# Линейные векторные пространства. Базис

- Линейные векторные пространства;
- Линейная зависимость векторов;
- Базис и размерность пространства
- Преобразование координат;
- Матрица перехода

# Линейные векторные пространства

**Определение.** Множество ***V*** называется линейным векторным пространством, если для любых его элементов ***a*** и $b$, называемых векторами этого пространства, и любого действительного числа $\lambda$ так определены в ***V*** векторы $a+b$ и $\lambda \cdot a$, что верны следующие аксиомы:

# Линейные векторные пространства

**1.** В пространстве $V$ есть нулевой вектор $0$ такой, что

$$a+0=a \quad \forall a\in V;$$

**2.** Для любого вектора $a\in V$ существует *противоположный* ему вектор, обозначаемый $-a$, такой, что $a+(-a)=0$;

**3.** $a+b=b+a \quad \forall a,b\in V$;

**4.** $(a+b)+c=a+(b+c) \quad \forall a,b,c\in V$;

**5.** $1\cdot a=a \quad \forall a\in V$;

# Линейные векторные пространства

**6.** $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b \quad \forall\, a,b\in V \quad \forall \lambda\in R;$

7. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a \quad \forall\, a\in V \quad \forall \lambda,\mu\in R$

8. $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a) \quad \forall\, a\in V \quad \forall \lambda,\mu\in R$

**Пример.** Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства является линейным пространством относительно операций сложения двух векторов и умножения векторов на число.

# Линейные векторные пространства

**З а м е ч а н и е 1.** Пространство $R^n$ – множество строк из $n$ действительных чисел $(x_1;...;x_n)$ – является линейным векторным пространством, если суммой строк $(x_1;...;x_n)$ и $(y_1;...;y_n)$ назвать строку $((x_1+y_1);...;(x_n+y_n))$, а произведением строки $(x_1;...;x_n)$ на число $\lambda$ назвать строку $(\lambda x_1;...;\lambda x_n)$.

нулем пространства служит строка $0=(0;...;0)$; противоположной строке $(a_1;...;a_n)$ является строка $(-a_1;...;-a_n)$ и верны все аксиомы 1– 8.

# Линейная зависимость векторов

- **Определение .** Векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейного векторного пространства $V$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ , не все равные нулю, такие, что справедливо равенство:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \qquad (1)$$

**Определение .** Векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейного векторного пространства называются ***линейно независимыми,*** если выполнение равенства (1) возможно только при условии: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

-
- .

# Линейные векторные пространства

- ***Теорема.*** *Система из* ***k*** *векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *пространства* $R^n$ *является линейно независимой тогда и только тогда, когда матрица* ***A*** *, столбцы (строки) которой составлены из этих векторов, имеет* ранг ***k***.
- ***Следствие.*** *Система, состоящая более чем из* ***n*** *векторов пространства* $R^n$ *, линейно зависима .*

# Базис линейного пространства

Пусть $L -$ произвольное линейное пространство.

**Определение .** Линейная независимая система элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ пространства $L$ называется ***базисом*** этого пространства, если любой элемент $x$ пространства $L$ является линейной комбинацией этих элементов, т.е. $x = x_1 e_1 + x_2 e_2, ..., x_n e_n,$ $(*)$

где $x_1, x_2, ..., x_n -$ некоторые числа называемые *координатами элемента* $x$ относительно базиса

$$e_1, e_2, ..., e_n.$$

# Базис линейного пространства

Равенство $x = x_1e_1 + x_2e_2, ..., x_ne_n,$ $(*)$ называется разложением элемента $x$ по базису $e_1, e_2, ..., e_n.$

***Пример 1.*** В линейном пространстве всех векторов плоскости любые два неколлинеарные вектора являются базисом этого пространства.

***Пример 2.*** В линейном пространстве всех векторов пространства любые три некомпланарные вектора являются базисом этого пространства.

# Базис линейного пространства

**Теорема.** Любой элемент $x$ линейного пространства $L$ разлагается по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ этого пространства *единственным способом.*

**Доказательство.** Предположим обратное, пусть элемент $x$ разлагается по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ двумя различными способами:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n,$$

$$x = x_1' e_1 + x_2' e_2 + ... + x_n' e_n.$$

# Базис линейного пространства

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$$x = x_1' e_1 + x_2' e_2 + \ldots + x_n' e_n.$$

$$\left(x_1 - x_1'\right) e_1 + \left(x_2 - x'\right)_2 e_2 + \ldots + \left(x_n - x_n'\right) e_n = 0. \qquad (**)$$

В силу линейной независимости базисных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, равенство $(**)$ справедливо только и только тогда, когда

$$x_1 - x_1' = 0, \quad x_2 - x' = 0, \ldots, x_n - x_n' = 0,$$

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x', \ldots, x_n = x_n'.$$ Теорема доказана.

# Базис линейного пространства

Пусть элементы $x$ и $y$ линейного пространства $L$ разложены по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n.$$

Из этих равенств, в силу аксиом 1-8 линейного векторного пространства, получим

$$x + y = \left(x_1 + y_1\right) e_1 + \left(x_2 + y_2\right) e_2 + \ldots + \left(x_n + y_n\right) e_n, \quad (1)$$

и

$$\lambda x = \lambda x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2 + \ldots + \left(\lambda x_n\right) e_n. \quad (2)$$

# Базис линейного пространства

Равенство (1) означает, что при сложении двух элементов линейного пространства $L$ их координаты складываются.

Равенство (2) означает, что при умножении элемента линейного пространства $L$ на некоторое число $\lambda$ координаты этого элемента умножаются на $\lambda$.

# Размерность линейного пространства

**Определение.** Если линейное пространство $L$ имеет базис, состоящий из ***n*** элементов, то это число ***n*** называется размерностью линейного пространства $L$, а само пространство называется ***n*** **–** мерным линейным или векторным пространством.

Размерность линейного пространства $L$ обозначается через ***dim L.***

# Размерность линейного пространства

Линейное пространство, в котором не существует базис, называется бесконечномерным.

***Теорема.*** В линейном пространстве любые два базиса содержат одинаковое число элементов.

- Размерность линейного пространства всех векторов плоскости равна двум.
- Размерность линейного пространства всех векторов пространства равна трем.
- Размерность линейного пространства $R^n$ равна $n$.

# Переход от одного базиса к другому

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e_1', e_2', ..., e_n'$ – два произвольных базиса n-мерного линейного пространства $R^n$ .

Элементы $e_1', e_2', ..., e_n'$ – разложим по базису $e_1, e_2, ..., e_n$

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ... + a_{1n}e_n,$$

$$e_2' = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{1n}e_n$$

$$.......................................$$

$$e_n' = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n.$$

# Переход от одного базиса к другому

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицу ***A*** называют матрицей перехода от нового базиса к старому базису .

Определитель этой матрицы отличен от нуля.

# Переход от одного базиса к другому

**Замечание .** Каждый вектор $a$ пространства $L$ имеет координаты как в старом базисе, так и в новом. Справедливо равенство: $(y_1; y_2; \ldots; y_n) \cdot A = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ которое связывает координаты $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ вектора $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в старом базисе и координаты вектора $a$ в новом базисе, где $A$ – матрица перехода от нового базиса к старому.

# ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА.

- **Определение.** Скалярным произведением векторов $a$ и $b$ линейного векторного пространства $L$ называется число, обозначаемое $(a,b)$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(a,b)=(b,a) \quad \forall\, a,b\in L$
2. $((a+b),c)=(a,c)+(b,c) \quad \forall\, a,b,c\in L$
3. $(\lambda a,c)=\lambda(a,c) \quad \forall\, a,c\in L,\ \forall\lambda\in R$
4. $(a,a)\geq 0 \quad \forall\, a\in L$

# ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

$(a,a)=0$ тогда, когда , $a -$ нулевой элемент пространства $L$ .

**Определение.** Линейное векторное пространство $L$,

в котором определено скалярное произведение

векторов, называется *евклидовым пространством.*

Пространство $R^n$ является евклидовым, так как оно

линейное векторное и в нем определено скалярное

произведение элементов.

# ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В любом евклидовом пространстве определяют:

- *длину* вектора:

$$|a| = \sqrt{(a,a)}$$

- *расстояние между двумя векторами:*

$$\rho(a;b) = |a-b|$$

- *косинус угла между векторами* $a$ *и* $b$ *:*

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$$

# Ортогональные элементы. Ортонормированный базис

**Определение.** Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства $L$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ при любых $1 \le i < j \le n$

**Определение.** Ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства $L$ называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_i) = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n$

# ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ БАЗИСА

- Пусть – $f_1, f_2, \ldots, f_n$ базис в евклидовом пространстве $L$. Тогда векторов, вычисленных по формулам

$$e_1 = f_1 \qquad e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i e_i \qquad k = 2, \ldots n$$

где $$c_i = \frac{(f_k; e_i)}{(e_i; e_i)}, \quad k = 2, \ldots n,$$

образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве $L$.

# ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ БАЗИСА

Процесс построения указанным способом ортогонального базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ по некоторому данному $f_1, f_2, \ldots, f_n$ базису называется процессом ортогонализации Шмидта.

**Определение.** Нормированием вектора $a$ называется замена его вектором $\frac{a}{|a|}$, имеющим длину, равную 1.

# Примеры

Выяснить, являются ли векторы

$$a_1 = (1;3;1;3);\ a_2 = (2;1;1;2);\ a_3 = (3;-1;1;1);$$

линейно зависимыми.

***Решение.*** Составим матрицу, у которой, например,

строками являются векторы $a_1; a_2; a_3$. Приведем

ее к ступенчатому виду:

# Примеры

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}(-3)(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} :(-5) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг системы векторов  равен двум.

**Ответ** : Векторы линейно зависимые.

# Примеры

**Пример 2.** Показать, что векторы

$$a = (1; 2; 3),\ b = (3; 2; 1) \ \text{ и } \ c = (1; 0; 1)$$

образуют базис в пространстве $R^3$. Найти координаты вектора $m = (-1; 6; 13)$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются данные в примере векторы. Приведем ее к ступенчатому виду:

# Примеры

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}(-2)(-3) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}(-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг матрицы, составленной из векторов $a$, $b$, $c$, равен трём; векторы $a$, $b$, $c$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $R^3$.

Тогда вектор $m = (-1; 6; 13)$ должен разлагаться по этому базису:

$$m = x_1 a + x_2 b + x_3 c$$

Т.е. координаты данного разложения удовлетворяют линейной системе алгебраических уравнений:

# Примеры

$$\begin{cases} -1 = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 6 = 2x_1 + 2x_2 \\ 13 = 3x_1 + x_2 + x_3. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right)(-2)(-3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & -8 & -2 & 16 \end{array}\right)(-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)(1/2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)(2)(-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)(-1/4) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)(-3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0$$

# Примеры

Итак, вектор $m$ в базисе $a$, $b$, $c$ имеет координаты: $(5;-2;0)$.
Отсюда заключаем:

$$m = 5a - 2b.$$

**О т в е т:** $a$, $b$, $c$ – базис пространства $R^3$; $m = 5a - 2b$.

**П р и м е р 3.** Найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = (1;1;0),\ e_2 = (2;0;1),\ e_3 = (0;1;1)$$

к базису

$$f_1 = (1;1;1),\ f_2 = (2;0;0),\ f_3 = (0;0;2).$$

**Р е ш е н и е.** Найдем координаты $x_1, x_2, x_3,$ $y_1, y_2, y_3$ и $z_1, z_2, z_3$ векторов $e_1, e_2, e_3$ в базисе $f_1, f_2, f_3$:

$$e_1 = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3,$$
$$e_2 = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3,$$
$$e_3 = z_1 f_1 + z_2 f_2 + z_3 f_3.$$

Рассматривая каждое уравнение в отдельности, получим три системы, соответственно, для координат $x_1, x_2, x_3,$ $y_1, y_2, y_3$ и $z_1, z_2, z_3$ :

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ y_1 = 0 \\ y_1 + 2y_3 = 1, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 0 \\ z_1 = 1 \\ z_1 + 2z_3 = 1. \end{cases}$

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = -1/2,$$
$$y_1 = 0; \qquad y_2 = 1; \qquad y_3 = 1/2,$$
$$z_1 = 1; \qquad z_2 = -1/2; \qquad z_3 = 0.$$

Таким образом, вектор $e_1$ имеет в базисе $f_1$, $f_2$, $f_3$ координаты $(1;0;-1/2)$, вектор $e_2$ — $(0;1;1/2)$ и $e_3$ — $(1;-1/2;0)$.

Значит, матрица перехода от базиса $e_1, e_2, e_3$ к базису $f_1$, $f_2$, $f_3$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ответ** : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$