Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижневартовский государственный университет»

Понятие графа. Способы описания графов

Белокурова Елена Викторовна, доцент, к.э.н.

План

1. Предмет и задачи теории графов.
2. Понятие графа.
3. Способы описания графов.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто бывает полезно изобразить структуру системы в виде рисунков, составленных из точек (вершин) и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними.

Такие рисунки известны под общим названием графов

Для IT-студентов нужно сразу сказать, что списки (стеки, очереди) и бинарные деревья это графы. И всякие схемы, типа схемы метро, автодорог, принципиальные в электронике можно рассматривать как графы. Приложения теории графов — это фундаментальные свойства всяких подобных схем.

Граф – это множество точек, называемых **вершинами**, и множество линий, называемых **ребрами**, которые соединяют пары вершин (или вершину саму с собой).

ВВЕДЕНИЕ

- Граф-модели применяются для эффективного использования ресурсов вычислительной системы (оптимизация использования памяти,
- уменьшение обменов между оперативной и внешней памятью и т. д.),
- организации больших массивов информации (графы данных для повышения эффективности информационного поиска),
- повышения эффективности работы компьютерных систем (распределение процессоров, обмен сообщениями между ними, синхронизация).

План

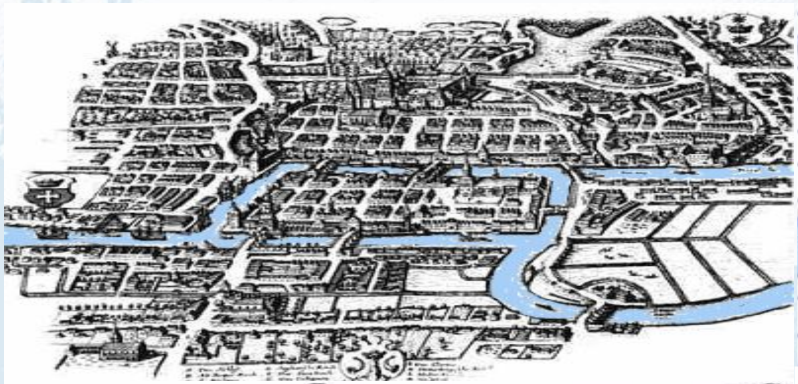
1. Предмет и задачи теории графов.
2. Понятие графа.
3. Способы описания графов.

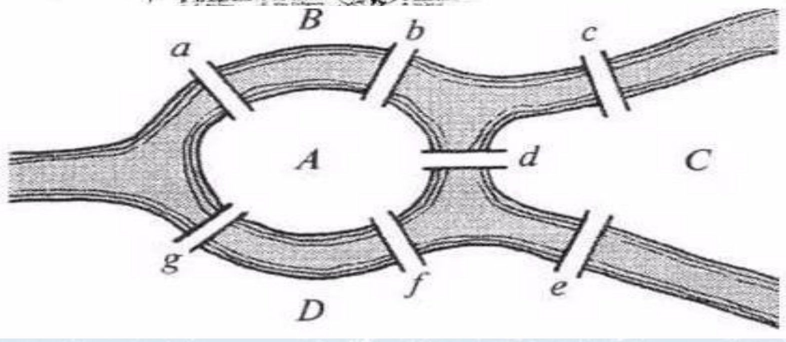
ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

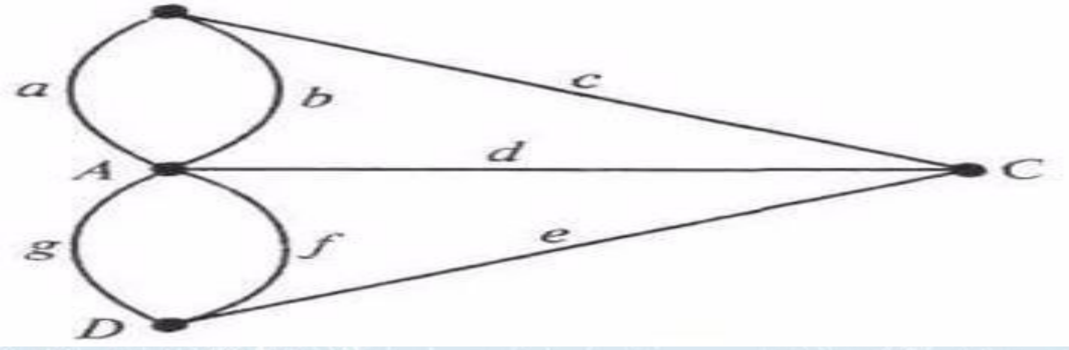
- Определения. Основные понятия. Способы задания графов
- Основные типы графов
- Операции над графами
- Маршруты, цепи, циклы
- Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры
- Остовное дерево. Алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева
- Эйлеровы и гамильтоновы графы
- Раскраска графов
- Задача о максимальном потоке
- Задача о коммивояжере

ПОНЯТИЕ ГРАФА

Основной объект теории графов — граф и его обобщения

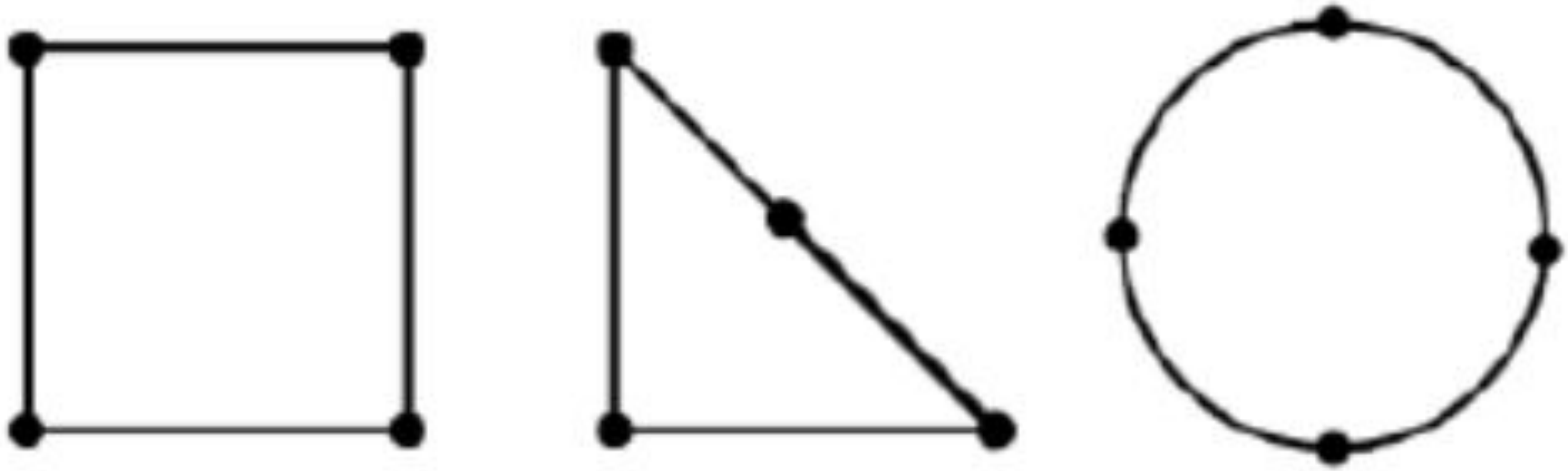






ПОНЯТИЕ ГРАФА

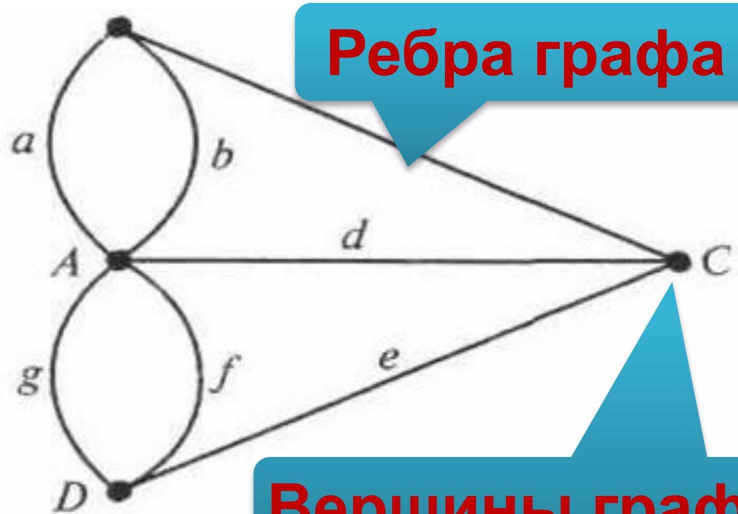
При изображении графов на рисунках или схемах отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными. Длины отрезков и расположение точек произвольны.



все три фигуры изображают один и тот же граф

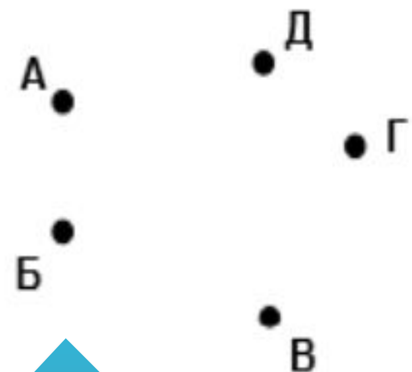
ПОНЯТИЕ ГРАФА

Геометрическое представление графа — это схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых

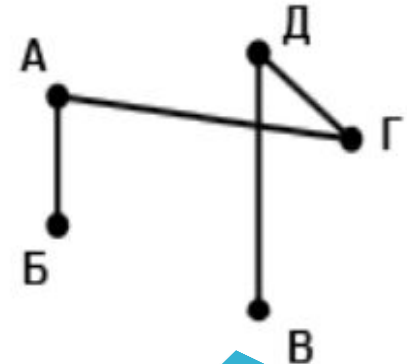


Ребра графа

Вершины графа



Нулевой граф



Неполный граф

схема, состоящая из «изолированных» вершин, называется **нулевым** графом.

Графы, в которых построены не все возможные рѐбра, называются **неполными** графами

Вершина - точка в графе, отдельный объект, для топологической модели графа не имеет значения координата вершины, её расположение, цвет, вкус, размер; однако при решении некоторых задачах вершины могут раскрашиваться в разные цвета или сохранять числовые значения.

Ребро - неупорядоченная пара двух вершин, которые связаны друг с другом. Эти вершины называются концевыми точками или концами ребра. При этом важен сам факт наличия связи, каким именно образом осуществляется эта связь и по какой дороге - не имеет значения; однако рёбра может быть присвоен "вес", что позволит говорить о "нагруженном графе" и решать задачи оптимизации.

Смежность вершин - две вершины называются смежными, если они инцидентны одному ребру.

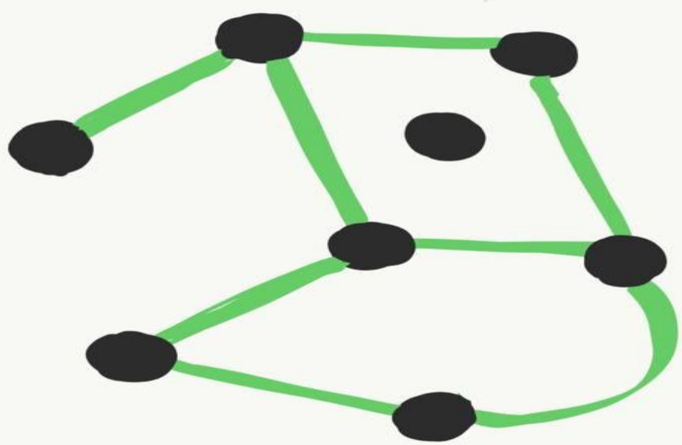
Смежность рёбер - два ребра называются смежными, если они инцедентны одной вершине.

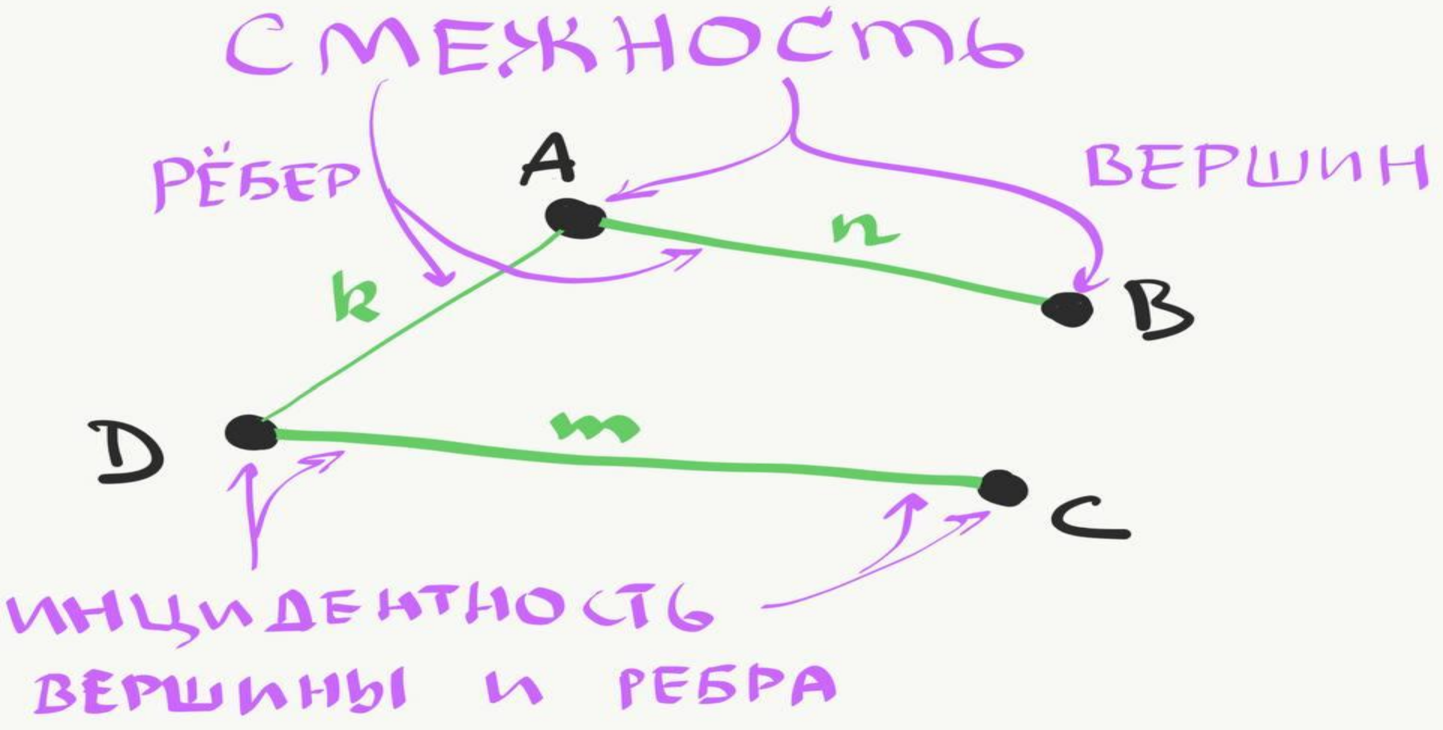
Говоря проще - две вершины смежные, если они соединены ребром, два ребра смежные - если они соединены вершиной.

ГРАФ ВЕРШИНЫ

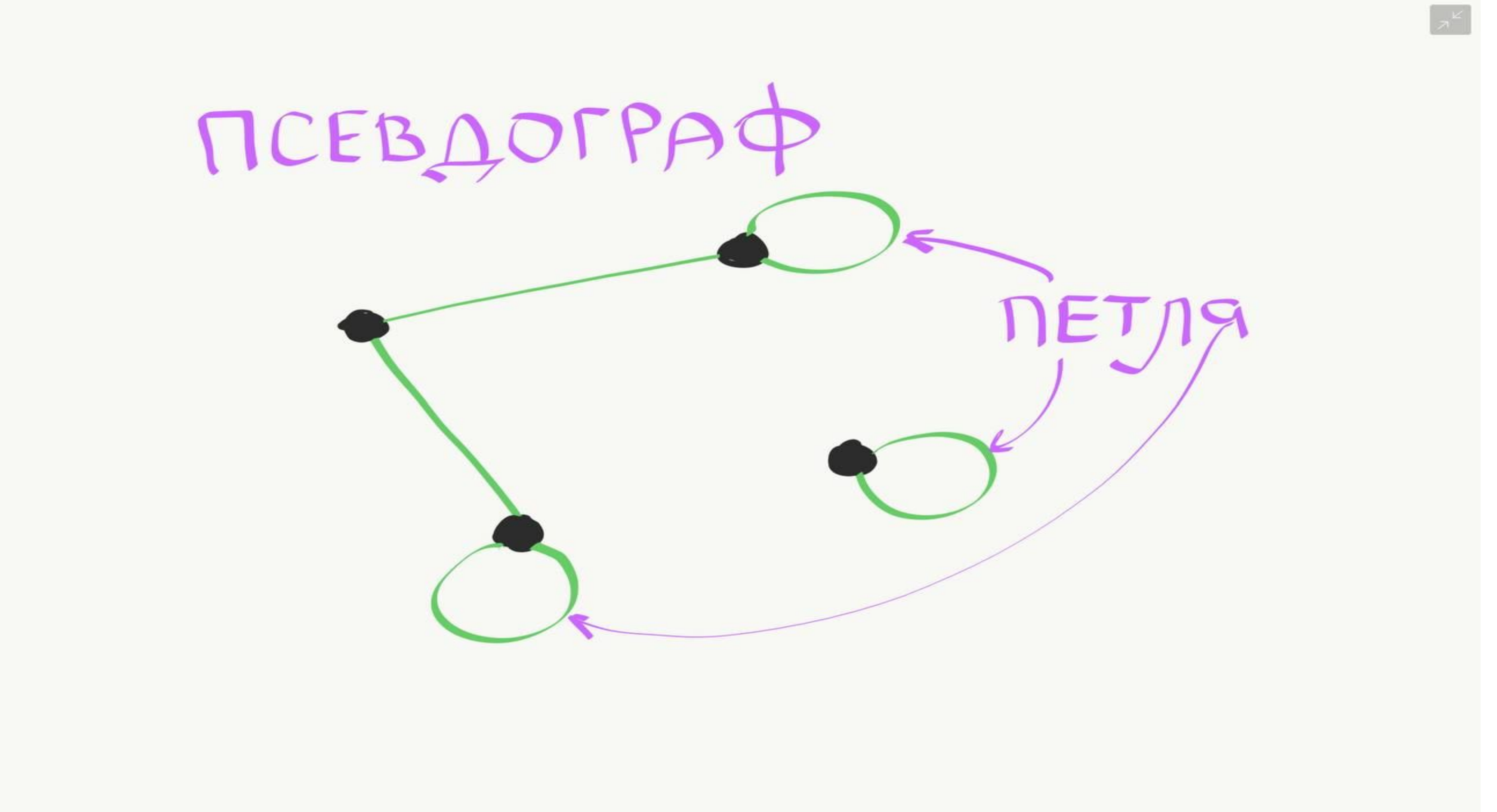
$$G = \{V, E\}$$

РЁБРА

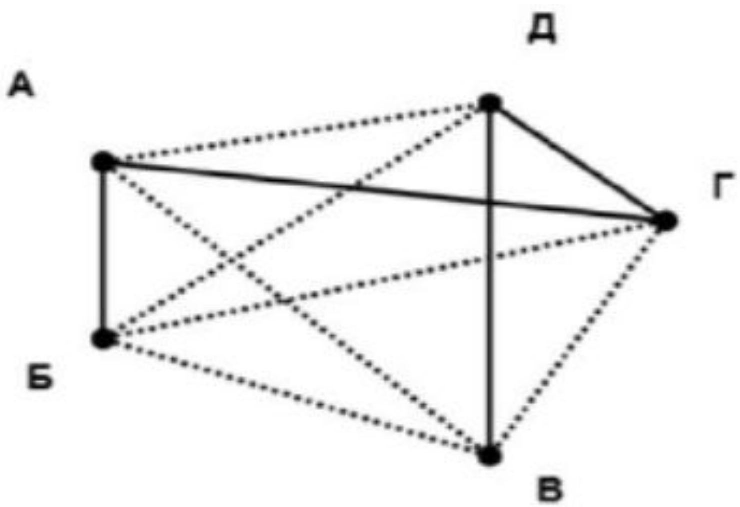


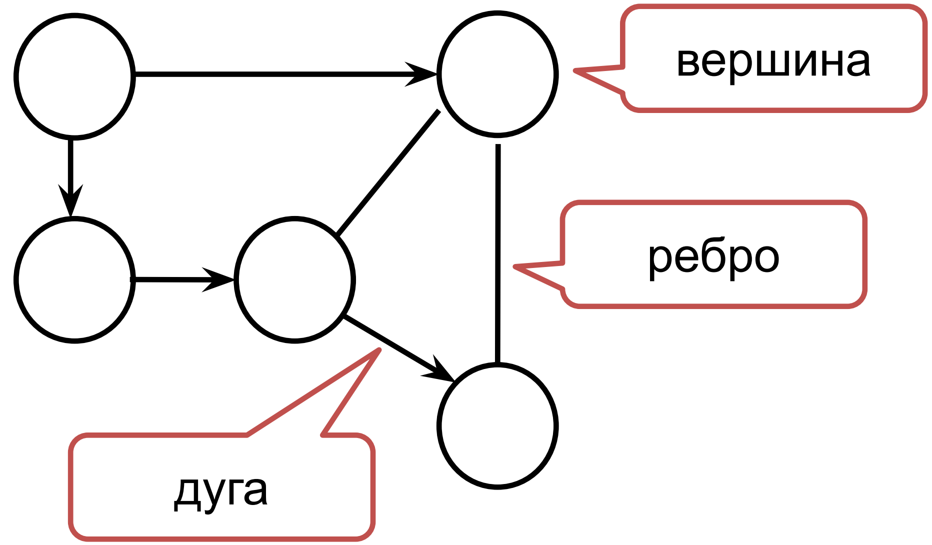

СМЕЖНОСТЬ
РЁБЕР
ВЕРШИН
A
n
B
k
D
m
C
ИНЦИДЕНТНОСТЬ
ВЕРШИНЫ И РЕБРА

Петля - ребро, инцидентное одной вершине. Ребро, которое замыкается на одной вершине.
Псевдограф - граф с петлями. С такими графами не очень удобно работать, потому что переходя по петле мы остаёмся в той же самой вершине, поэтому у него есть своё название.



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ



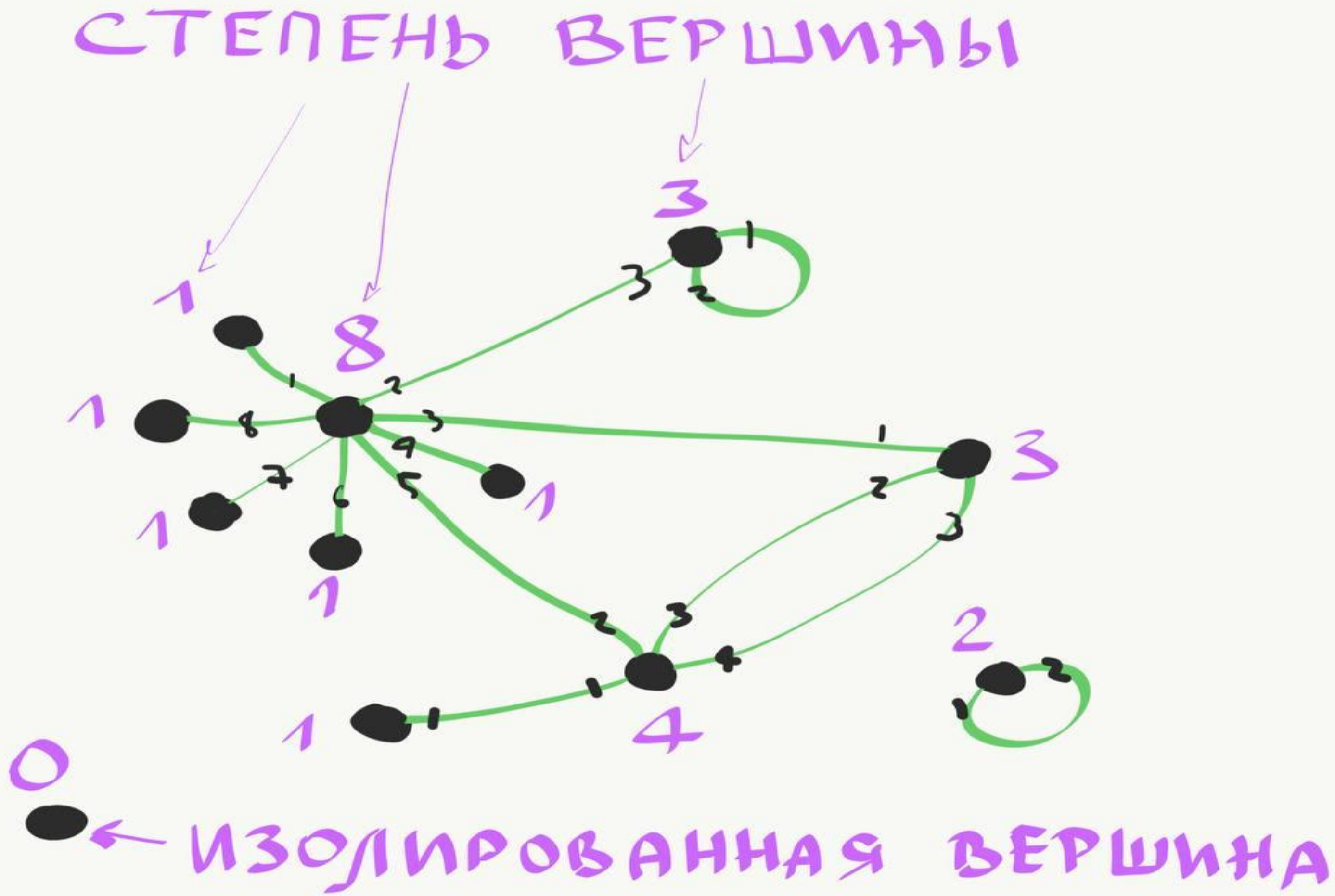


Связи между элементами изображаются на графе линиями. Если линия **направленная**, то она называется **дугой**. Если нет, то это **ребро**.

Инцидентность - вершина и ребро называются инцидентными, **если вершина является для этого ребра концевой**. Это когда вершина a является началом или концом ребра t. Если мы добавим еще одну вершину b, то мы скажем, что вершина a и b инцидента ребру t.

Изолированные вершины — это такие вершины, которые не имеют инцидентных рёбер (вершина с нулевой степенью).

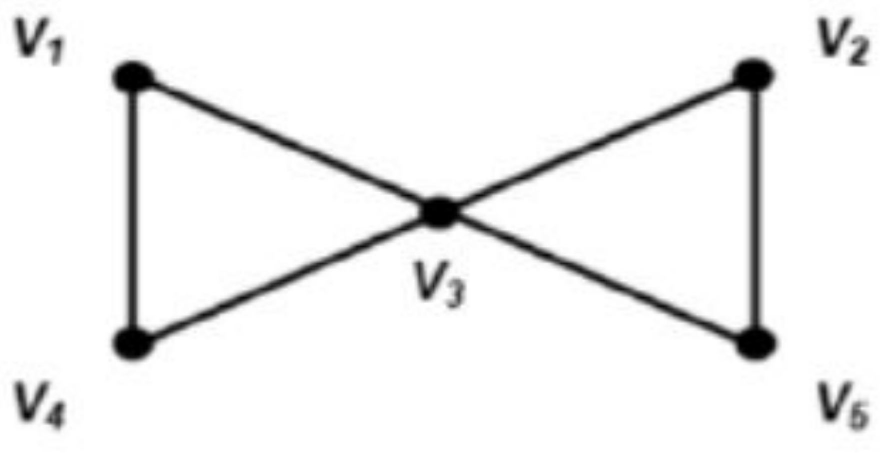
Висячие вершины — это такие вершины, которые имеют только одно инцидентное ребро (вершина со степенью 1).


СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ
ИЗОЛИРОВАННАЯ ВЕРШИНА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА

Графом **G(V, E)** называется **совокупность** двух множеств — непустого множества **V (множества вершин)** и множества E двухэлементных подмножеств множества V **(E — множество рѐбер)**

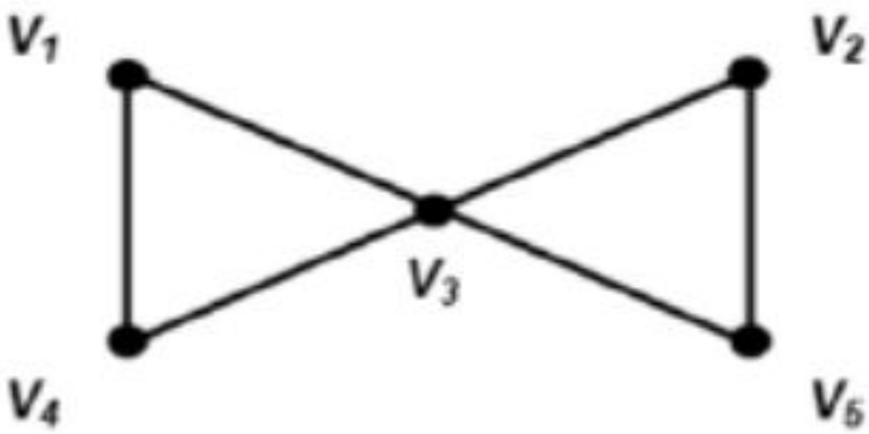
Ребро и любая из его двух вершин называются **инцидентными**.
Под **степенью вершины** подразумевается количество инцидентных ей рѐбер



Две вершины называются **смежными**, если они соединены ребром (дугой)

МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

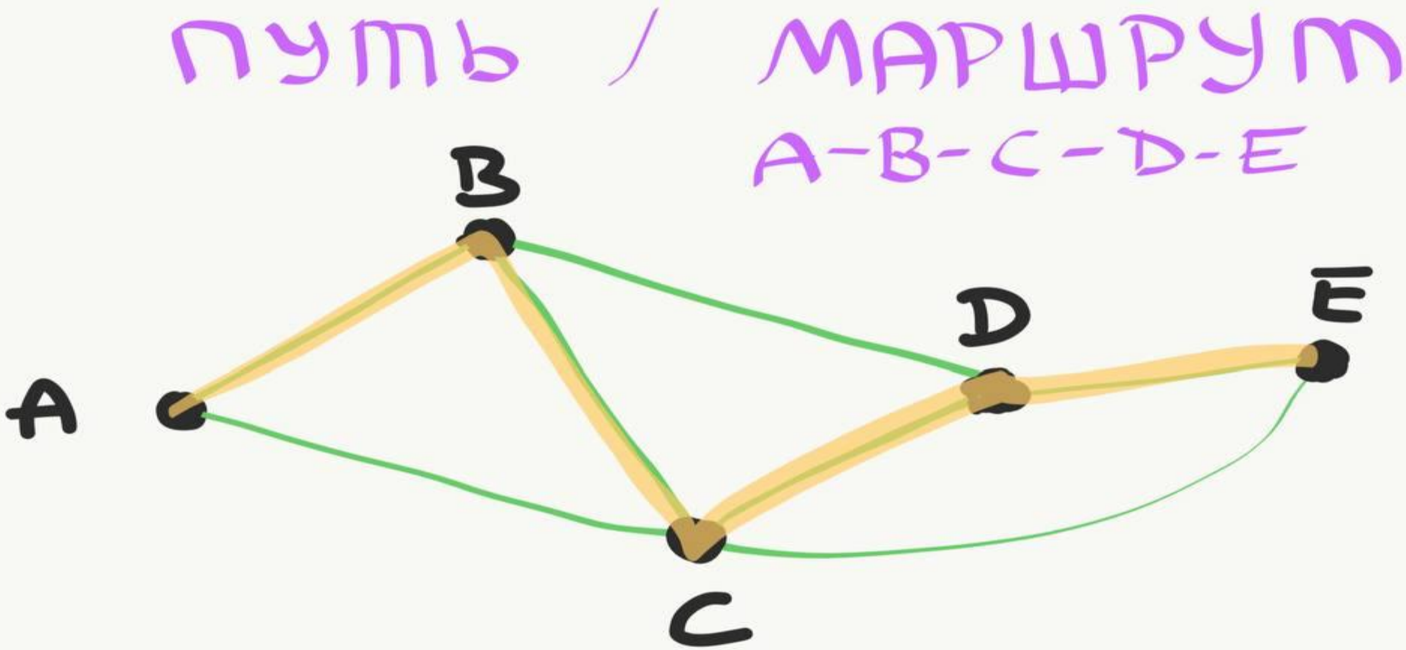
Маршрут графа — это чередующаяся последовательность вершин и рѐбер. Обычно путь задаётся перечислением вершин, по которым он пролегает.



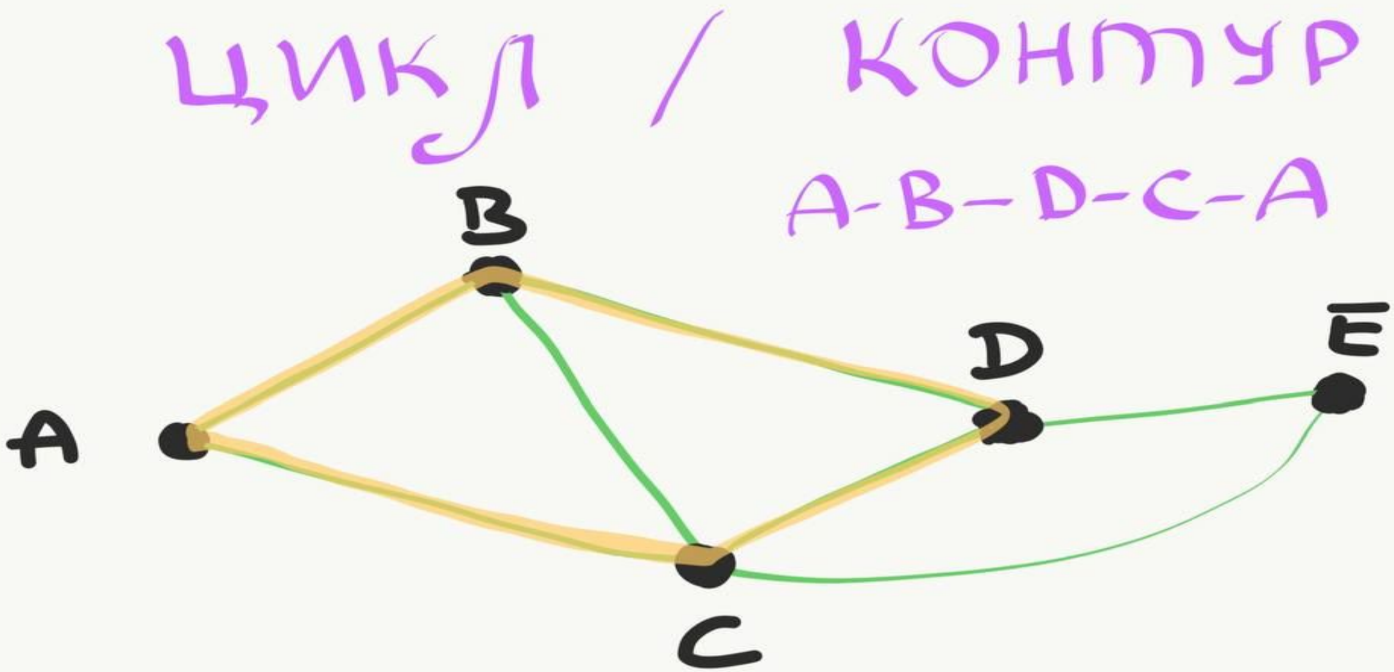
Петлѐй называется ребро, у которого начальная и конечная вершины совпадают.

Маршрут является **замкнутым (циклом)**, если его **начальная** и **конечная** вершины **совпадают**
Если все ребра **различны**, то маршрут называется цепью

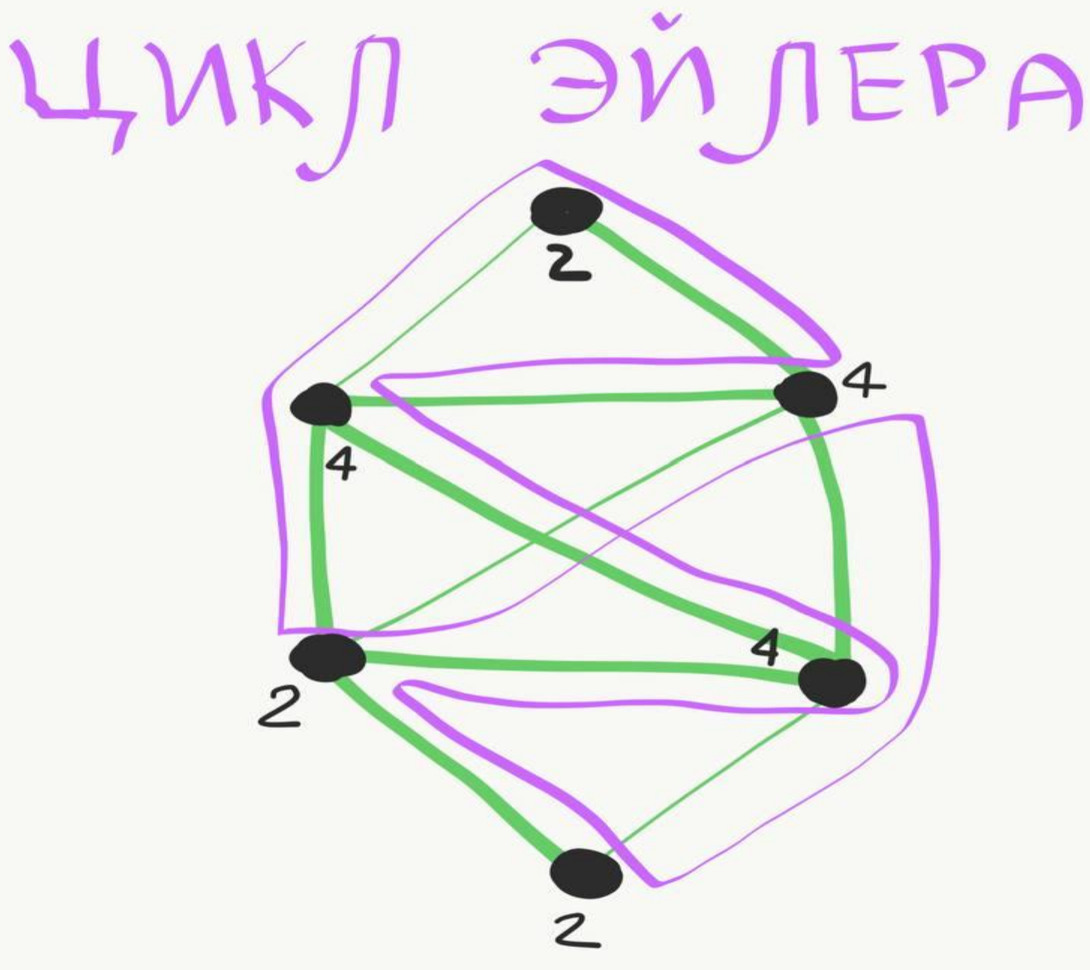
Длина пути - количество рёбер в пути.
Цепь - маршрут без повторяющихся рёбер.
Простая цепь - цепь без повторяющихся вершин.



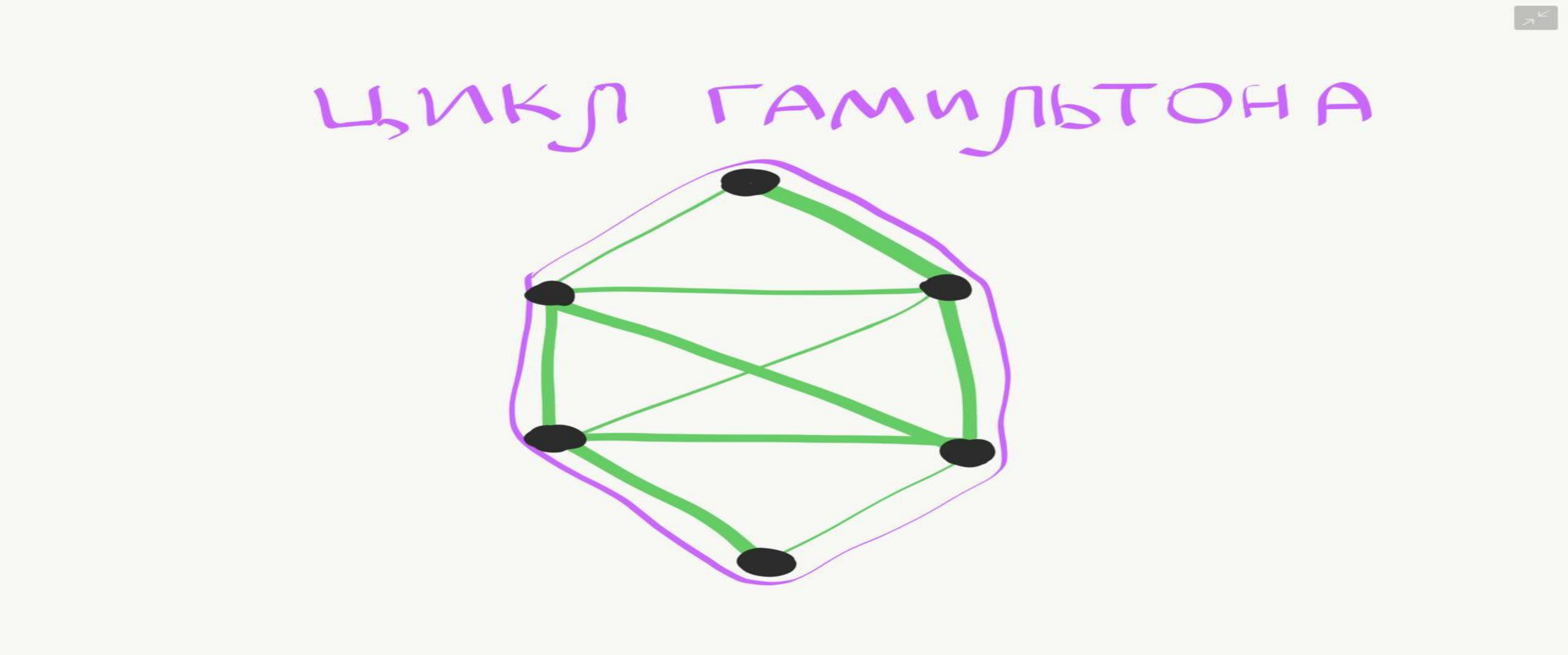
Цикл или **Контур** - цепь, в котором последняя вершина совпадает с первой.
Длина цикла - количество рёбер в цикле.
Самый короткий цикл - это петля.



Цикл Эйлера - цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Эйлер доказал, что такой цикл существует тогда, и только тогда, когда все вершины в связанном графе имеют чётную степень.

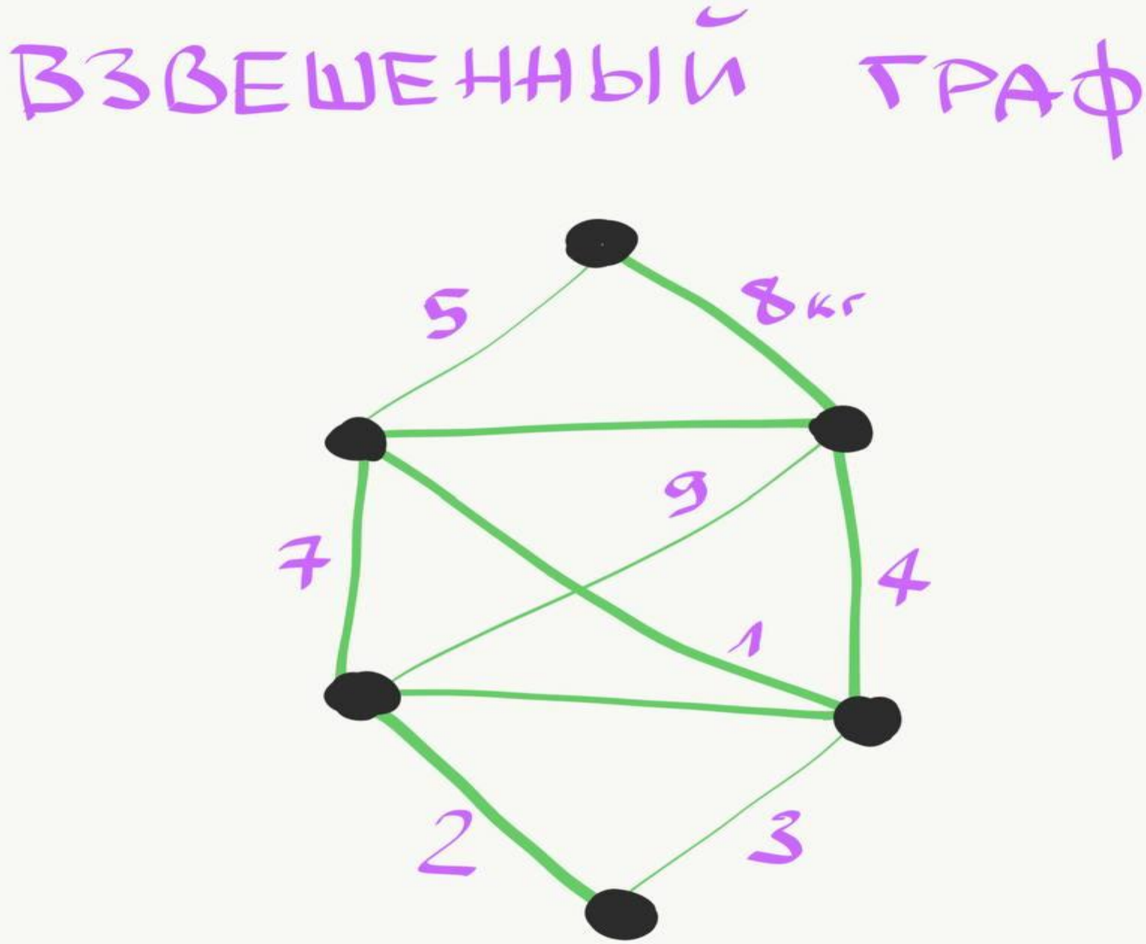


Цикл Гамильтона - цикл, проходящий через все вершины графа по одному разу. Другими словами - это простой цикл, в который входят все вершины графа.

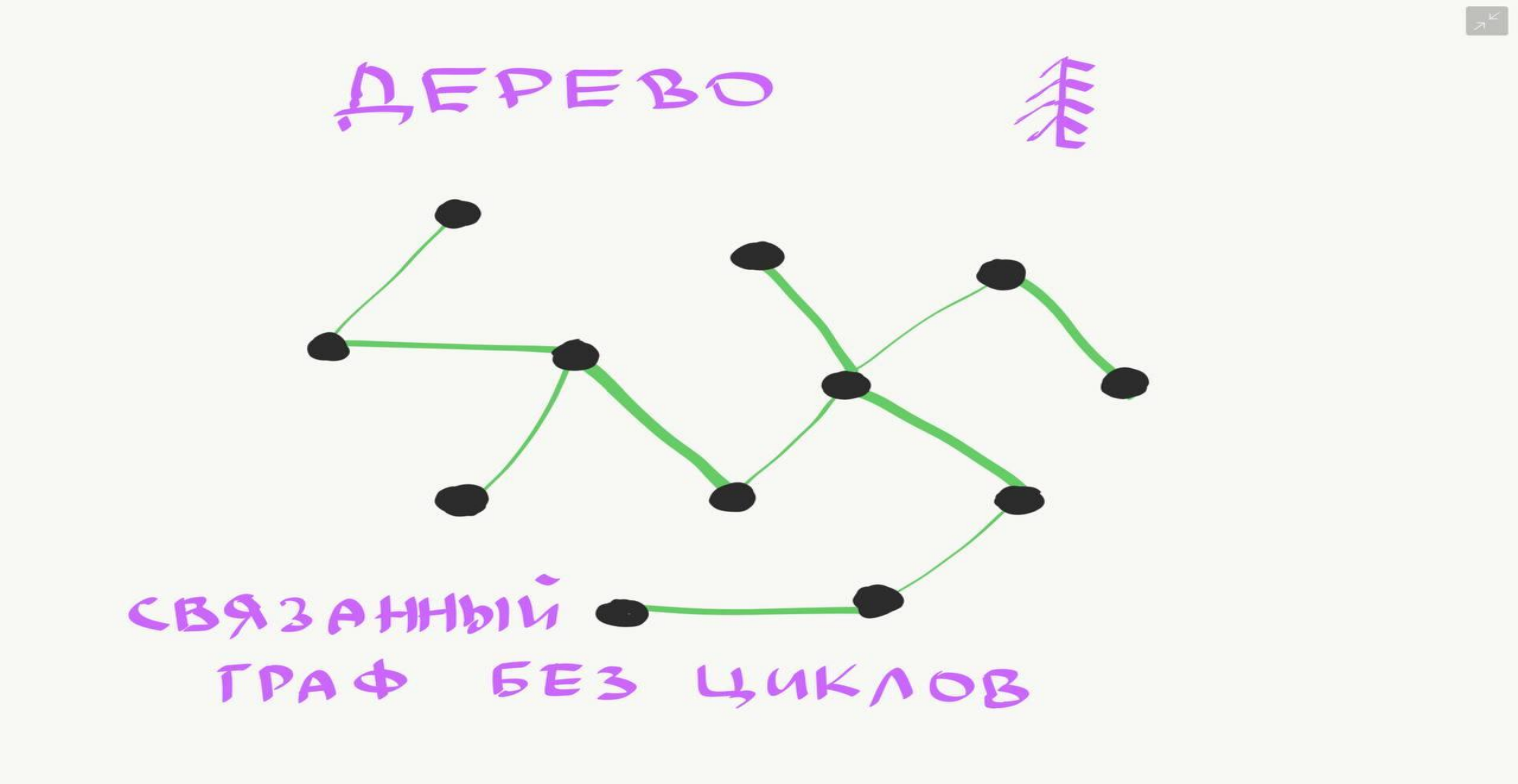


Пока ещё не придуман алгоритм, который за полиномиальное время нашёл бы кратчайший цикл Гамильтона в полном нагруженном графе, однако есть несколько приближённых алгоритмов, которые за приемлимое время находят если не кратчайший, то очень короткий цикл, эти алгоритмы рассматриваются на курсе Отуса - "Алгоритмы и структуры данных".

Взвешенный граф - граф, в котором у каждого ребра и/или каждой вершины есть “вес” - некоторое число, которое может обозначать длину пути, его стоимость и т. п. Для взвешенного графа составляются различные алгоритмы оптимизации например поиск кратчайшего пути.

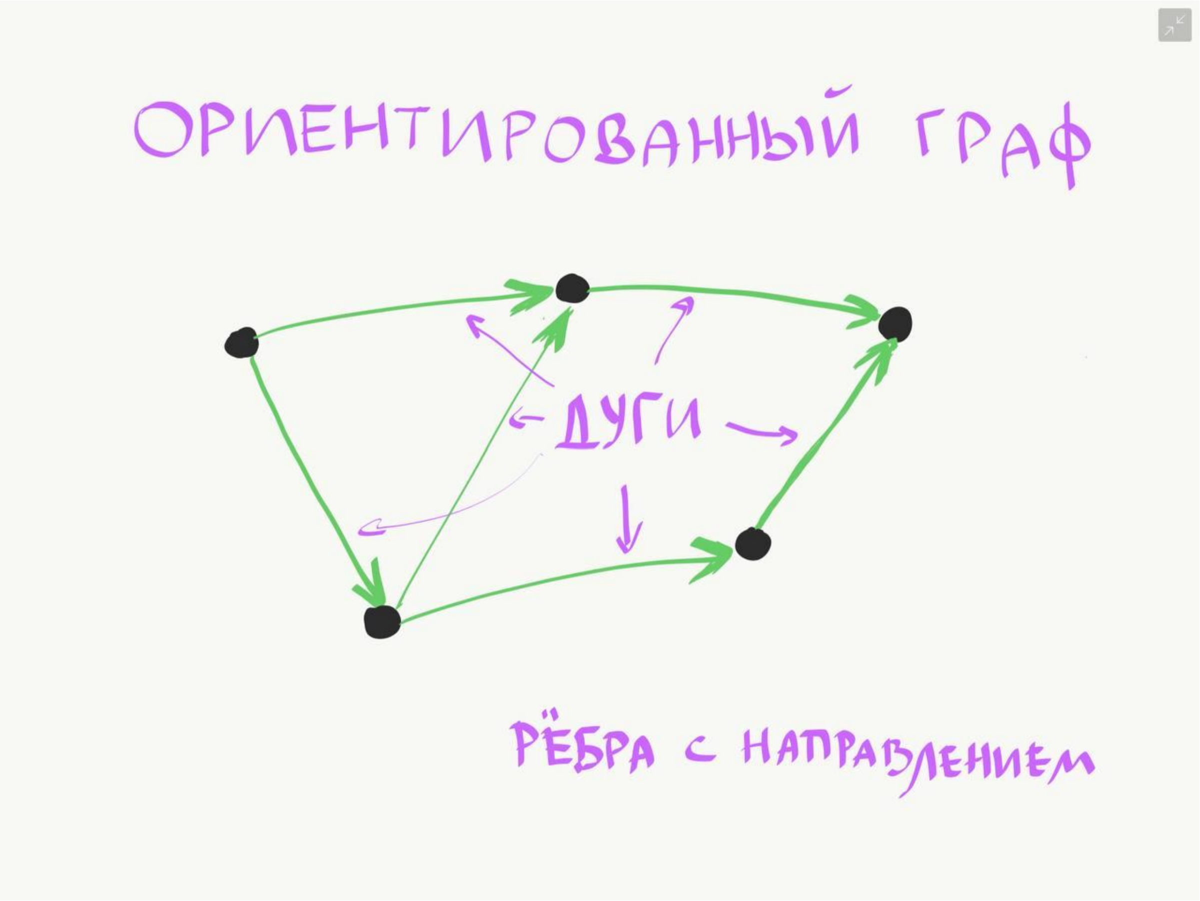


Связный граф - граф, в котором существует путь между любыми двумя вершинами.
Дерево - связный граф без циклов.
Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный путь.
Деревья часто используются для организации иерархической структуры данных, например, при создании двоичных деревьев поиска или кучи, в этом случае одну вершину дерева называют корнем.

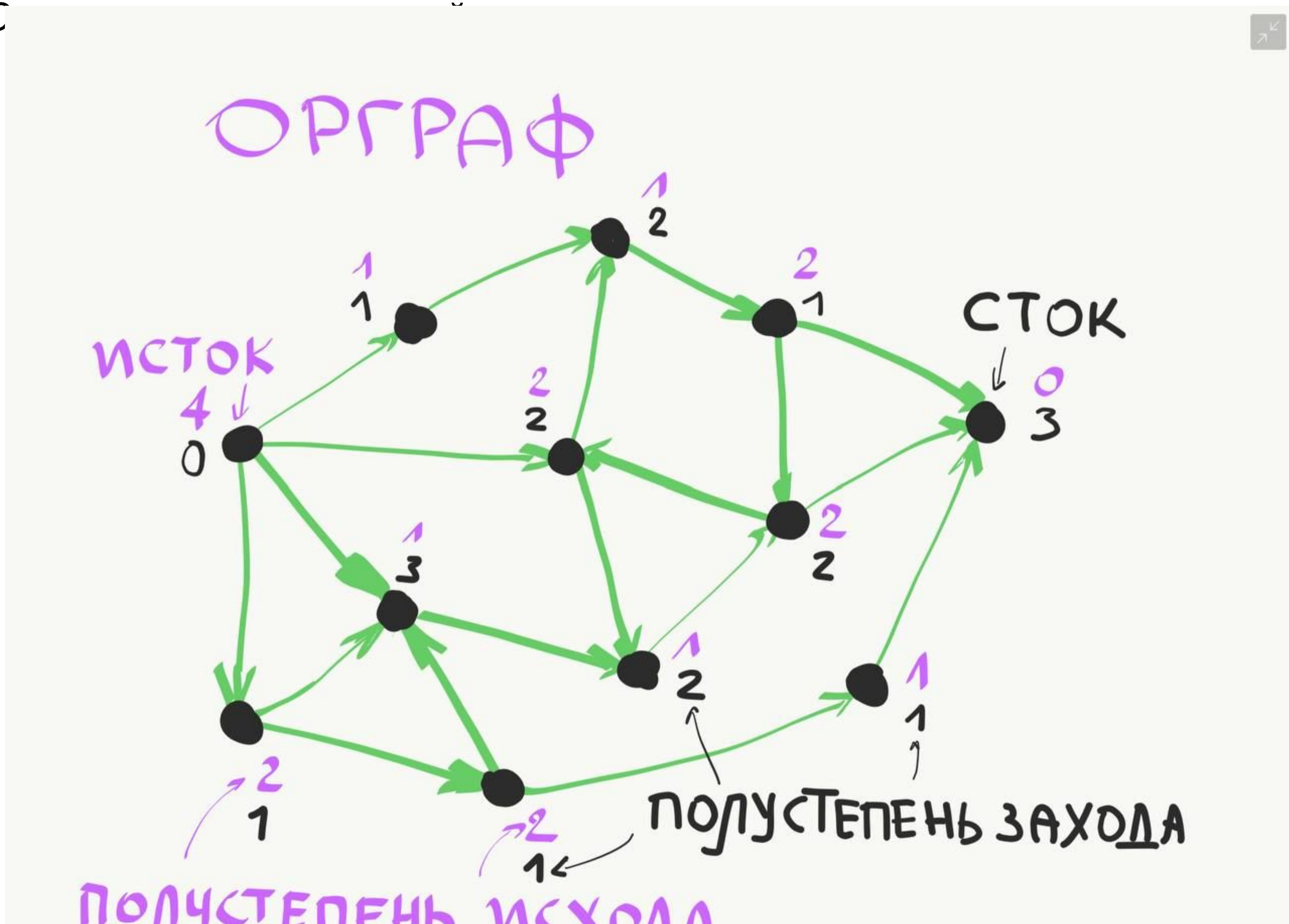


Лес - граф, в котором несколько деревьев.

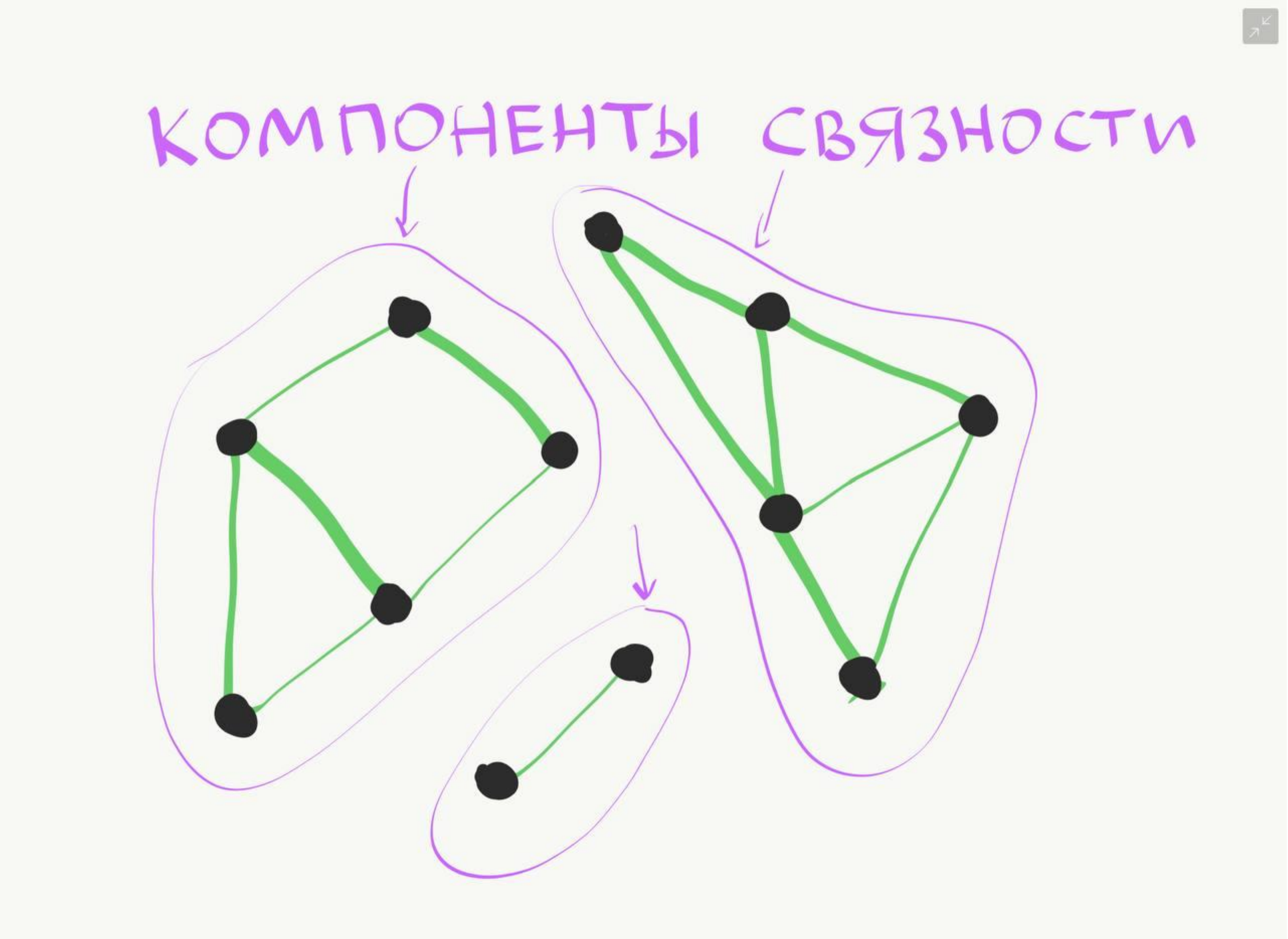
Ориентированный граф или Орграф - граф, в котором рёбра имеют направления.
Дуга - направленные рёбра в ориентированном графе.



Полустепень захода вершины - количество дуг, заходящих в эту вершину.
Исток - вершина с нулевой полустепенью захода.
Полустепень исхода вершины - количество дуг, исходящих из этой вершины

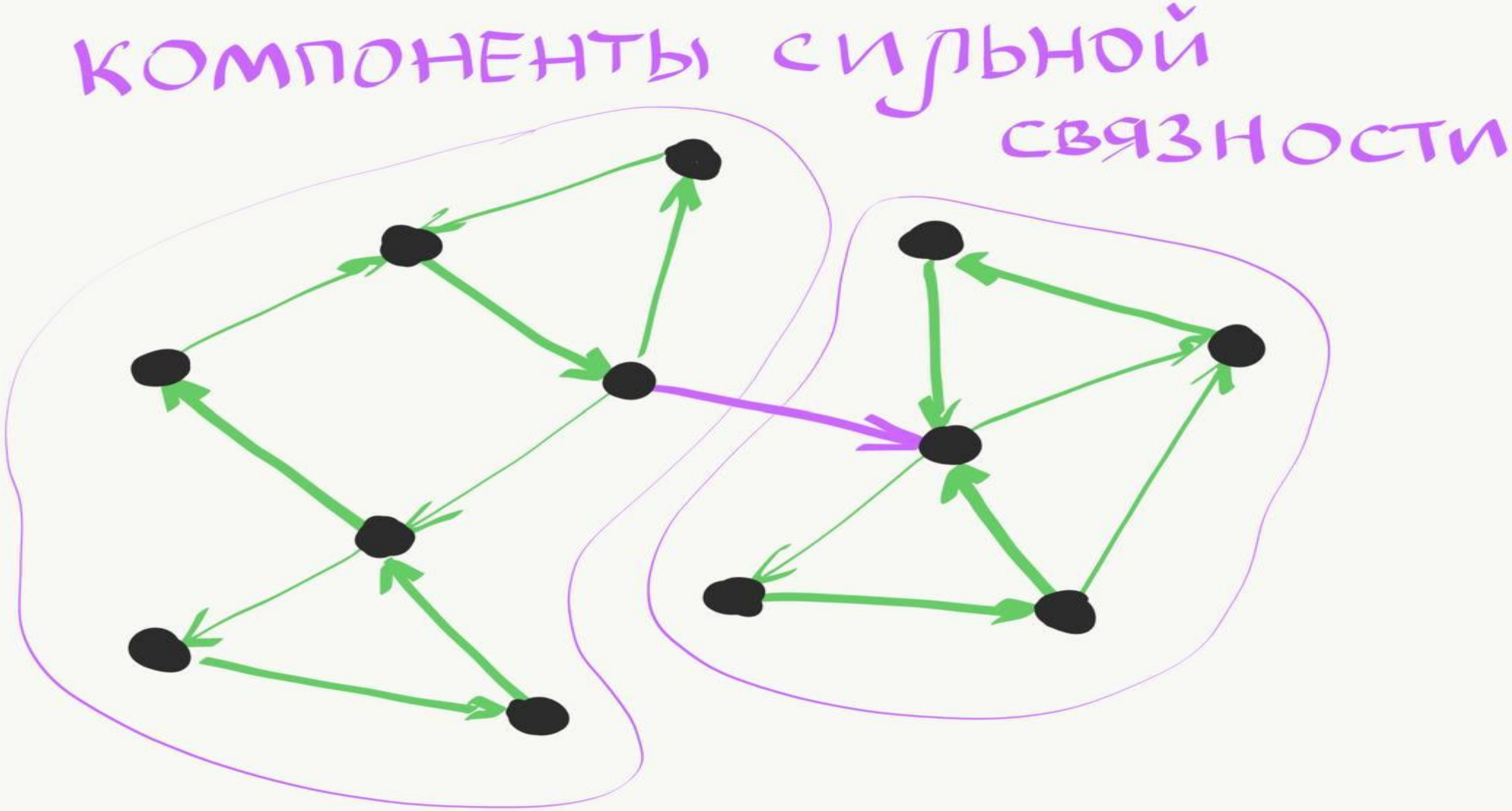


Компонента связности - множество таких вершин графа, что между любыми двумя вершинами существует маршрут.

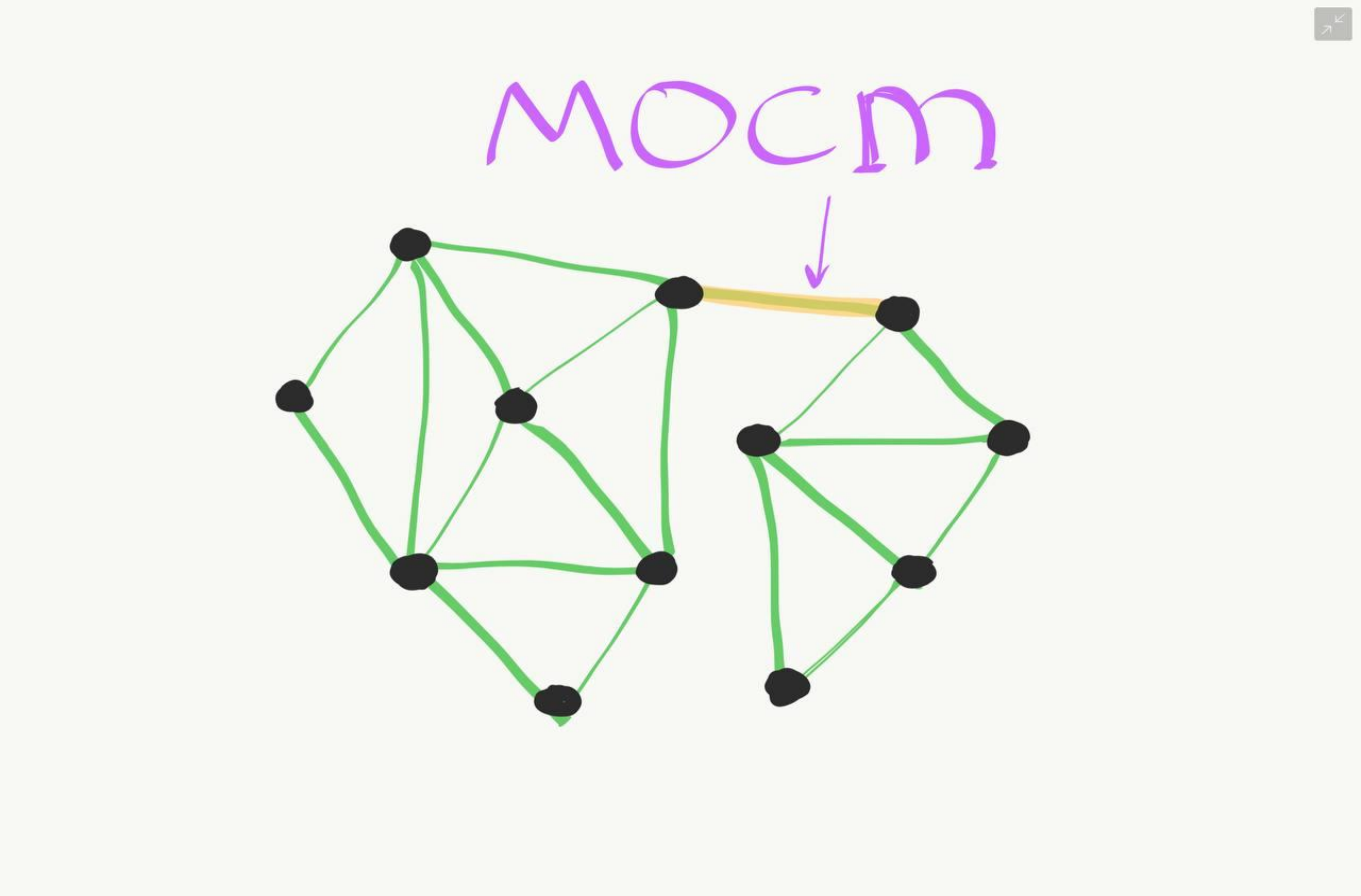


Компонента сильной связности - максимальное множество вершин орграфа, между любыми двумя вершинами которого существует путь по дугам.

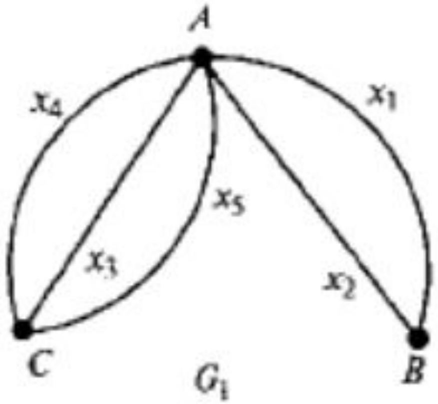
Компонента слабой связности - максимальное множество вершин орграфа, между любыми двумя вершинами которого существует путь по дугам без учёта направления (по дугам можно двигаться в любом направлении).



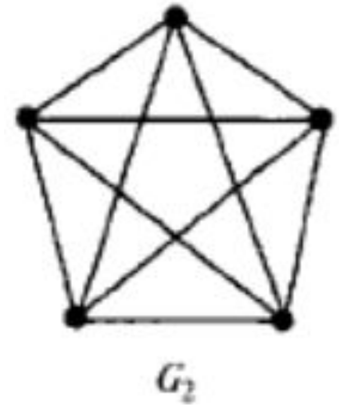
Мост - ребро, при удалении которого, количество связанных компонент графа увеличивается.



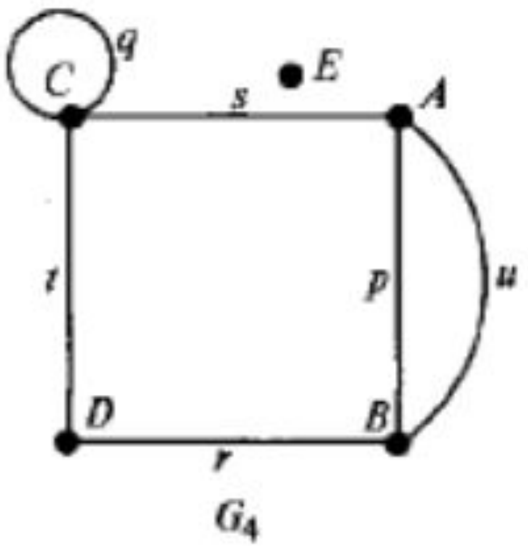
ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



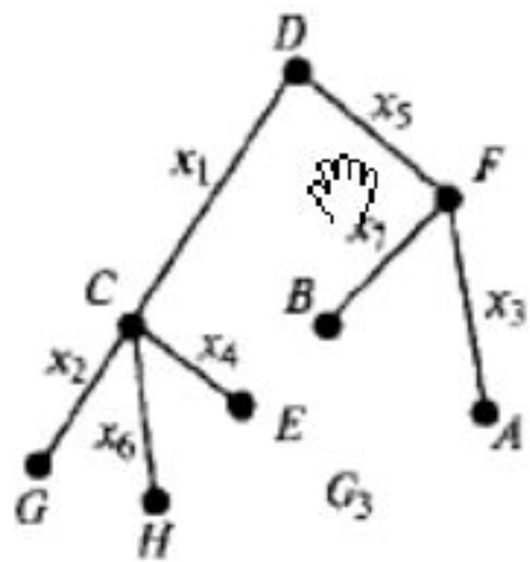
со смежными вершинами



полный



с петлей

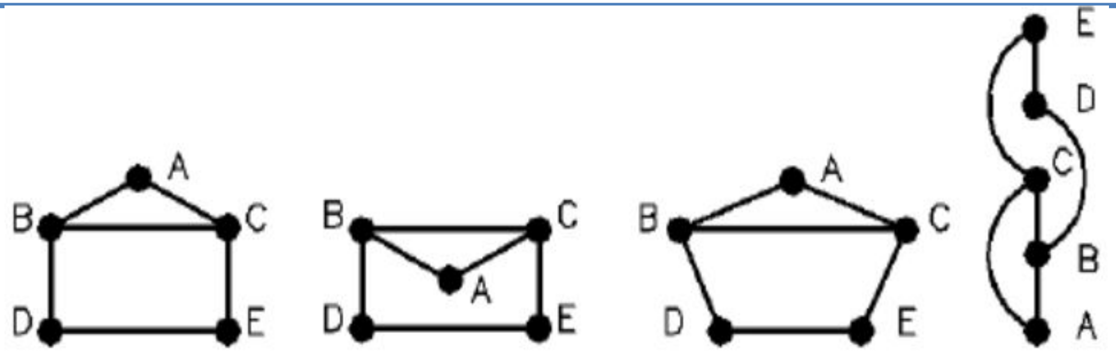


С висячими вершинами

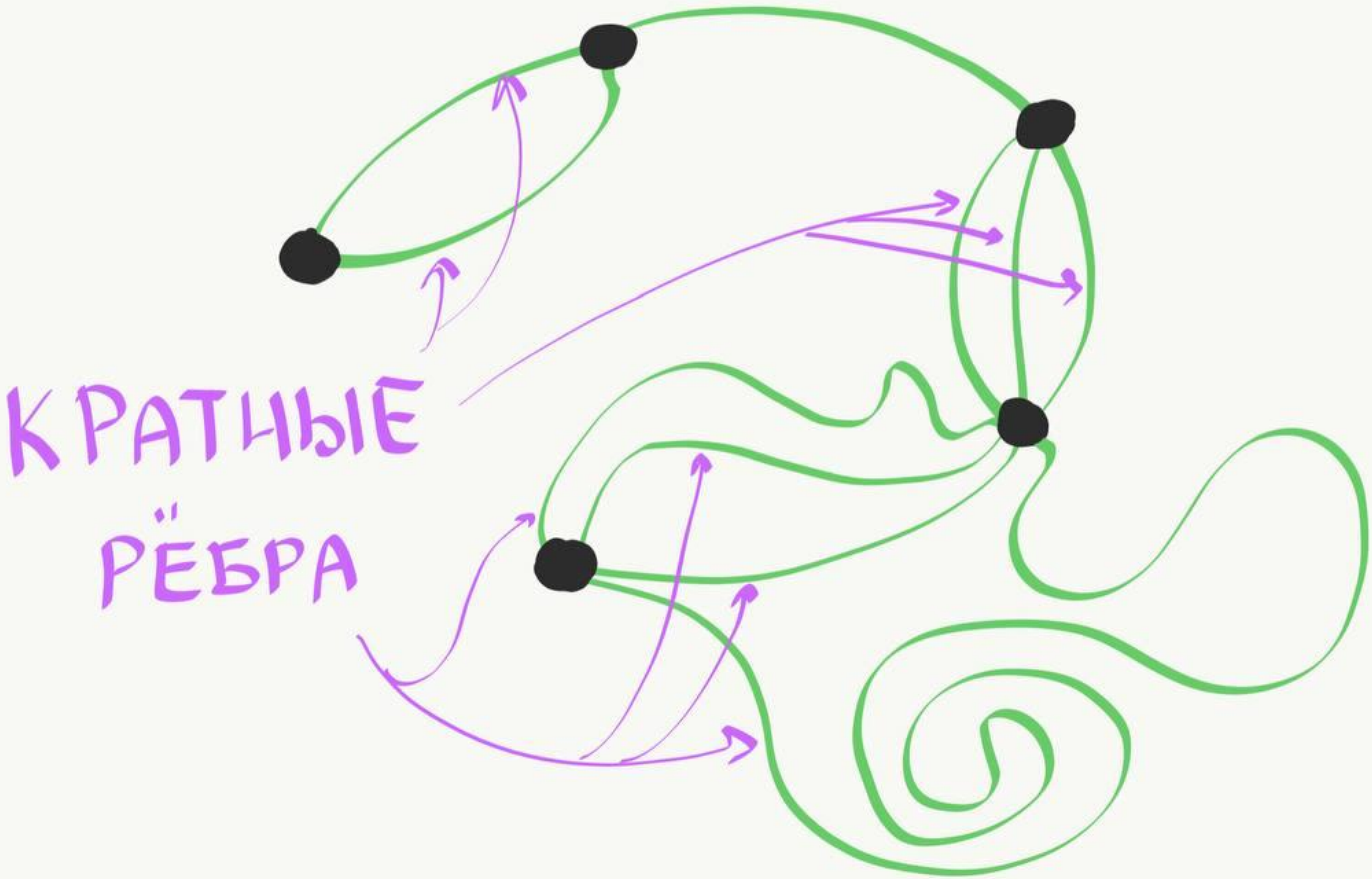
Изолированные вершины — это такие вершины, которые не имеют инцидентных рёбер
Висячие вершины — это такие вершины, которые имеют только одно инцидентное ребро.

Мультиграфом называется граф, в котором пара вершин соединяется несколькими различными рёбрами. Для ориентированного мультиграфа вершины v_i и v_j могут соединяться несколькими рёбрами в каждом из направлений.

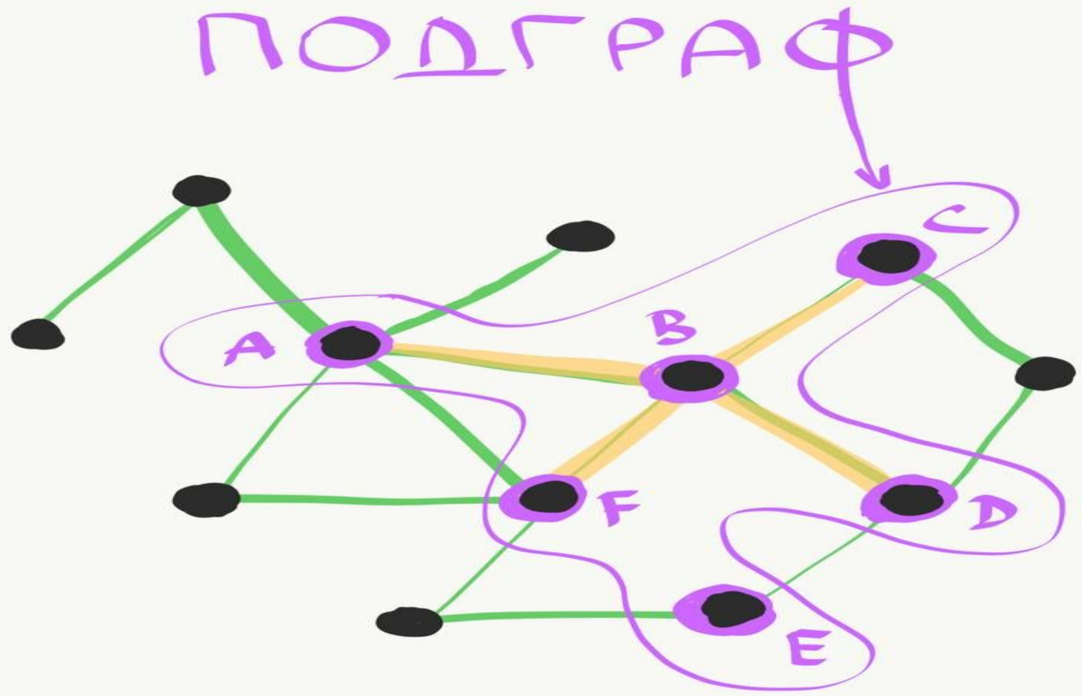
Графы называют **изоморфными**, если они имеют одинаковое число вершин, причем их ребра соединяют только соответствующие друг другу вершины



МУЛЬТИГРАФ

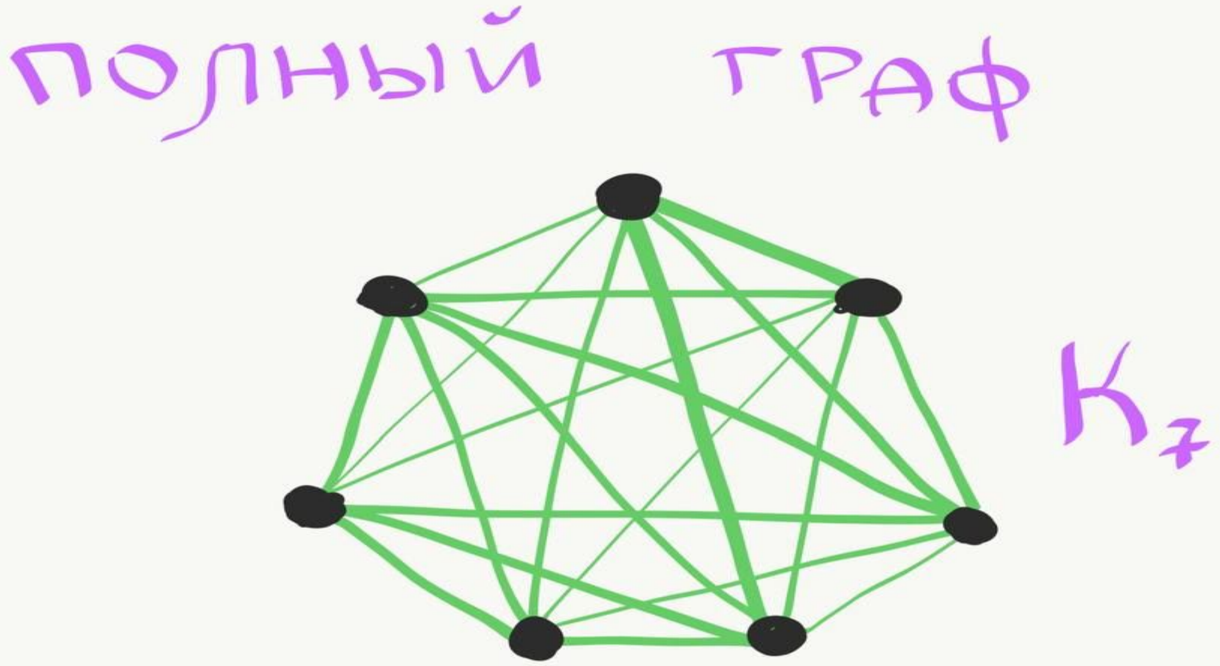


Подграф. Если в исходном графе выделить несколько вершин и несколько рёбер (между выбранными вершинами), то мы получим подграф исходного графа.



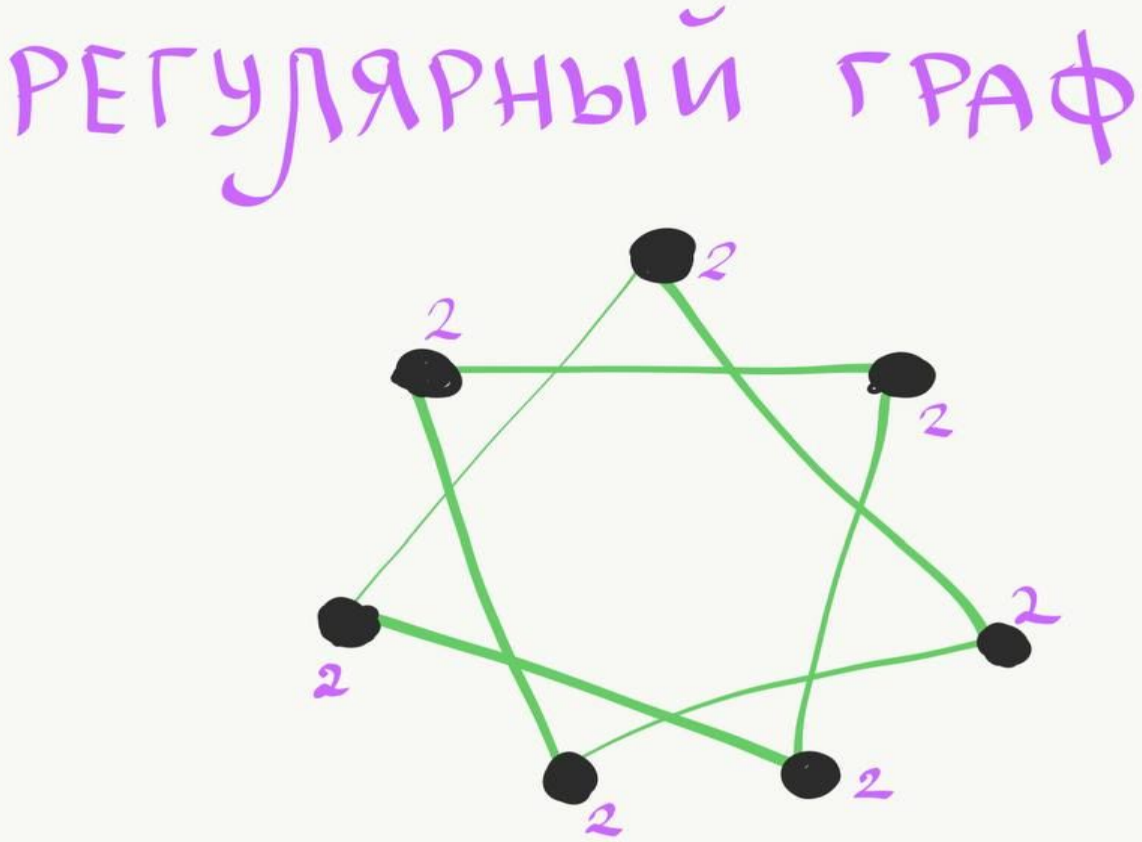
Идея подграфов используется во многих алгоритмах, например, сначала создаётся подграф их всех вершин без рёбер, а потом дополняется выбранными рёбрами.

Полный граф - это граф, в котором каждые две вершины соединены одним ребром.

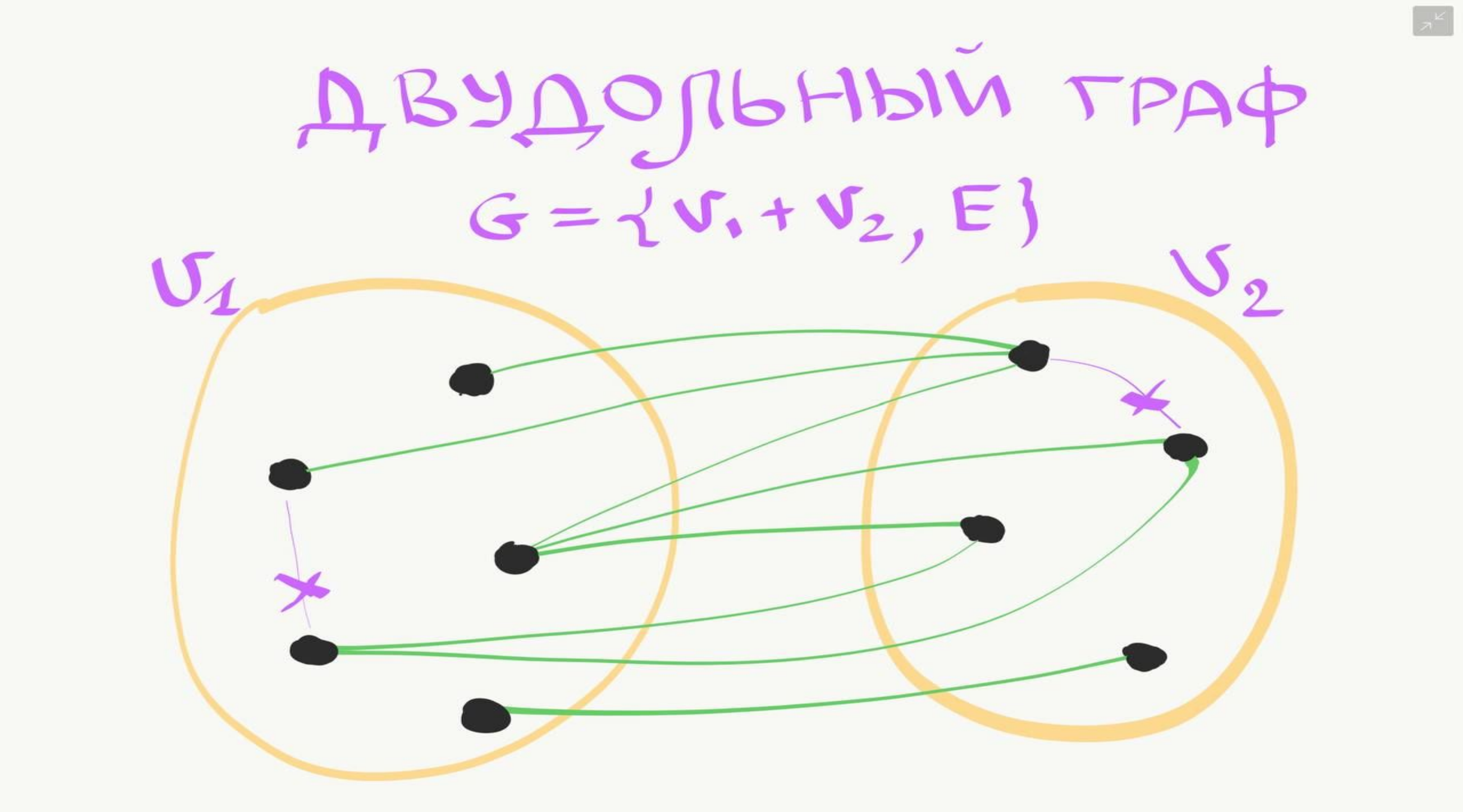


Сколько рёбер в полном графе? Это известная задача о рукопожатиях: собралось N человек (вершин) и каждый с каждым обменялся рукопожатием (ребро), сколько всего было рукопожатий? Вычисляется как сумма чисел от 1 до N - каждый новый участник должен пожать руку всем присутствующим, вычисляется по формуле: N * (N - 1) / 2.

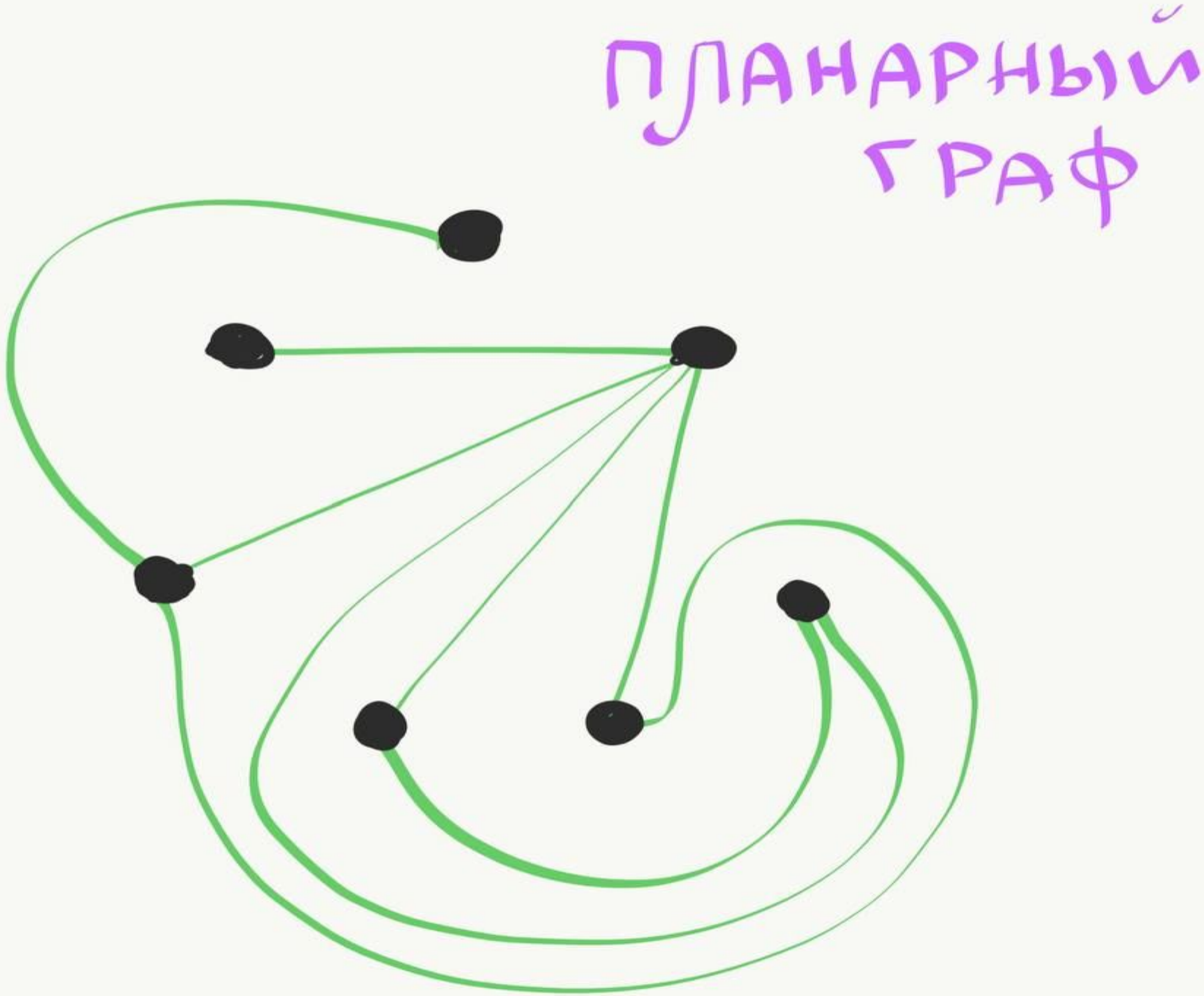
Регулярный граф - граф, в котором степени всех вершин одинаковые.



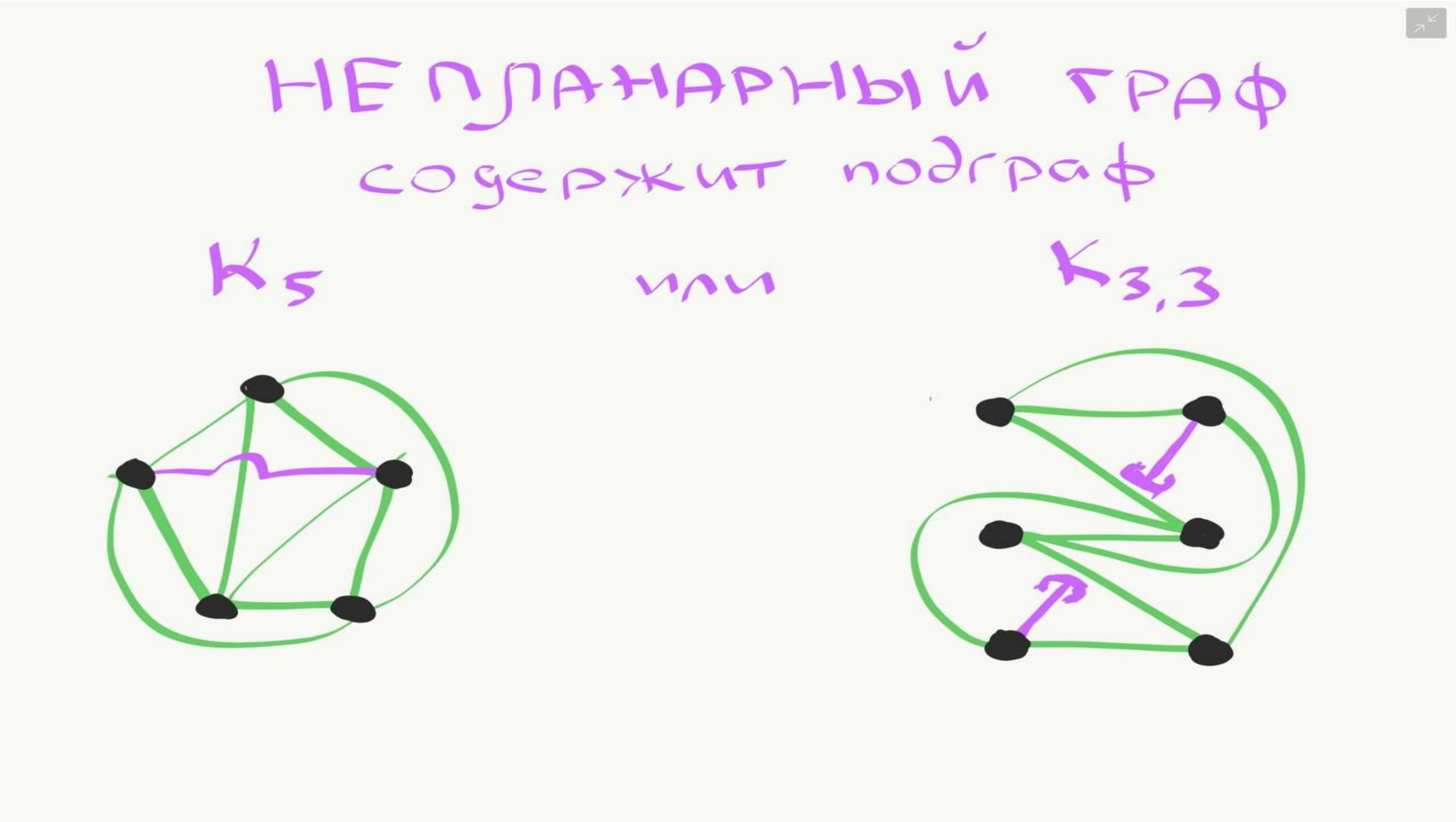
Двудольный граф - если все вершины графа можно разделить на два множества таким образом, что каждое ребро соединяет вершины из разных множеств, то такой граф называется двудольным. Например, клиент-серверное приложение содержит множество запросов (рёбер) между клиентом и сервером, но нет запросов внутри клиента или внутри сервера.



Планарный граф. Если граф можно разместить на плоскости таким образом, чтобы рёбра не пересекались, то он называется “планарным графом” или “плоским графом”.



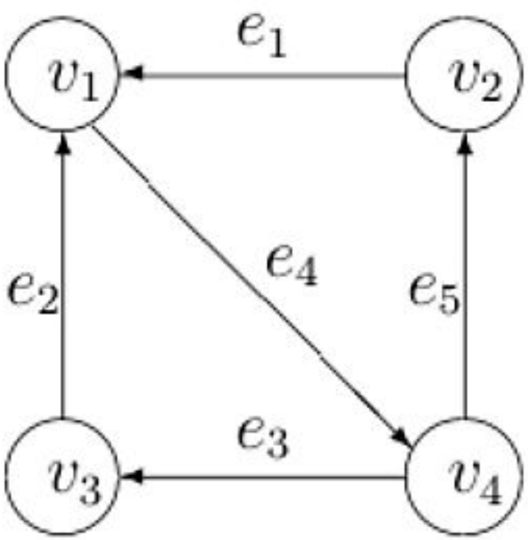
Если это невозможно сделать, то граф называется “**непланарным**”.
Минимальные непланарные графы - это полный граф К5 из 5 вершин и полный двудольный граф К3,3 из 3+3 вершин (известная задача о 3 соседях и 3 колодцах). Если какой-либо граф в качестве подграфа содержит К5 или К3,3 то он является непланарным.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

Перечисление элементов
Изображение
Матрица смежности
Матрица инциденций
Списки смежности

чтобы задать граф, достаточно перечислить множества его вершин и ребер (т.е. пары вершин)



$$G = (V, E)$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$e_1 = (v_2, v_1); e_2 = (v_3, v_1);$
$e_3 = (v_4, v_3); e_4 = (v_1, v_4);$
$e_5 = (v_4, v_2);$

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ

Перечисление элементов
Изображение
Матрица смежности
Матрица инциденций
Списки смежности

Матрица смежности – это квадратная таблица с *n* строками и *n* столбцами, в которой элемент, стоящий на пересечении строки с номером *i* и столбца с номером *j*, равен **1**, если вершины с номерами *i* и *j* смежны, и **0**, если они не смежны.

Каждый элемент матрицы смежности $A[i, j]$ равен 1, если имеется дуга (x_i, x_j) – то есть из вершины *i* в вершину *j*, и 0 в противном случае

Матрица смежности

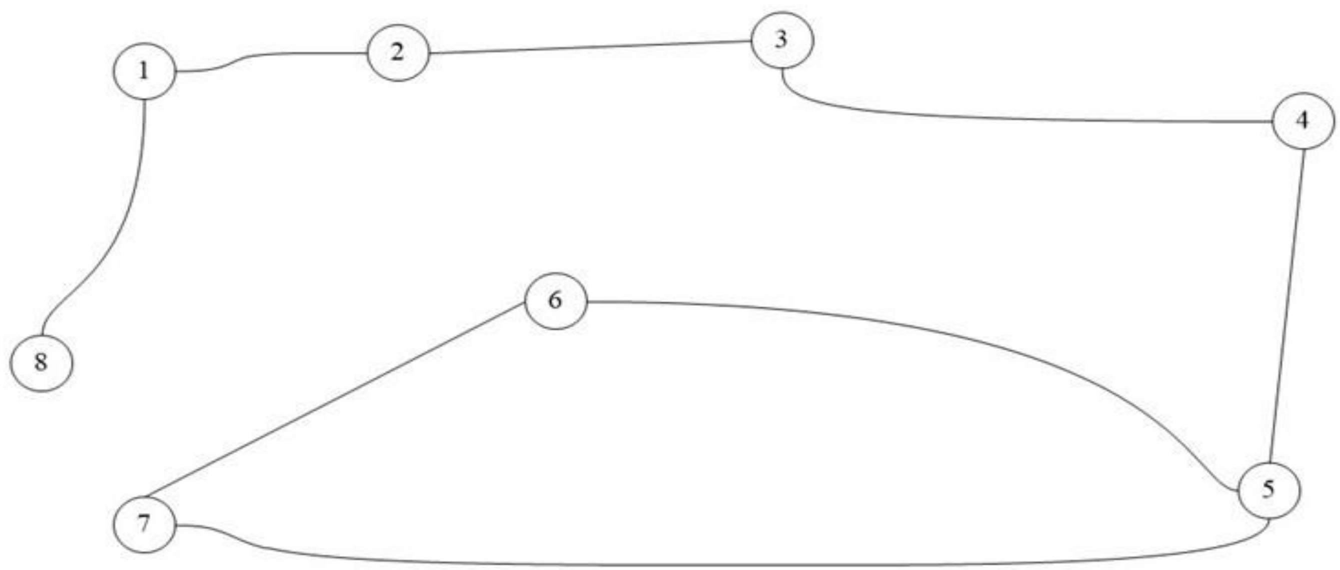
Смежность – понятие, используемое только в отношении двух ребер или в отношении двух вершин: два ребра инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными.

Матрица (назовем ее **L**) состоит из **n** строк и **n** столбцов и поэтому занимает **n^2** места.

Каждая ячейка матрицы равна либо **1**, либо **0**;

Ячейка в позиции **L (i, j)** равна **1** тогда и только тогда, когда существует ребро **(E)** между вершинами **(V)** **i** и **j**. Если у нас положение **(j, i)**, то мы также сможем использовать данное правило. Из этого следует, что число единиц в матрице равно удвоенному числу ребер в графе. (если граф неориентированный). Если ребра между вершинами **i** и **j** не существует, то ставится **0**.

Для практического примера рассмотрим самый обыкновенный неориентированный граф:



А теперь представим его в виде матрицы:

L	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0

Ячейки, расположенные на главной диагонали всегда равны нулю, потому что ни у одной вершины нет ребра, которое и начинается, и заканчивается в ней только если мы не используем петли. То есть наша матрица симметрична относительно главной диагонали. Благодаря этому мы можем уменьшить объем памяти, который нам нужен для хранения.

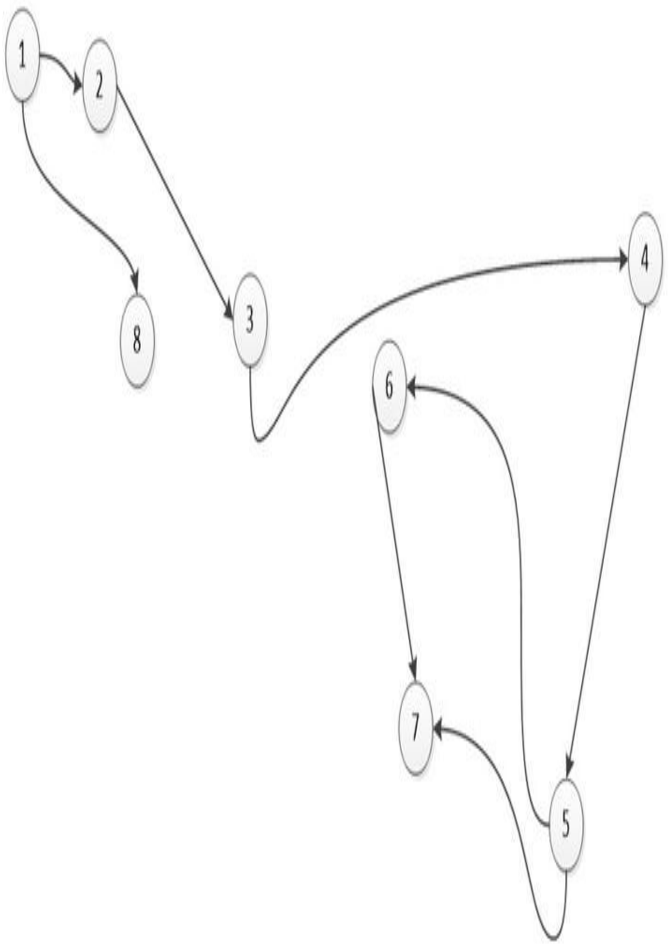
Если граф неориентированный, то, когда мы просуммируем строку или столбец мы узнаем степень рассматриваемой нами вершины.

Если мы используем ориентированный граф, то кое-что меняется.

Здесь отсутствует дублирование между вершинами, так как если вершина 1 соединена с вершиной 2, наоборот соединена она не может быть, так у нас есть направление у ребра.

Возьмем в этот раз ориентированный граф и сделаем матрицу смежности для него:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижневартовский государственный университет»

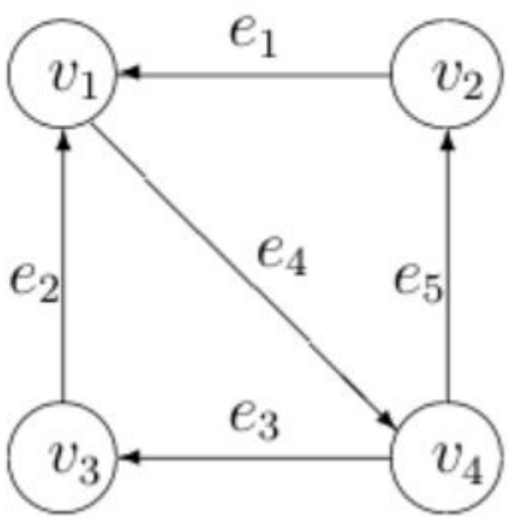


L	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Если мы работаем со строкой матрицы, то мы имеем элемент из которого выходит ребро, в нашем случаи вершина 1 входит в вершину 2 и 8. Когда мы работаем со столбцом то мы рассматриваем те ребра, которые входят в данную вершину. В вершину 1 ничего не входит, значит матрица верна.

Если бы на главной диагонали была бы 1, то есть в графе присутствовала петля, то мы бы работали уже не с простым графом, с каким мы работали до сих пор.
Используя петли мы должны запомнить, что в неориентированном графе петля учитывается дважды, а в ориентированном - единожды.

ПРИМЕР МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ



ориентированный граф

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

неориентированный граф

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ

Перечисление элементов
Изображение
Матрица смежности
Матрица инцидентности
Списки смежности

Матрица инцидентности представляет собой прямоугольную матрицу **B** размером n × m, где n – количество вершин графа, а m – количество дуг графа.

Каждый элемент матрицы инцидентности определяется следующим образом:

$\mathbf{b_{ij} = 1}$, если x_i является **начальной** вершиной дуги a_j,

$\mathbf{b_{ij} = -1}$, если x_i является **конечной** вершиной дуги a_j,

$\mathbf{b_{ij} = 0}$, если x_i **не является** концевой вершиной дуги дуги a_j или если a_j является **петлей**.

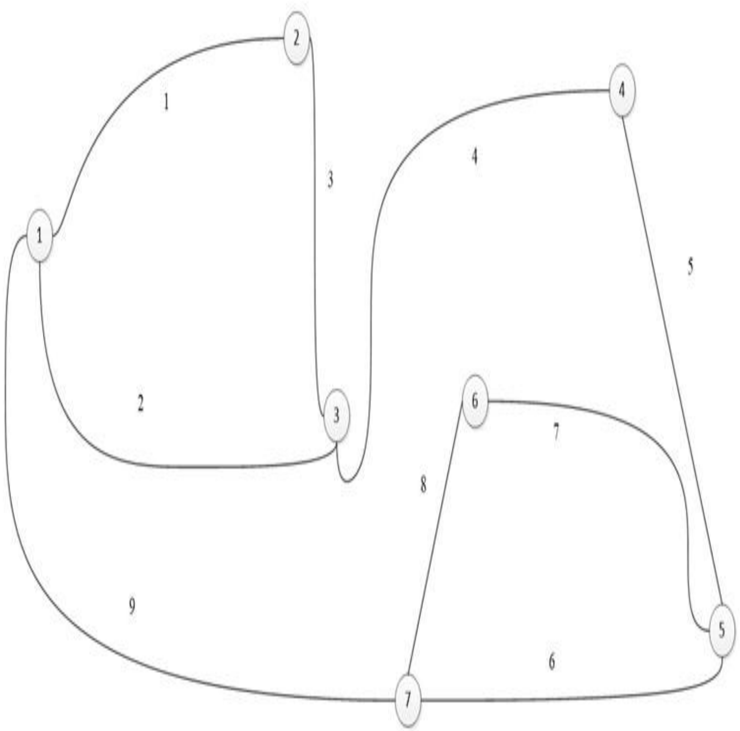
Матрица инцидентности

Инцидентность – понятие, используемое только в отношении ребра и вершины: две вершины (или два ребра) инцидентными быть не могут.

Матрица (назовем ее **I**) состоит из **n** строк которое равно числу вершин графа, и **m** столбцов, которое равно числу ребер. Таким образом полная матрица имеет размерность **n x m.** То есть она может быть, как квадратной, так и отличной от нее.

Ячейка в позиции **I (i, j)** равна **1** тогда, когда вершина инцидентна ребру иначе мы записываем в ячейку **0,** такой вариант представления верен для неориентированного графа.

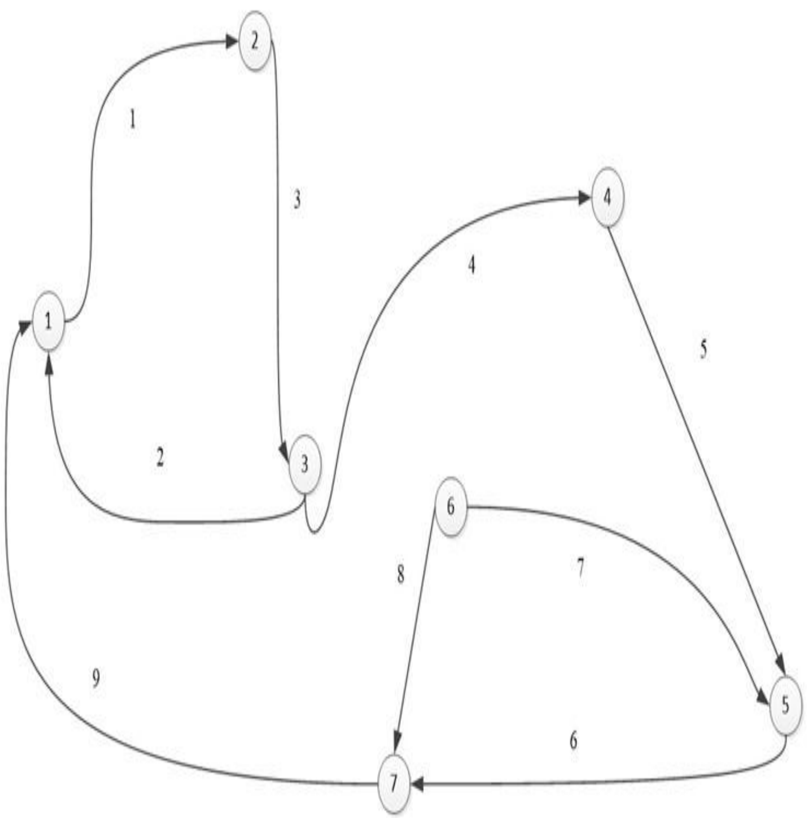
Сразу же иллюстрируем данное правило:



I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	1

Сумма элементов i-ой строки равна степени вершины.
При ориентированным графе, ячейка I (i, j) равна 1, если вершина V (i) начало дуги E(j) и ячейка I (i, j) равна -1 если вершина V (i) конец дуги E (j), иначе ставится 0.

Ориентированный граф:



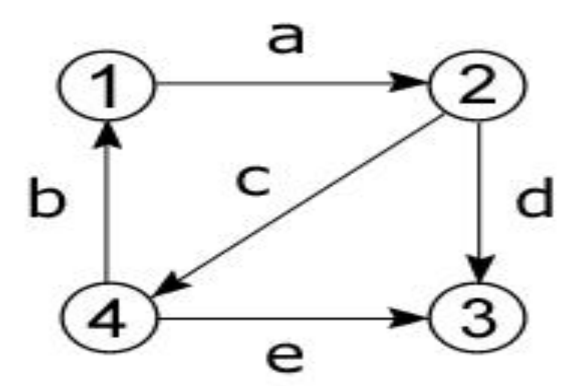
В виде матрицы:

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1
2	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1

Одной из особенностей данной матрицы является то, что в столбце может быть только две ненулевых ячейки. Так как у ребра два конца.
При суммировании строки, ячейки со значением -1, могут складываться только с ячейками, также имеющими значение -1, то же касается и 1, мы можем узнать степень входа и степень выхода из вершины. Допустим при сложении первой вершины, мы узнаем, что из нее исходит 1 ребро и входят два других ребра. Это является еще одной особенностью (при том очень удобной) данной матрицы.

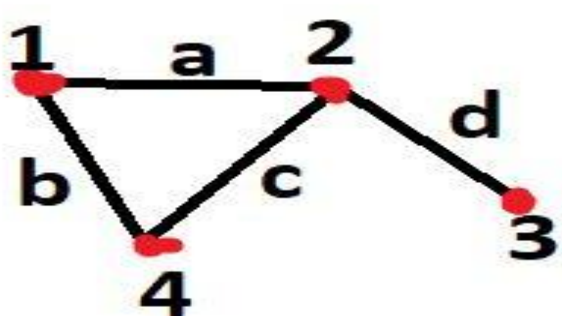
ПРИМЕР МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНЦИЙ

	a	b	c	d	e
1	1	-1	0	0	0
2	-1	0	1	1	0
3	0	0	0	-1	-1
4	0	1	-1	0	1



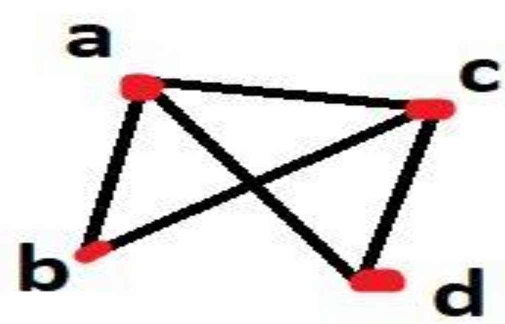
Матрица инцидентности | Рисунок 2 | Ориентированный граф матрица инцидентности

	a	b	c	d
1	1	1	0	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	1	1	0

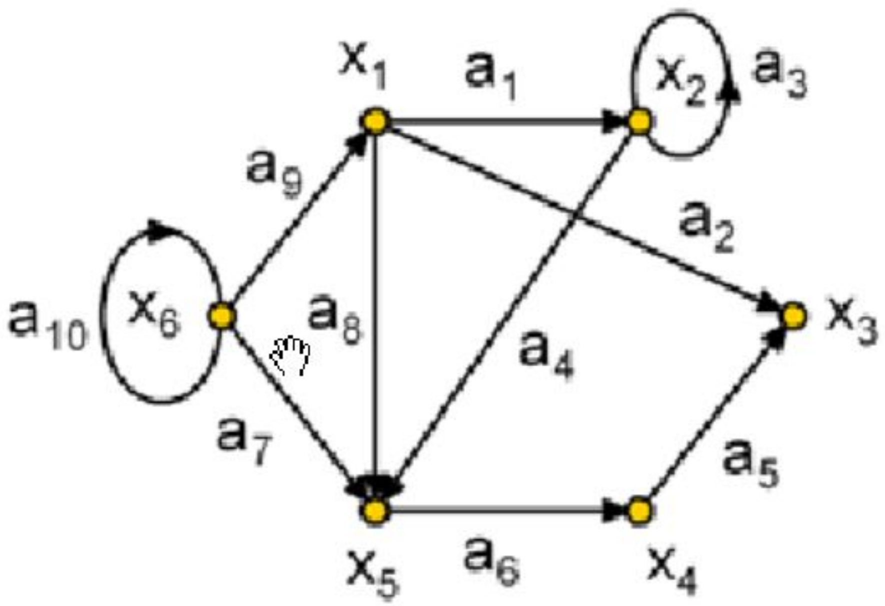


матриц. смежности
реберного графа

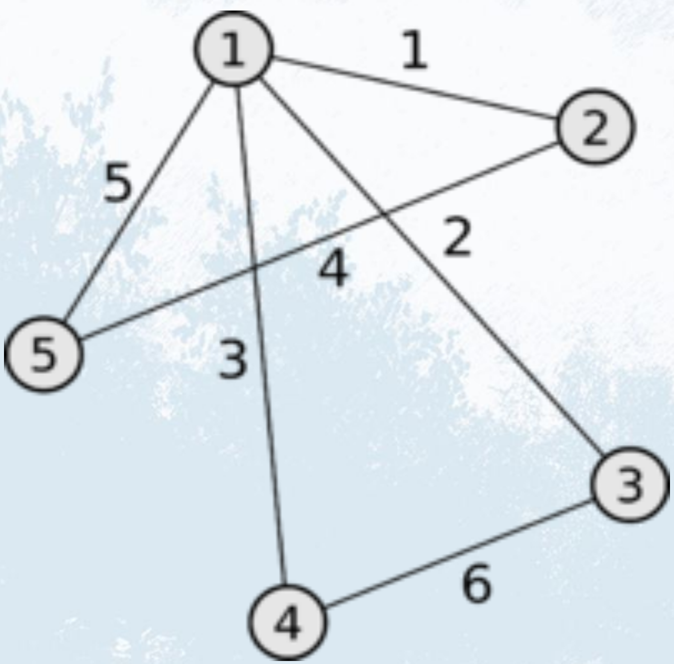
	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0



ПРИМЕР МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНЦИЙ

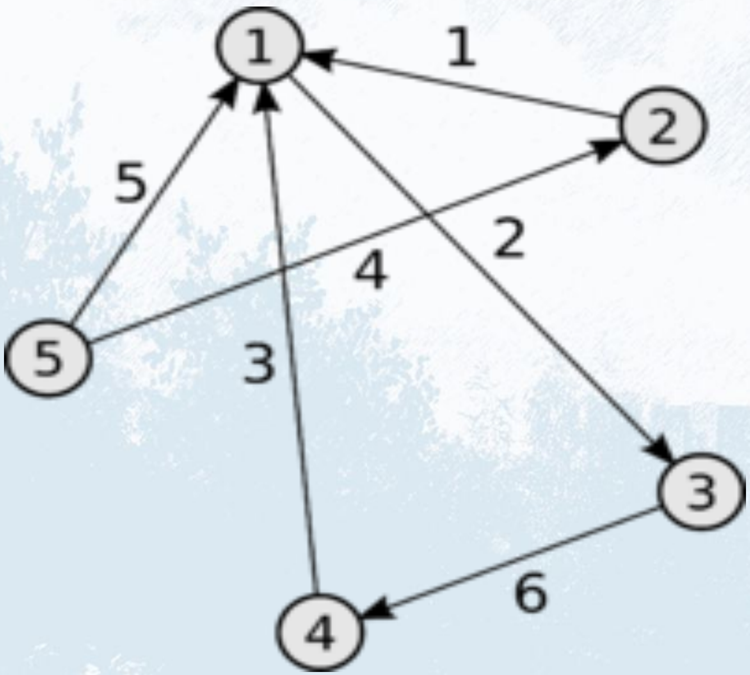


$$A = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \\ \boldsymbol{x_5} \\ \boldsymbol{x_6} \end{array} \begin{array}{cccccccccc} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} & \boldsymbol{a_5} & \boldsymbol{a_6} & \boldsymbol{a_7} & \boldsymbol{a_8} & \boldsymbol{a_9} & \boldsymbol{a_{10}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Матрица инцидентности

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Матрица инцидентности

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ

Перечисление элементов
Изображение
Матрица смежности
Матрица инцидентности
Списки смежности

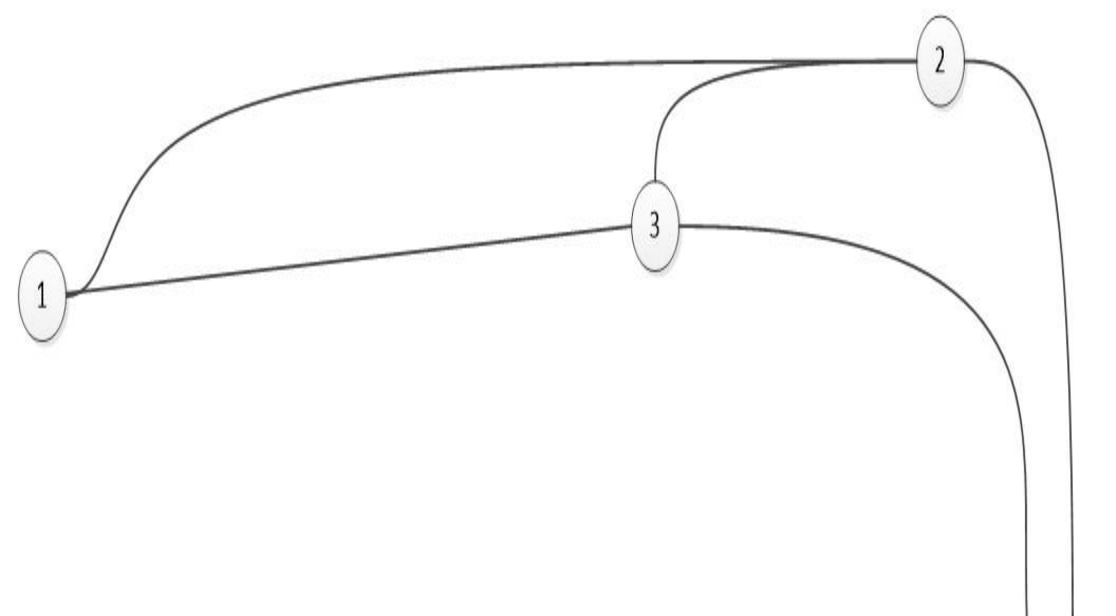
Этот способ часто используется для компьютерного представления графов

Для каждой вершины задается список всех смежных с ней вершин

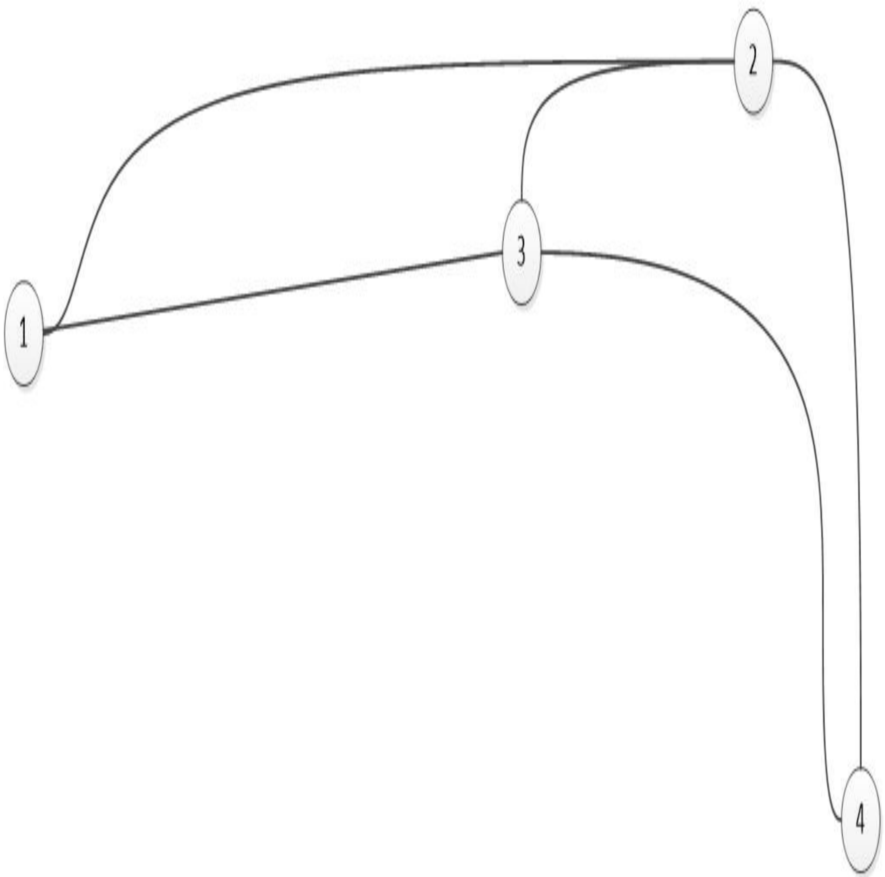
В программировании списки смежности могут быть реализованы как массив линейных списков. В списке указывается номер или имя вершины, а после двоеточия перечисляются все смежные с ней вершины

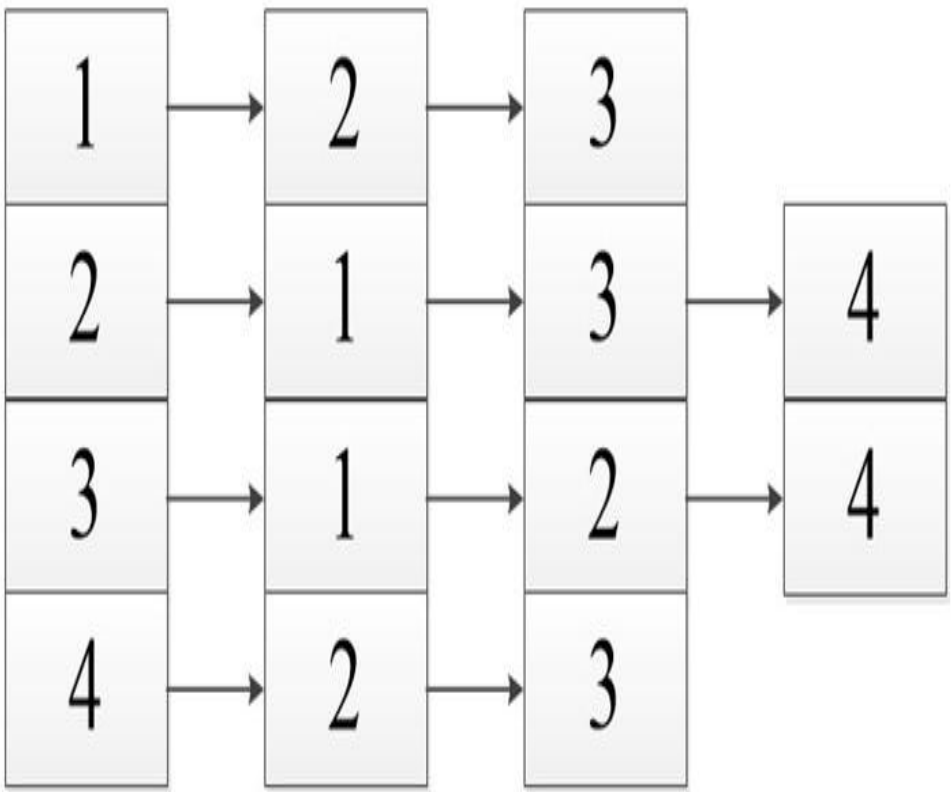
Список смежности (инцидентности)

Список смежности подразумевает под собой, то что мы работаем с некоторым списком (массивом). В нем указаны вершины нашего графа. И каждый из них имеет ссылку на смежные с ним вершины.



В виде списка это будет выглядеть так:

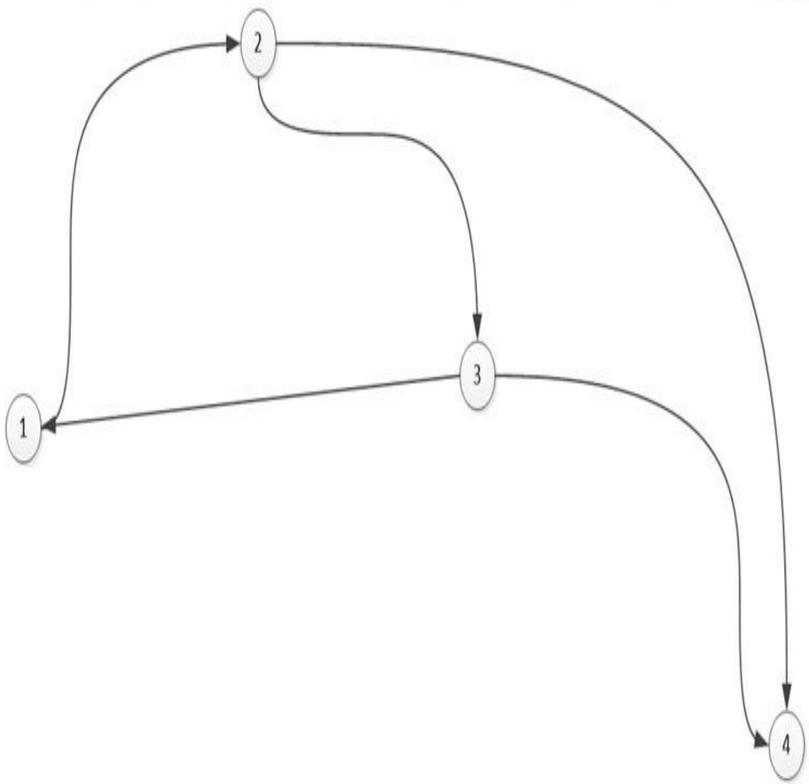


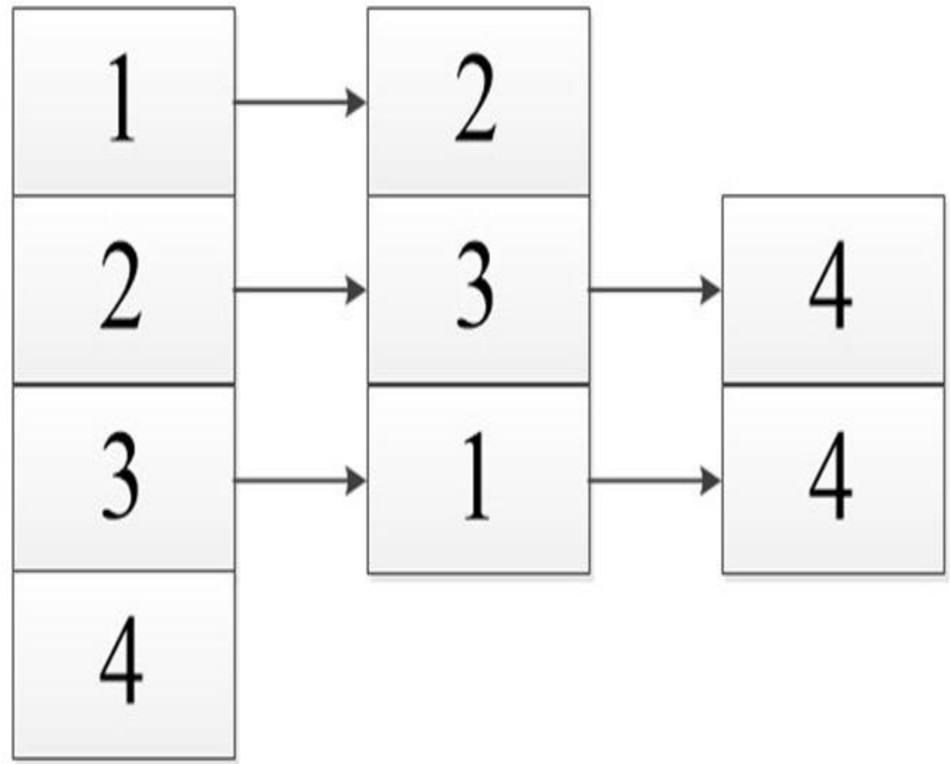


Неважно в каком порядке вы расположите ссылку так как вы рассматриваете смежность относительно первой ячейки, все остальные ссылки указывают лишь на связь с ней, а не между собой.

Так как здесь рассматривается смежность, то здесь не обойдется без дублирования вершин.

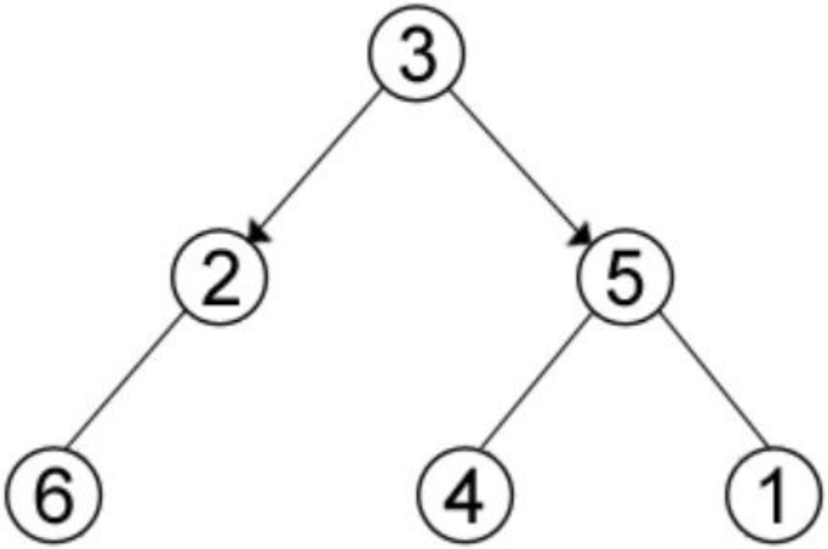
Когда мы работаем с ориентированным графом, то замечаем, что объем задействованной памяти будет меньше, чем при неориентированном (из-за отсутствия дублирования).





ПРИМЕР СПИСКА СМЕЖНОСТИ

$$G = (V, E)$$
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

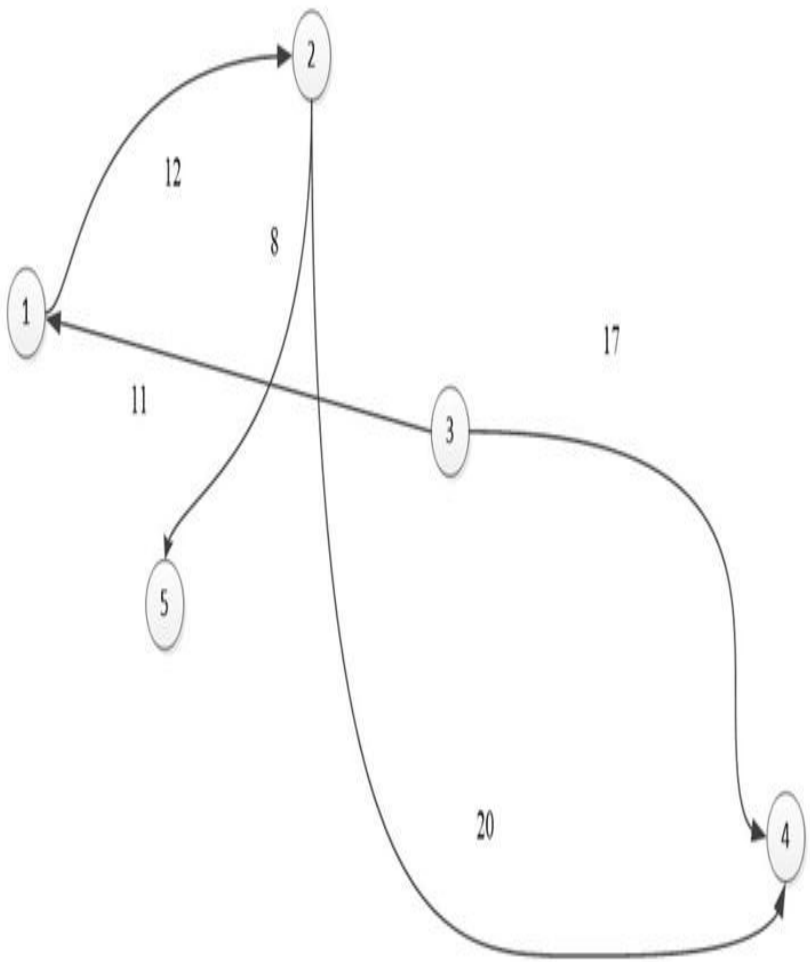


1: 5
2: 6
3: 2, 5
4: 5
5: 1, 4
6: 2

Взвешенность графа

Взвешенный граф - это граф, в котором вместо 1 обозначающее наличие связи между вершинами или связи между вершиной и ребром, хранится вес ребра, то есть определённое число с которым мы будем проводить различные действия.

К примеру, возьмем граф с весами на ребрах и сделаем матрицу смежности:



I	1	2	3	4	5
1	0	12	0	0	0
2	0	0	0	20	8
3	11	0	0	17	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

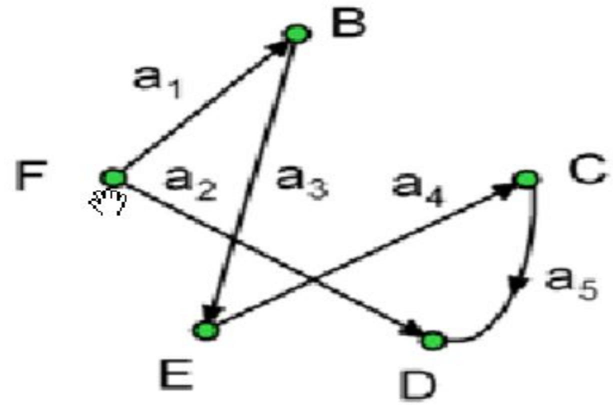
В ячейках просто указываем веса ребра, а в местах где отсутствует связь пишем 0 или -∞.
Более подробно данное определение будет рассмотрено при нахождении поиска кратчайшего пути в графе.
Итак, мы завершили разбор представления графа с помощью матрицы смежности и инцидентности и списка смежности (инцидентности). Это самые известные способы представления графа. В дальнейшем мы будем рассматривать и другие матрицы, и списки, которые в свою очередь будут удобны для представления графа с определёнными особенностями.

Вопросы

1. Дайте определение понятию «граф».
2. Назовите области применения графов.
3. Нарисуйте простой неориентированный граф и отметьте на рисунке основные элементы: вершина, ребро, петля.
4. Нарисуйте ориентированный граф, подпишите вершины, дуги, запишите любой путь.
5. Нарисуйте мультиграф.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Составьте описание графа:



$G=(V,E)$; $V=\{?,?,\ldots,?\}$; $E=\{?,?,\ldots,?\}$

2. Составьте матрицу смежности для ориентированного графа.

3. Составить матрицу инцидентности.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} & \boldsymbol{a_5} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

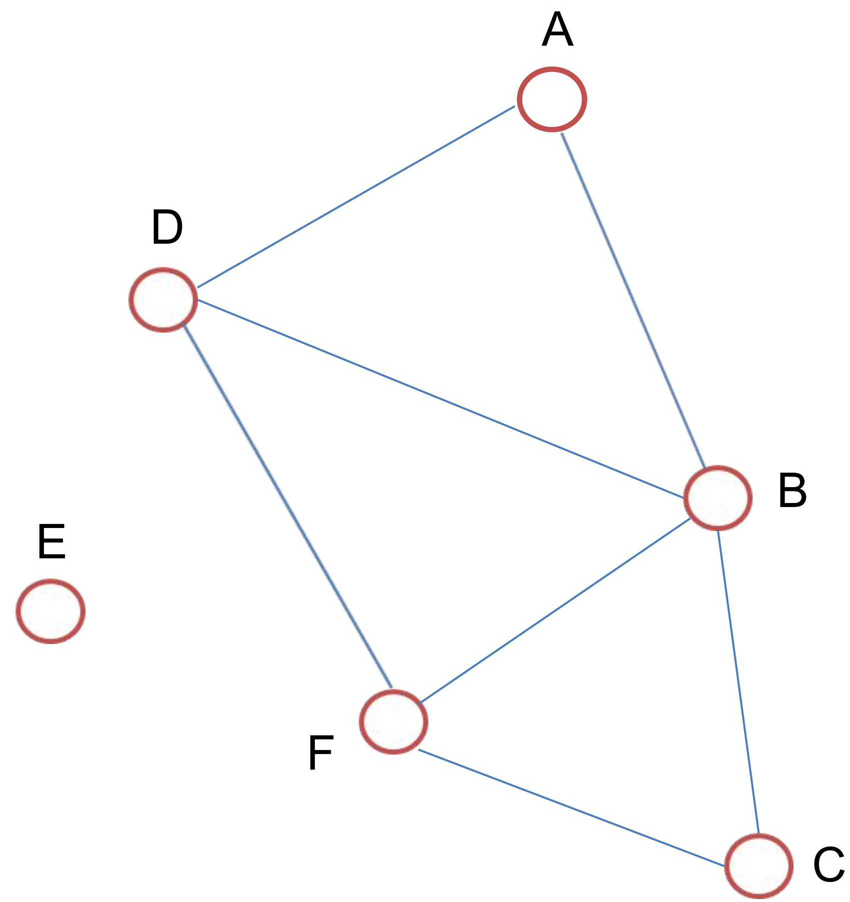
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Составьте матрицу смежности для графа, заданного списками смежности:

A : B, D; **B** : A, C, D, F ; **C** : B, F ; **D** : A, B, F ; **E** : ; **F** : B, C, D.

Постройте граф.


A
D
B
E
F
C

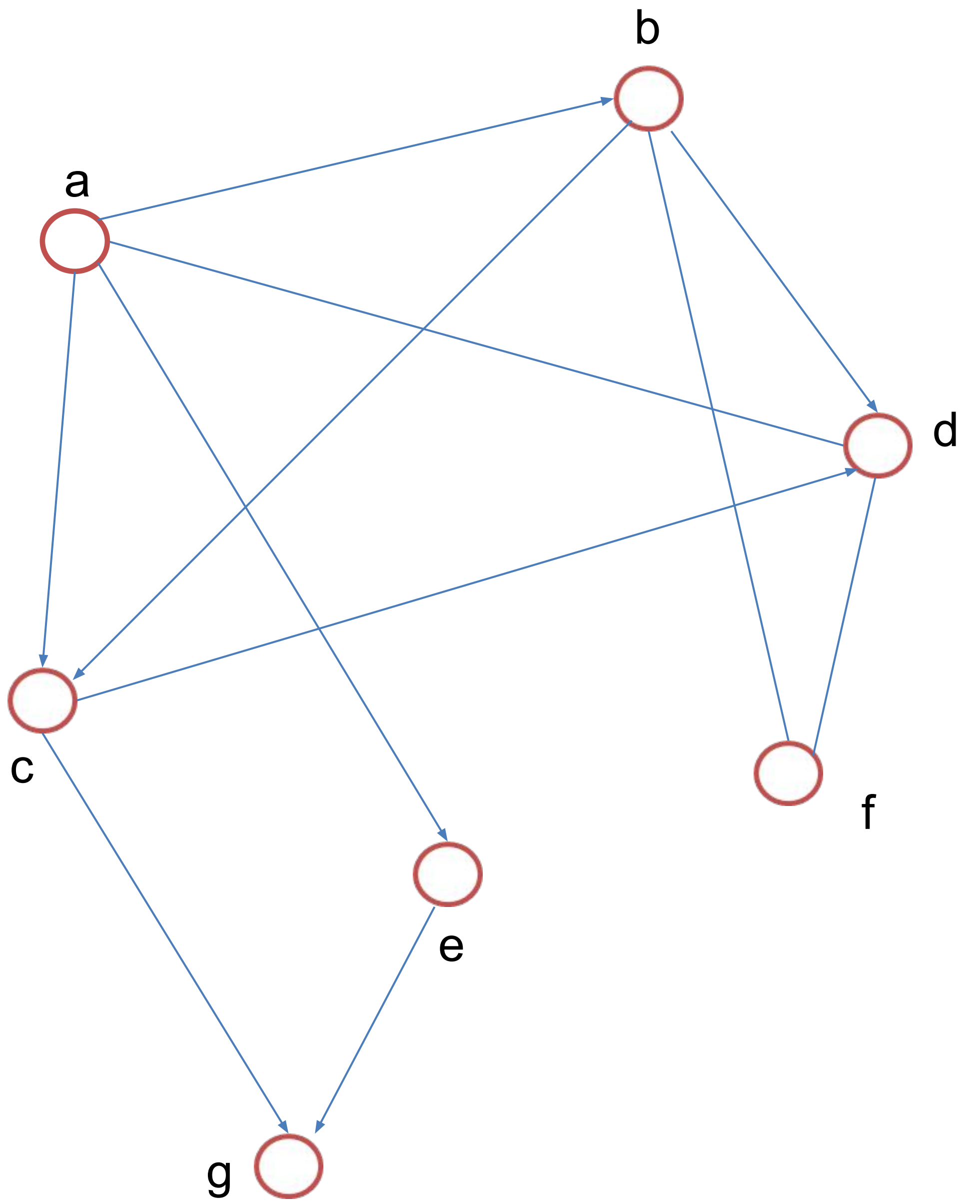
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Постройте матрицу инцидентности для графа, заданного списками смежности:

a : b, c, d, e; b : c, d, f ; c : d, g ; d : a, f ; e : g ; f : b, d ; g : .

Составьте граф.



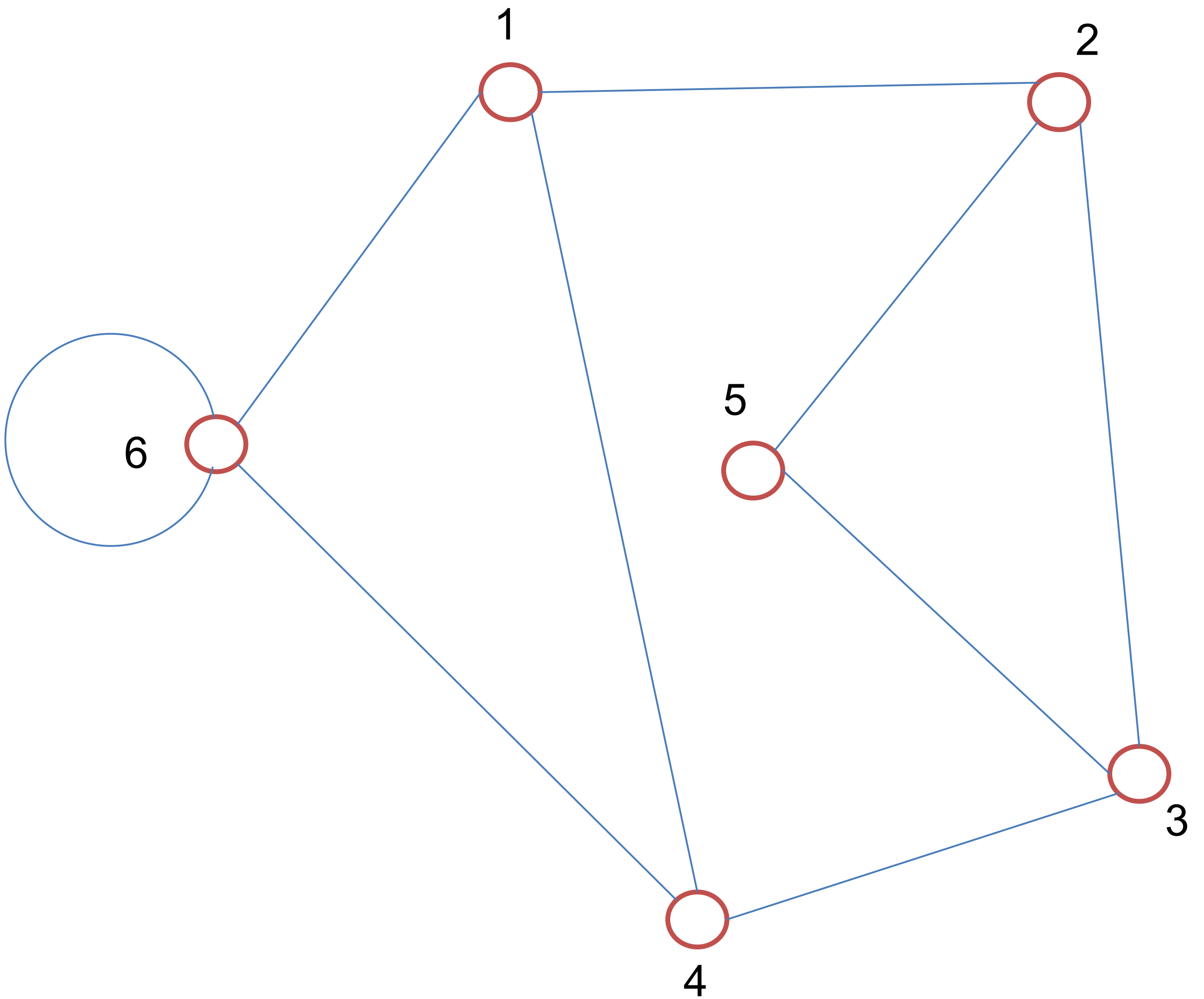
b
a
d
c
f
e
g

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Дана матрица смежности для неориентированного графа.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составьте граф.

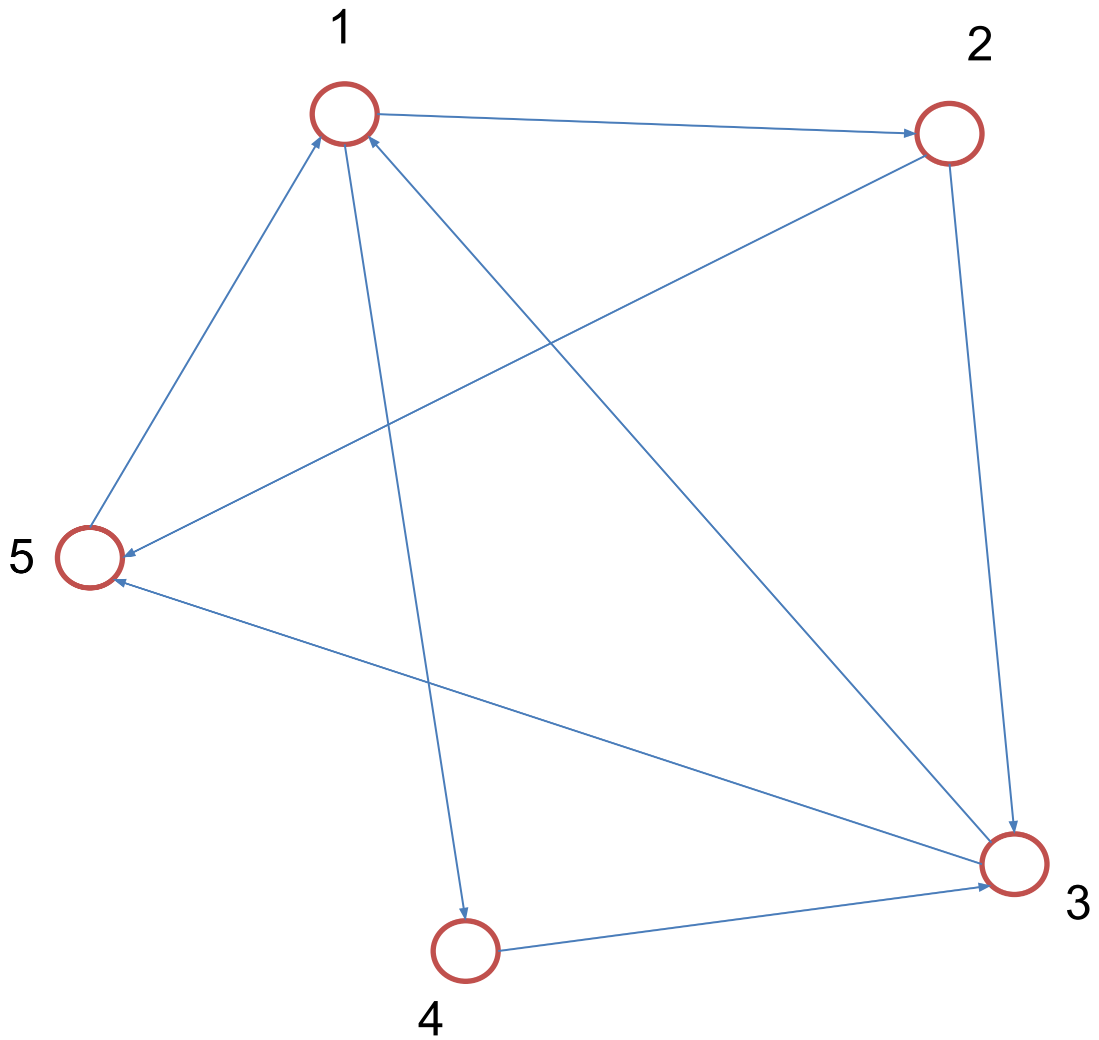

1
2
5
6
3
4

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Дана матрица смежности для ориентированного графа.

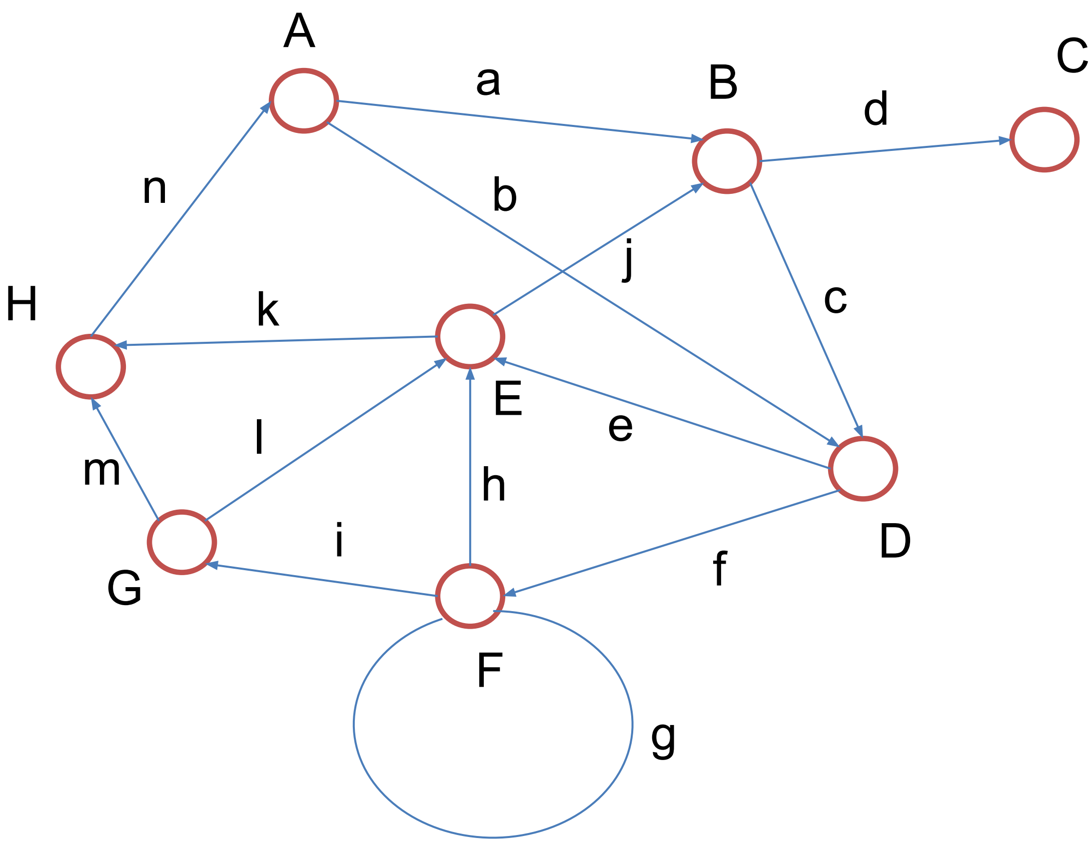
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Составьте граф.


1
2
5
3
4

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Дан граф.



Составьте матрицу инцидентности.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ