства боковых рёбер (они являются наклонными из одной точки) следует равенство отрезков  $BO=OC=OD=OA$  (равны наклонные, значит равны проекции). Таким образом  $ABCD$  - прямоугольник, т.к. диагонали равны. Далее – дело техники. Найдите диагональ  $AC$  по теореме Пифагора из треугольника  $ABC$ . Затем, сторону  $FA$  из треугольника  $AFO$ . Доведи решение до конца.



# Задача 4

---

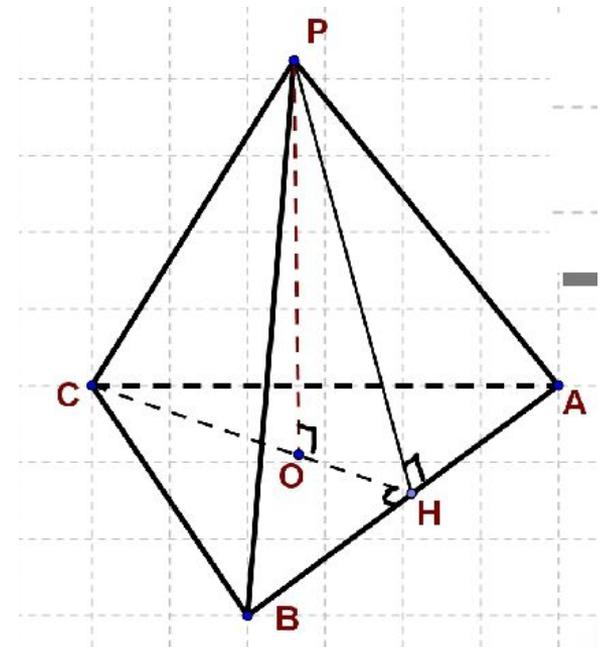
- Сторона основания правильной треугольной пирамиды 6 см, а боковое ребро 4 см. Найдите высоту пирамиды и апофему.



# Задача 4

- Дано:  $PABC$  – правильная треугольная пирамида.  $AB = 6\text{см}$ ,  $PB = 4\text{см}$ .
- Найти:  $PO$ ,  $PH$
- Решение:  $ABC$  – равносторонний треугольник по условию. Воспользуемся формулой стороны правильного многоугольника, где  $n=3$ .  $a_3 = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$ , отсюда  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .  $CO$  – радиус описанной окружности, значит  $CO = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ . Дальше найди  $PO$  из треугольника  $CPO$  по т. Пифагора.  $PH$  можно найти из

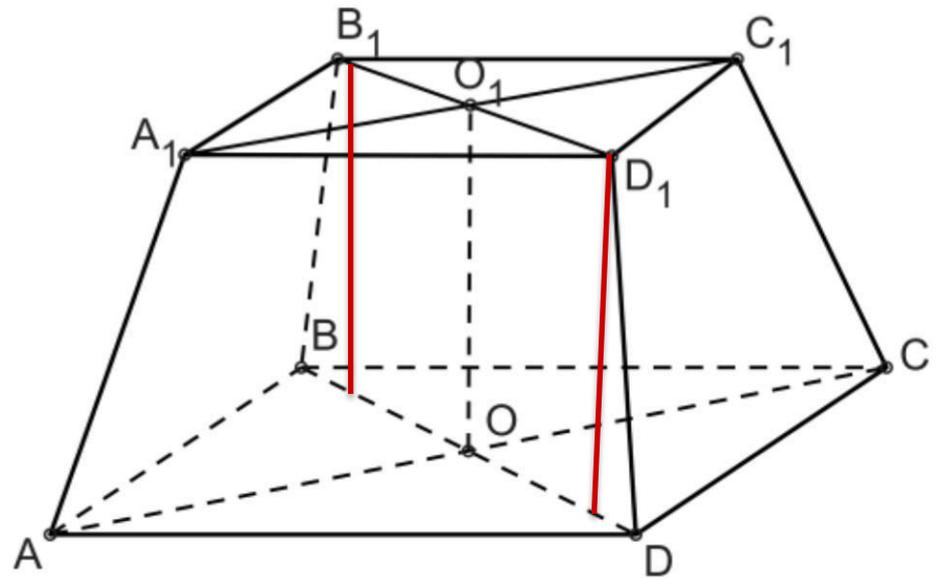
$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$



# Задача 5

---

- Запиши Дано, найти, решение
- Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 м и 8 м. Боковое ребро равно 5 м. Найдите высоту пирамиды.



# Домашнее задание

---

- Выучить все определения
  - Сделать макет пирамиды, усечённой пирамиды по мотивам задач урока
  - Фотографии фигур и решения задач выслать на почту учителю [dist.kirillova@yandex.ru](mailto:dist.kirillova@yandex.ru) с указанием в теме письма названия работы
-