

# Основы линейной алгебры

# Матрицы

Математическая матрица — это упорядоченный набор чисел, расположенных в виде таблицы. Этот математический объект находит широкое применение во многих областях науки, техники и естественных наук. Матрицы являются одним из основных инструментов в линейной алгебре и находят применение в решении различных математических задач.

Одной из областей, где математические матрицы широко применяются, является компьютерная графика. В компьютерной графике матрицы используются для представления и трансформации изображений. С помощью матриц можно масштабировать, поворачивать и сдвигать объекты на экране. Например, при создании трехмерных моделей матрицы применяются для преобразования координат вершин объекта, что позволяет изменять его положение и форму.

Еще одной областью применения матриц является криптография. В криптографии матрицы используются для шифрования и дешифрования информации. С помощью матриц можно создавать сложные алгоритмы шифрования, которые обеспечивают надежную защиту данных. Например, матрицы могут использоваться для перемешивания символов или замены символов на основе определенных правил.

Математические матрицы также применяются в физике, экономике, статистике и других научных областях. В физике матрицы используются для описания физических процессов, моделирования сложных систем и решения уравнений. В экономике и статистике матрицы применяются для анализа данных и построения математических моделей. Примерами применения матриц в этих областях являются прогнозирование рыночных трендов, анализ финансовых показателей и оценка рисков.

Таким образом, математические матрицы играют важную роль в различных областях науки и техники. Они позволяют решать сложные математические задачи, моделировать реальные процессы и обрабатывать данные. Знание матриц и их применения является необходимым для понимания и работы с многими современными технологиями и научными методами.

**Матрицей размерности  $m \times n$**  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  **$m$**  строк и  **$n$**  столбцов.

Матрицы обозначаются *заглавными буквами* и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Сокращенно матрица  $A$  записывается в виде:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{или} \quad A = \|a_{ij}\|$$

где  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) указывает номер строки,  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) номер столбца.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается через  **$O$** .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Единичная** матрица  $E$  – это диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны единице, т.е.

$$a_{ii} = 1, \forall i$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix}$$

# Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$



# Пример

$$C = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 2) \quad -2 \cdot C = (-2 \quad 0 \quad 2 \quad -4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot A =$$

# Пример

Вычислить  $4A - 3B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:  $4A - 3B = 4A + (-3)B$

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 12 \\ -3 & -15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 12 \\ 1 & -35 & 21 \end{pmatrix}$$

## 4. Умножение матриц

**Опр. 17. Произведение** матрицы  $A$  на матрицу  $B$ , определено тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы  $A$  совпадает с числом строк второй матрицы  $B$ , и в этом случае матрица  $A$  называется **согласованной** с матрицей  $B$  для умножения.

Если  $A_{m \times n} = (a_{ij})$ ,  $B_{n \times k} = (b_{ij})$ , тогда  $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$$

*Итак, элемент  $i$ -той строки и  $j$ -го столбца матрицы произведения  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$ -той строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .*

# Пример

Найти произведение матриц  $AB$  и  $BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Произведение матриц  $AB$  существует, т.к. матрица  $A$  имеет размерность  $2 \times 2$ , а матрица  $B$  –  $2 \times 3$ , и число столбцов матрицы  $A$  совпадает с числом строк матрицы  $B$ .

Произведение матриц  $BA$  не существует.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$c_{13} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 6$$

$$c_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$

$$c_{23} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

# Определитель квадратной матрицы

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по правилу:

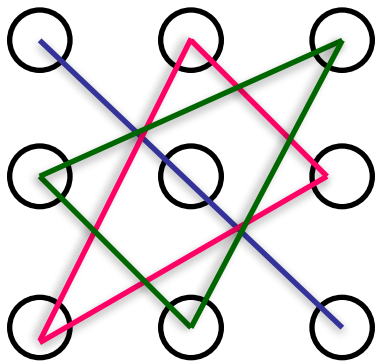
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

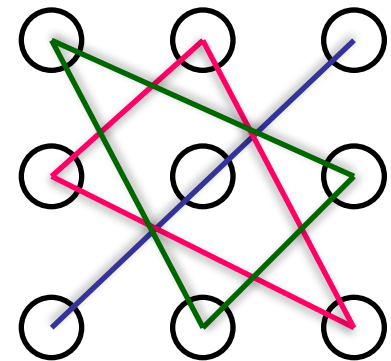
При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* или *правилом Сарруса*.

«+»



$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

«-»



## Пример

Вычислить определители матриц:

$$\det A = |3| = 3$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 - \\ 2 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = -16$$



**Опр.2.** Минором элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка  $A$  называется определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, полученный из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ .  
 Минор элемента  $a_{ij}$  обозначается  $M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$$

лат. *minor* - меньший

**Пример.** Найти миноры  $M_{11}$ ,  $M_{32}$ ,  $M_{43}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Опр.4.** *Алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка  $A$  называется число, равное  $(-1)^{i+j}M_{ij}$  и обозначаемое символом  $A_{ij}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

где  $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$ .

Алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца – четное число, и отличается от минора знаком, когда сумма номеров строки и столбца – нечетное число.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$$

$$A_{22} = M_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$$

$$A_{21} = -M_{21}$$

**Определитель  $n$ -го** порядка матрицы  $A_n$  равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их *соответствующие* алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

для строки:

$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{in} A_{in}, \quad (i = 1; 2; \dots; n);$$

для столбца:

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{ij} A_{ij} + \dots + a_{nj} A_{nj}, \quad (j = 1; 2; \dots; n).$$

# Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По 2-ой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

# Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По 3-му столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + (-1) \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} =$$

$$2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

- Определитель  $n$ -го порядка треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \boxtimes & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \boxtimes a_{nn}$$

- Определитель  $n$ -го порядка единичной матрицы  $E$  равен 1.

# Ранг матрицы

Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$



## Элементарными преобразования матрицы называются :

1. Транспонирование (замена строк столбцами)
2. Перестановка строк и столбцов.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

# Теорема о ранге матрицы

- Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

# ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

**Опр. 1.** Матрица  $A^{-1}$  называется ***обратной*** для квадратной матрицы  $A$ , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Матрицы  $A$  и  $A^{-1}$  взаимно-обратны  $(A^{-1})A = A$

Всякая невырожденная матрица  $A_n$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ , причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  ( $i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$ ) матрицы  $A$ .

## Пример

Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Т.к.  $|A| = -2 \neq 0$ , то матрица  $A$  – невырожденная и имеет обратную матрицу.

Находим алгебраические дополнения  $A_{ij}$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1}|2| = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|3| = -3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$$

Вычислим обратную матрицу (Т.2):

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы необходимо убедиться в выполнении равенства:  $AA^{-1} = E$ .

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Опр.** *Системой  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными* (СЛУ) называется система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – неизвестные, подлежащие определению;  
числа  $a_{ij}, i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$  называются коэффициентами системы, а числа  $b_i$  – ее свободными членами.

Число уравнений системы не обязательно совпадает с числом неизвестных, возможны следующие случаи:

$$m > n, \quad m = n, \quad m < n.$$



**Опр.** Матрица  $A$  составленная из коэффициентов СЛУ называется **основной** матрицей системы.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Опр.** Матрицы  $X$  и  $B$  называются **матрицы-столбцы неизвестных** и **свободных членов**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \boxtimes \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Матричная форма записи СЛУ:**

$$AX = B$$

**Пример.** Записать в матричной форме

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

# Решение

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, имеем  $AX = B$ .

Рассмотрим частный случай неоднородной системы,  
когда  $m=n$ , т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель  $|A|$  основной матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае система  
линейных уравнений  
называется **невырожденной**.

**Пример.** Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

или  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## Решение.

Найдем  $|A|$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 28 + 2 = 30 \neq 0.$$

т.е. исходная система трех неоднородных линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение.

Найдем единственное решение системы матричным методом  $X=A^{-1}B$ .

Найдем теперь обратную матрицу  $A^{-1}$ , для этого найдем алгебраические дополнения:



$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Следовательно, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 & 5 \\ 11 & 4 & 1 \\ -13 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Найдем теперь решение системы

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{13}{30} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

## Проверка

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{13}{30} - \frac{1}{30} = 1, & 1 = 1. \\ -3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{30} + 2 \cdot \frac{1}{30} = 0, & 0 = 0. \\ \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{13}{30} + 3 \cdot \frac{1}{30} = 2, & 2 = 2. \end{cases}$$

$\Rightarrow$  решение системы найдено верно.

Ответ :  $(\frac{1}{6}; \frac{13}{30}; \frac{1}{30})$ .

# Правило Крамера

Согласно правилу Крамера, если  $|A| \neq 0$ , то единственное решение СЛУ вычисляется по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|}; x_2 = \frac{|A|_2}{|A|}; \dots; x_n = \frac{|A|_n}{|A|}$$

или кратко  $x_j = \frac{|A|_j}{|A|} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$

Определители  $|A|_j$  получаются из определителя  $|A|$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов.

Найдем теперь решение системы по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A|_2}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A|_3}{|A|}, \quad \text{где}$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Итак, } x_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{13}{30}, \quad x_3 = \frac{1}{30}.$$

**Элементарными** называются следующие **преобразования** системы:

1. Перестановка местами двух уравнений системы.
2. Умножение некоторого уравнения системы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого её уравнения, предварительно умноженного на некоторое число.
4. Изменение порядка следования неизвестных.

**Пример.** Решить систему

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1;$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0;$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2.$$



# Метод Гаусса

При решении систем линейных уравнений используют также *метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)*. Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называют *прямым ходом*. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (*обратный ход*).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

- 1) умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число;
- 2) сложение и вычитание уравнений;
- 3) перестановку уравнений системы;
- 4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x - 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Решение. Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

Чтобы в 1-м столбце получить  $a_{21} = a_{31} = 0$ , умножим 1-ю строку сначала на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

Разделим 2-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-й строки:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array} \right).$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ y - \frac{7}{8}z = -\frac{5}{8}, \\ \frac{13}{8}z = \frac{39}{8}. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$$\frac{13}{8}z = \frac{39}{8}; z = 3;$$

$$y - \frac{7}{8} \cdot 3 = -\frac{5}{8}; y = -\frac{5}{8} + \frac{21}{8} = 2;$$

$$x - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3; x = 3 + 4 - 6 = 1.$$

Итак, получаем ответ: (1; 2; 3).