Тема3

Элементы теории графов

Лекция
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1 Понятие о графах и теории графов

- Совокупность множества М с заданным на нем бинарным отношением называется графом G=<M,T>,

$$T \subseteq M^2$$

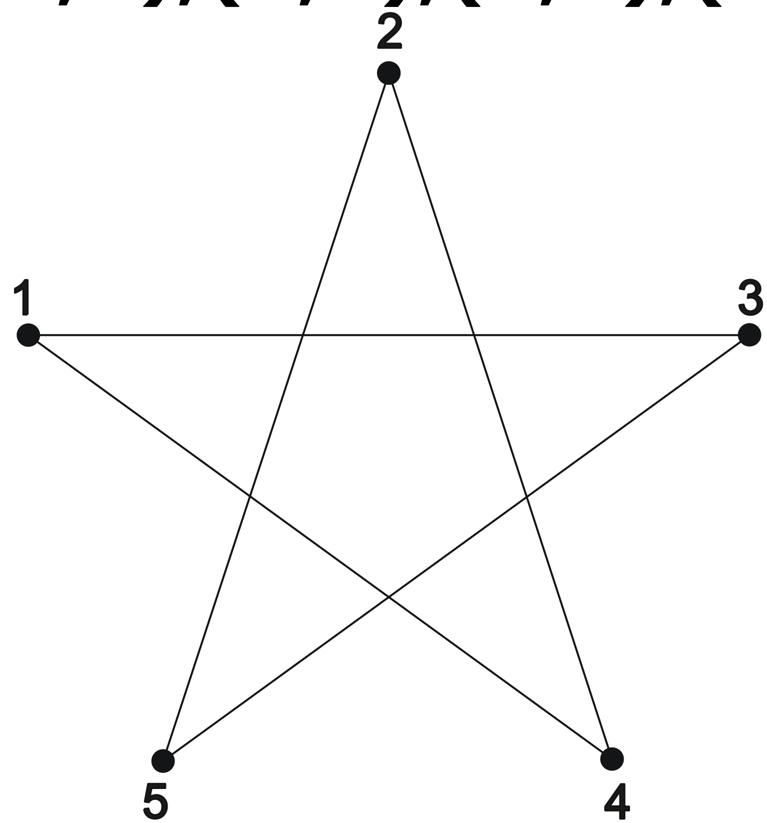
- где М – носитель графа – множество вершин, изображаемых точками,

Т – сигнатура графа – множество линий, обозначающих отношения и называемых ребрами.

Пример графа «звезда»

M={1,2,3,4,5},

T={(1,3),(1,4),(2,4),(2,5),(3,1),
(3,5),(4,2),(4,1),(5,3),(5,2}).



- **Линии, изображающие ребра, могут пересекаться на изображении графа, но точки их пересечений не являются вершинами.**

- **Между элементами двух множеств М и Т определено отношение инцидентности, т.е. связи между двумя элементами множества М через один элемент множества Т.**
- **Множество линий-ребер в Т задается обозначением пары (i,j), где i,j – инцидентные вершины, отношение Т – «быть связанным».**
- **Между элементами одного множества определено отношение смежности, то есть «соседства».**

- **Другие примеры графов: отношения дружбы на множестве людей, отношения родства, карты дорог местности, электрические схемы соединений микросхем, приборов , систем и т.д**

Теория графов

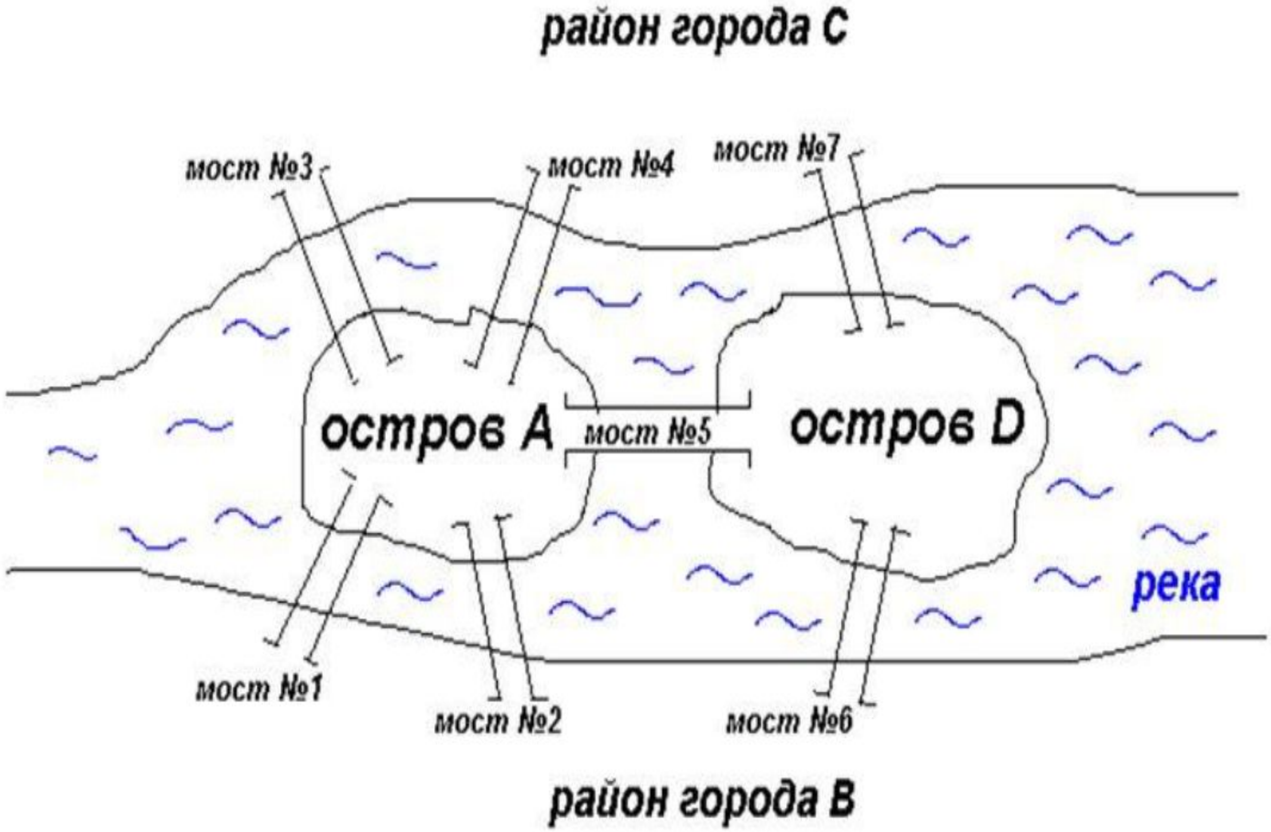
- **Раздел дискретной математики, изучающий свойства графов.**

- **Теория графов содержит большое количество нерешённых проблем и пока недоказанных гипотез.**

- Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер.

- В 1736 - задача о кёнигсбергских мостах

Задача о кенигсбергских мостах.



Карта г.Кенинсберг

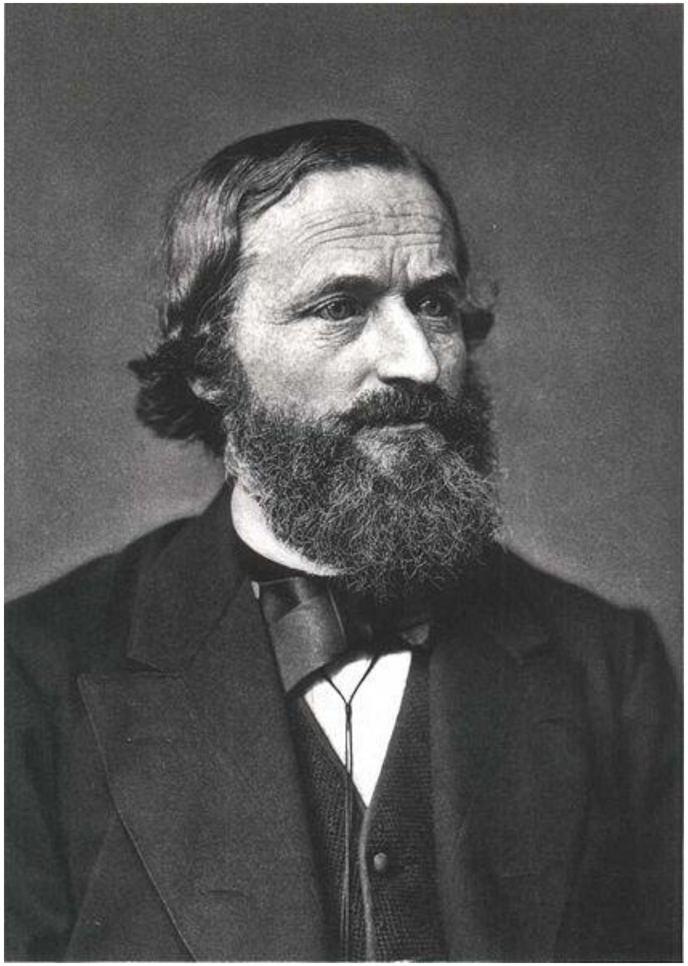
Задача: необходимо составить путь движения по городу так, чтобы пройдя ровно по одному разу по каждому мосту, вернуться в то же место откуда началось движение.

- **Теорию графов начали разрабатывать для решения некоторых задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий.**

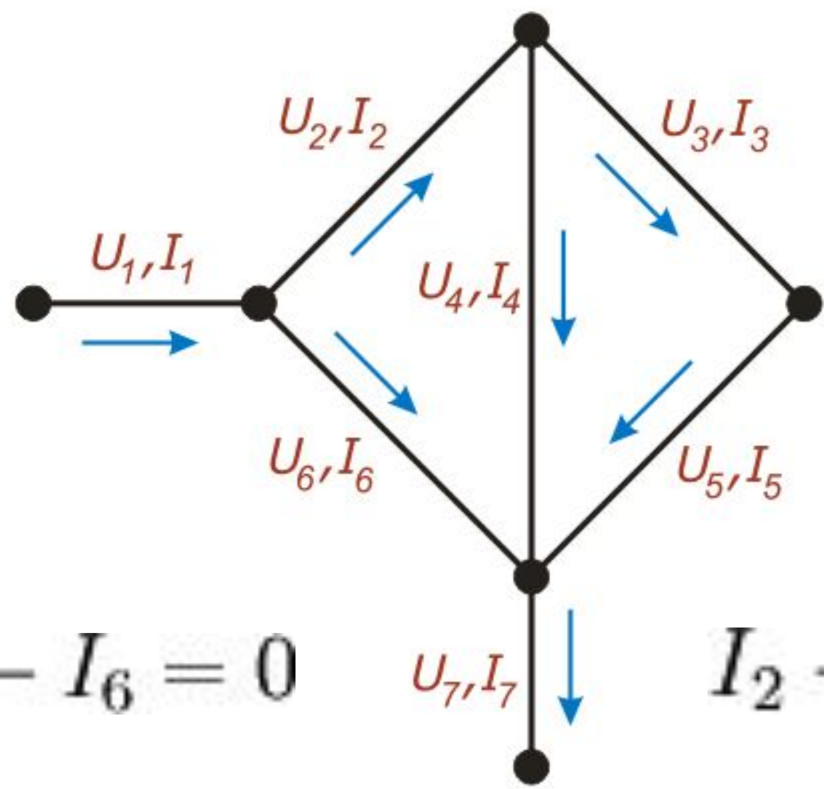
- **В этих задачах несущественно, соединены ли точки конфигурации отрезками прямых или они криволинейны, какова длина линий и другие геометрические характеристики конфигурации.**
- **Важно лишь, что каждая линия соединяет какие-либо две из заданных точек**

- **Первые серьезные результаты теории графов связаны с решением задач построения электрических цепей (Г. Кирхгоф)**

- **Г. Кирхгоф (1824-1887 гг.) – Законы Кирхгофа**



$$I_6 + I_4 + I_5 - I_7 = 0$$

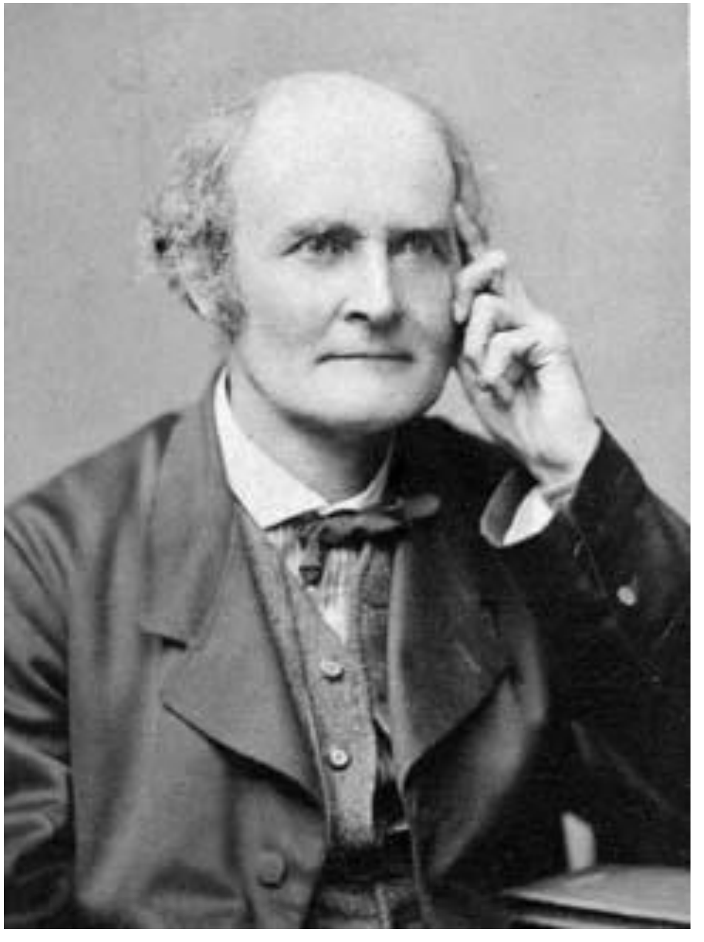


$$I_1 - I_2 - I_6 = 0$$

$$I_2 - I_4 - I_3 = 0$$

- **Подсчет числа химических соединений с различными типами молекулярных связей (А. Кэли).**

Arthur Cayley; (1821 - 1895) — английский математик.



- **КУРАТОВСКИЙ (Kuratowski) Казимеж (1896-1980), польский математик, иностранный член АН СССР (1966). Труды по топологии, теории функций, теории графов.**

Уильям Роуэн Гамильтон

- **Уильям Роуэн Гамильтон (*William Rowan Hamilton*; 1806 —1865) — выдающийся ирландский математик.**
- **Гамильтонов граф**

Терминология теории графов

- Терминология теории графов поныне не определена строго.
- Иногда граф называют "сетью", но мы будем считать сетью граф особого вида (транспортная сеть)

Теория графов и кибернетика

- В 30-е годы XX века благодаря трудам Д. Кенига теория графов стала развиваться как самостоятельный раздел математики.
- Широкое развитие теория графов получила с 50-х годов XX века в связи с появлением такой науки, как кибернетика.

- **Термин «граф» (от латинского слова «графио» - пишу) приобрел права гражданства и вошел в математический язык в 1936 году, после выхода в свет известной монографии Кёнига, в которой впервые графы рассматриваются как самостоятельные математические объекты независимо от их конкретного содержания.**

- **Графы применяют при анализе функционирования систем.**

- **С отдельными компонентами изучаемой системы удобно связывать вершины графа, а с парами взаимодействующих компонент – его ребра.**

- **Такой граф называют структурным графом системы.**

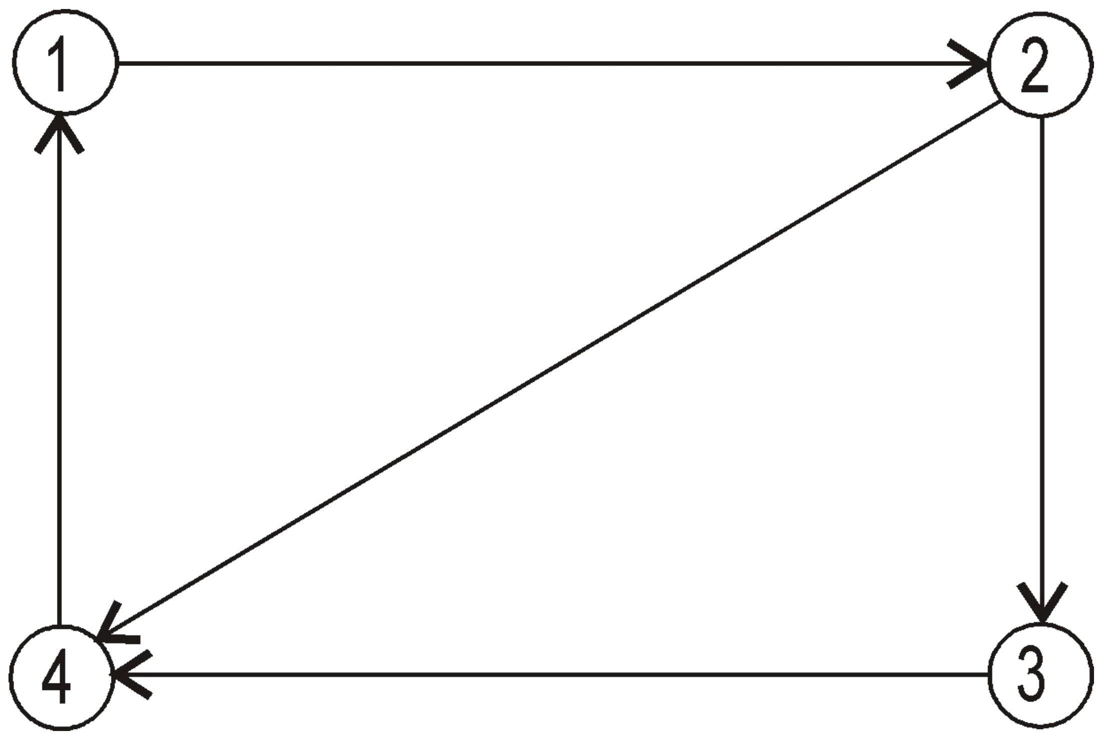
- **Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС).**
- **Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т. п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи и т. п. — как рёбра.**
- **Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.**

- Графы используются в поисковых системах (Google)
- Теория графов используется в химии (для описания структур, путей сложных реакций)
- Новая наука – компьютерная химия

2.Основные виды графов

- В некоторых задачах существенно направление ребер графа.
- Направленные ребра называют дугами, а содержащий их граф – ориентированным (орграфом).
- Соответственно граф с неориентированными ребрами называется неориентированным.

Ориентированный граф -орграф

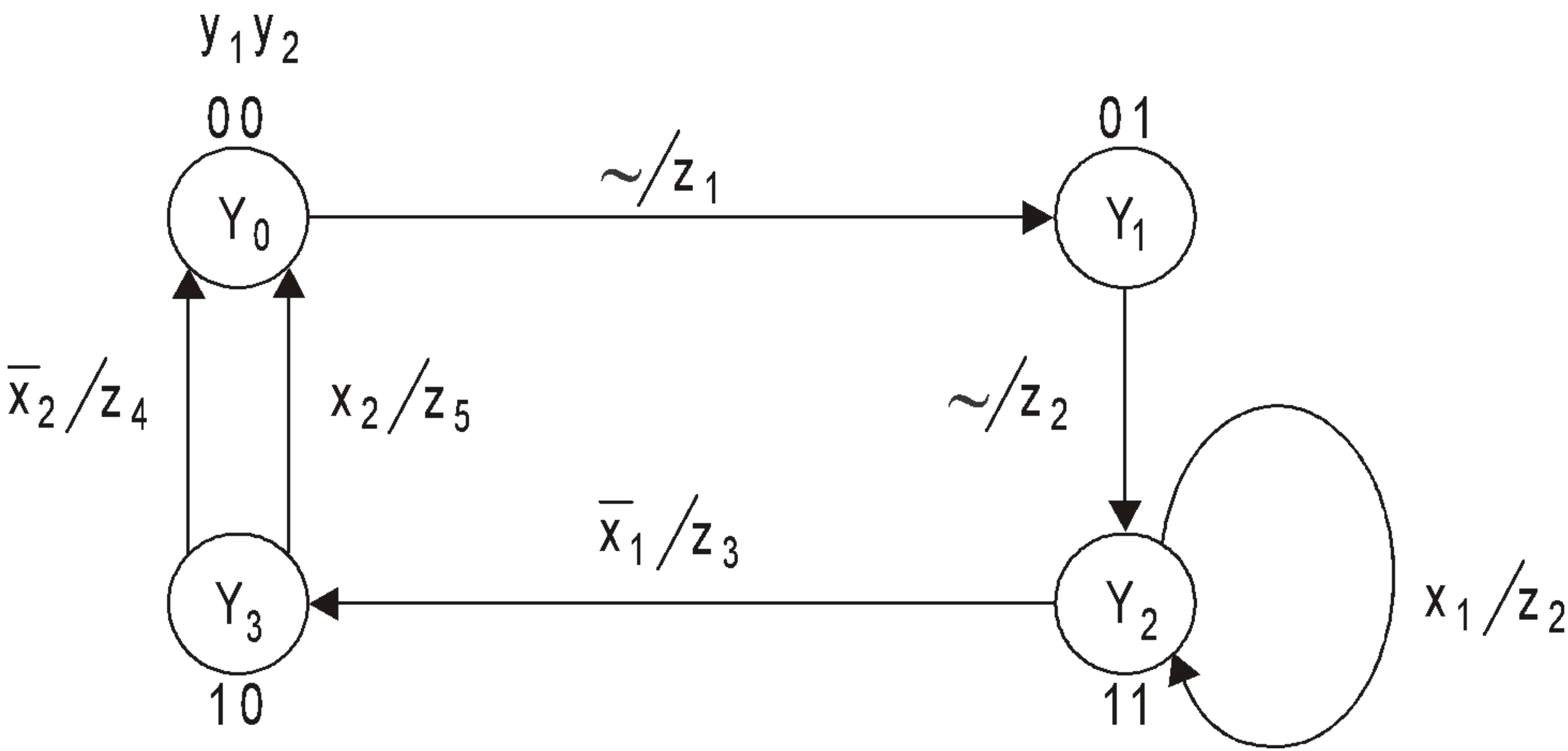


- **Множество ребер может быть пусто.**
- **Если же множество вершин пусто, то пусто и множество ребер.**

Такой граф называется пустым $\varnothing$.

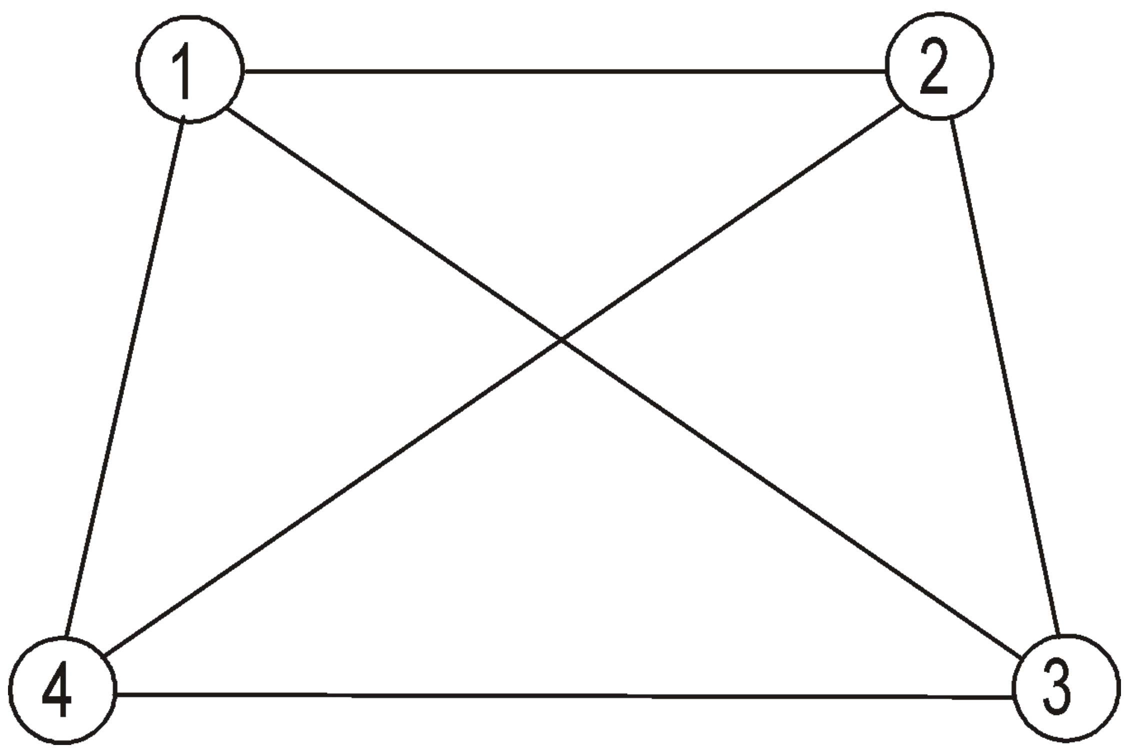
- **Различные ребра могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются кратными.**
- **Граф, содержащий кратные ребра, называют мультиграфом.**
- **Будем рассматривать конечные графы, содержащие конечные множества вершин и ребер (дуг).**

- **Ребро (дуга) может соединять некоторую вершину саму с собой, такое ребро (дуга) называется петлей.**

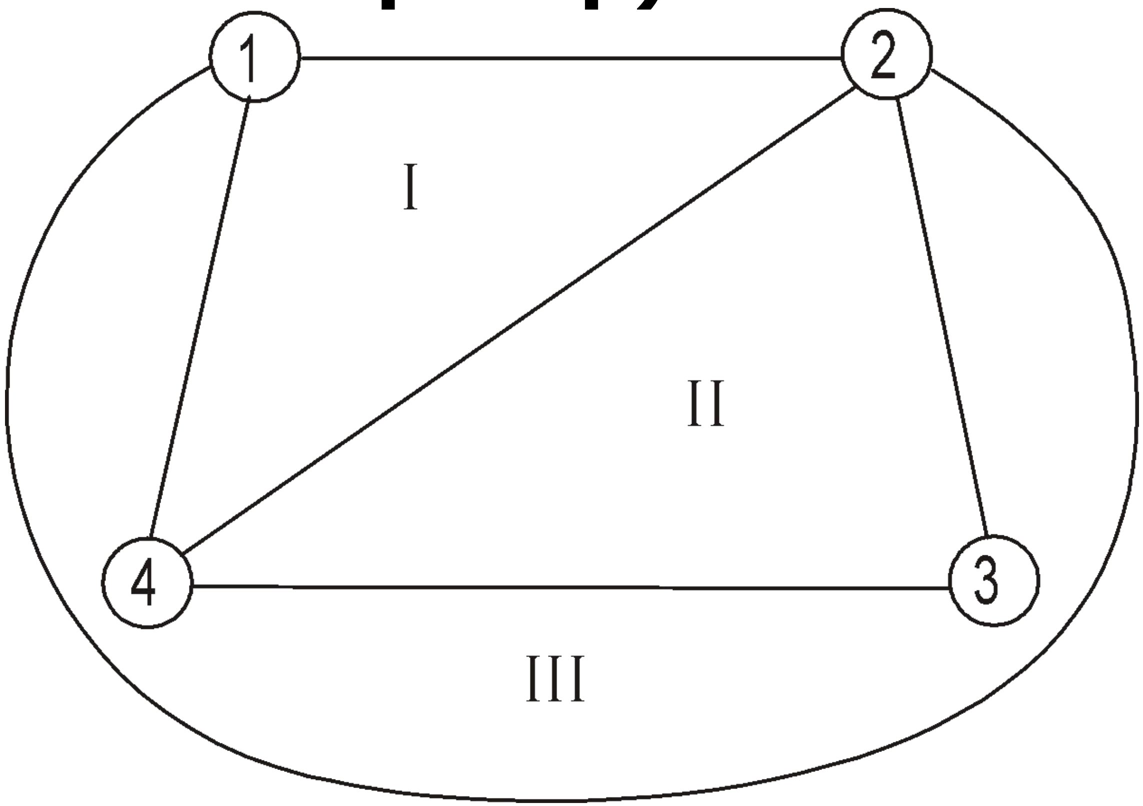


- **Граф называется нагруженным, если каждому ребру (дуге) поставлено в соответствие некоторое действительное число (длина дуги, вес дуги, стоимость дуги и т.д.) или некоторые другие символы.**

- **Полный граф: все вершины соединены друг с другом. Это квадрат множества М.**
- **Петли необязательны.**



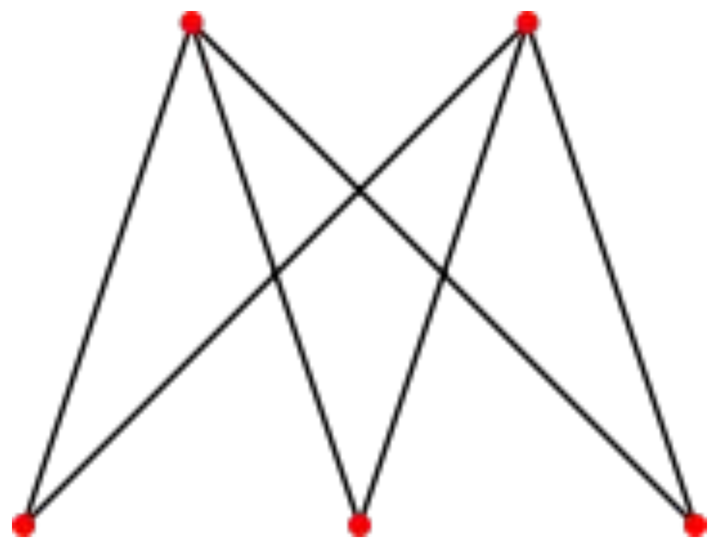
- **Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются вершинами (без пересечения рёбер).**



- **Псевдограф содержит и ребра, и дуги.**

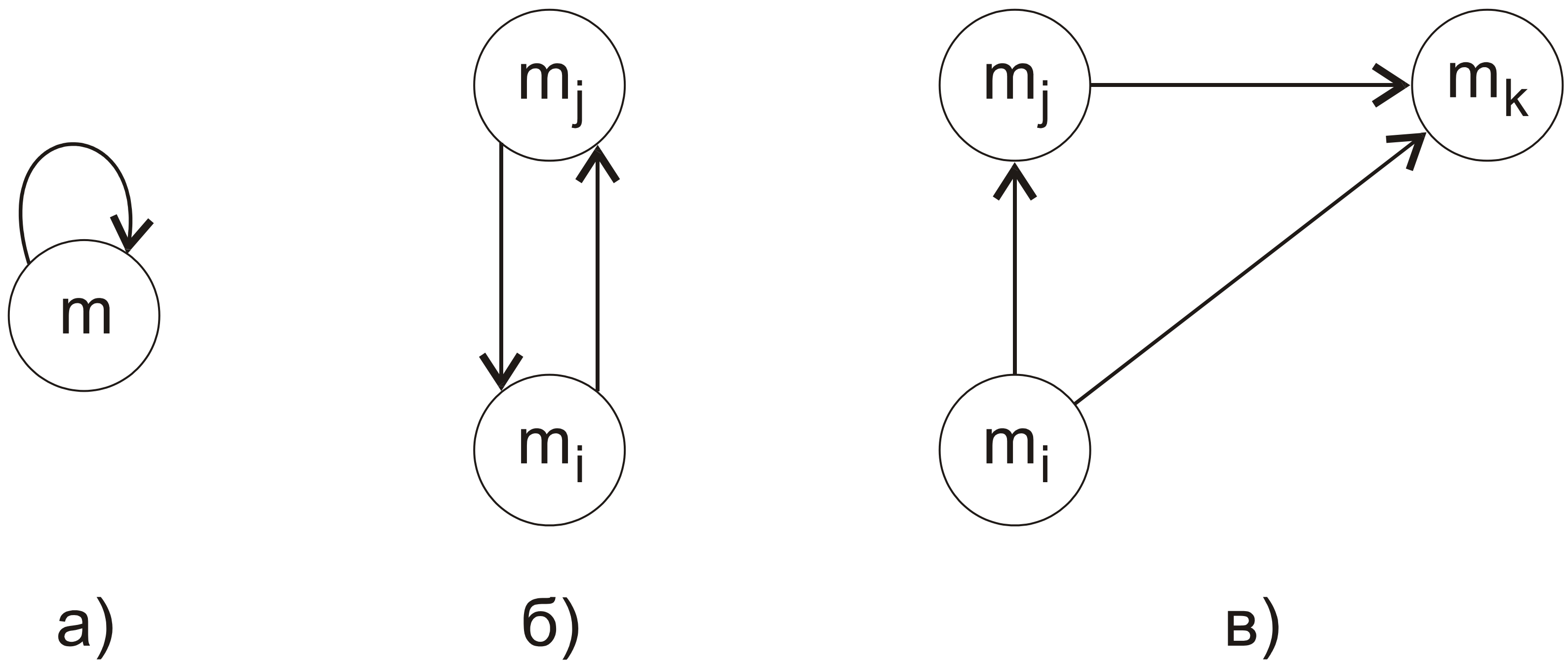
- **Тривиальный граф содержит только одну вершину.**

- **Двудольный граф (биграф, чётный граф) – граф, который может быть представлен двумя непересекающимися подмножествами вершин, причем все ребра соединяют вершины из разных подмножеств.**



Полный двудольный граф К3,2

- **Представление бинарных отношений**



3. Задание графов

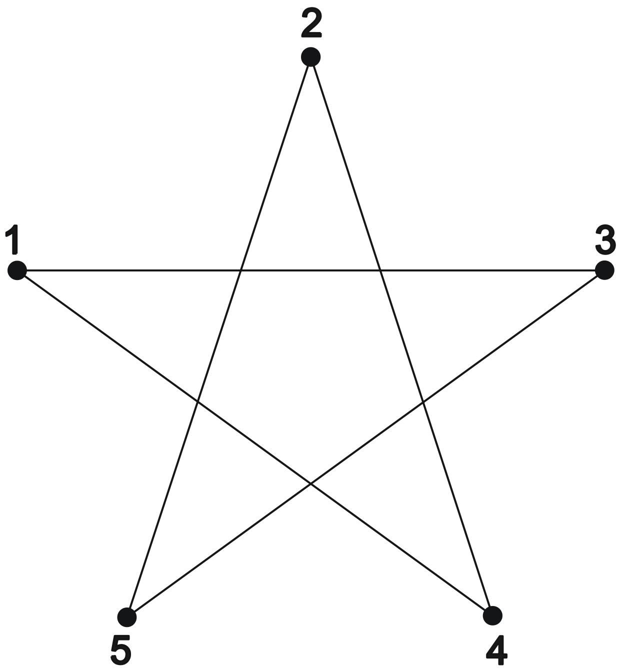
- Граф можно задать так называемой матрицей смежности B, каждой i-ой строке (j-му столбцу) которой однозначно сопоставляют элемент множества M, между которыми выполняется отношение смежности.

- Две вершины, инцидентные одному ребру, смежны.

- Два ребра, инцидентные одной вершине, тоже смежны.

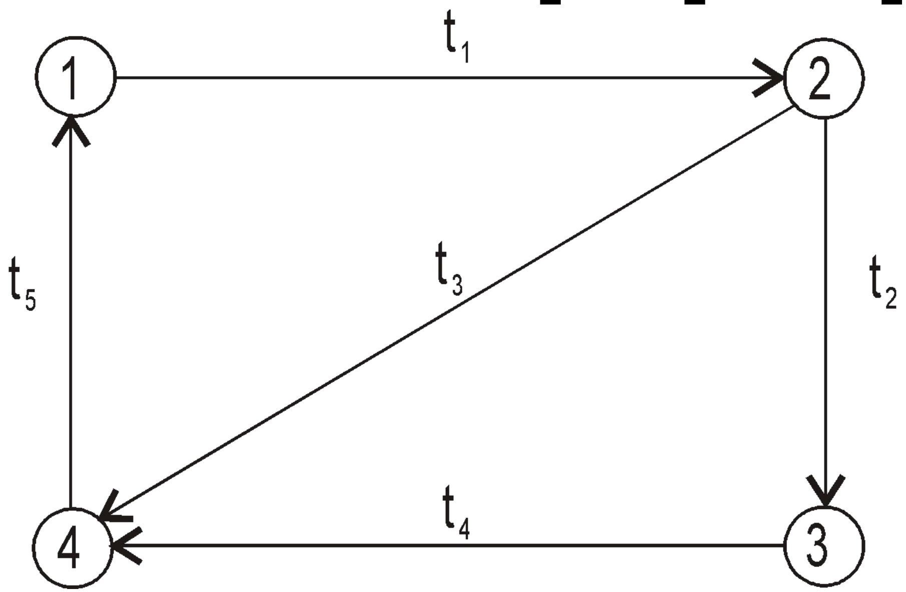
Матрица смежности

i/j	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	1
4	1	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0



Каждая клетка bij соответствует квадрату множества M·M

Задание орграфа



i/j	t1	t2	t3	t4	t5
1	-1	0	0	0	1
2	1	-1	-1	0	0
3	0	1	0	-1	0
4	0	0	1	1	-1

- В описанном виде матрицы инцидентности применимы только к графам без петель, в случае наличия которых матрицу надо разбить на две полуматрицы: положительную и отрицательную.
- Ориентированный граф также может быть задан матрицей смежности.
- Для графов с кратными ребрами в матрице смежности указывают кратность ребер

- **Граф может быть задан списочной структурой: списками смежности и массивами рёбер (дуг).**

4. Характеристики графов

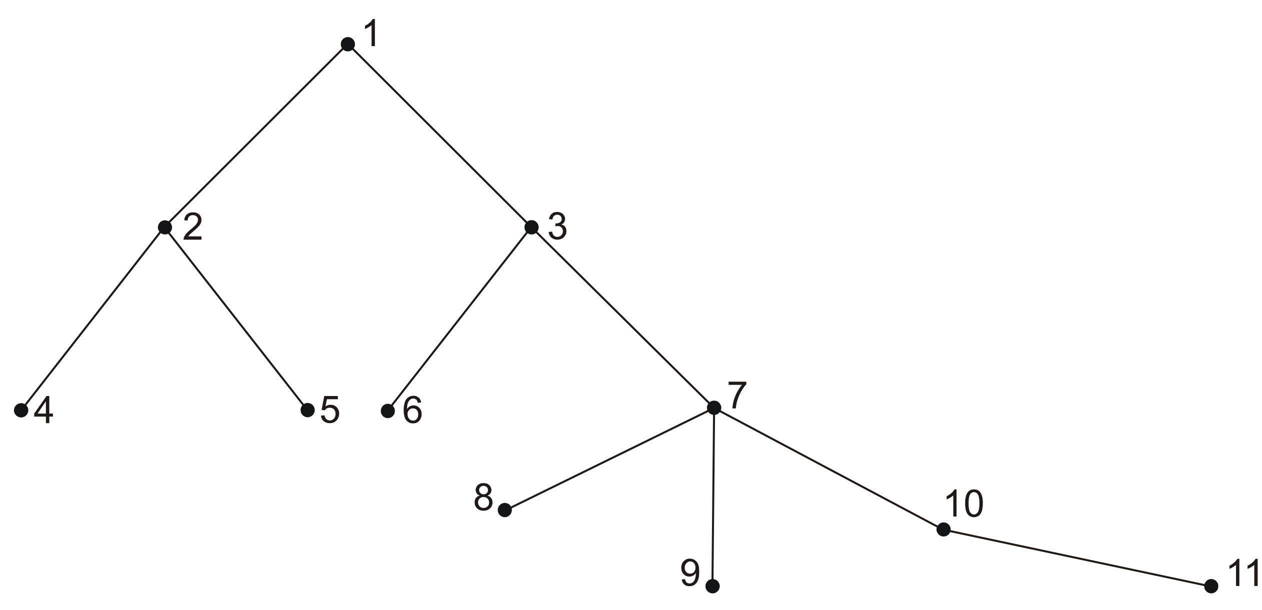
- **Маршруты, цепи, пути, циклы и контуры**

- **Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой два соседних элемента инцидентны.**
- **Если начальная вершина маршрута равна конечной, то маршрут замкнут, иначе открыт.**
- **Если все ребра различны, то маршрут называется цепью.**

- **Если все вершины (а, значит и ребра) различны, то маршрут называется простой цепью.**
- **Замкнутая цепь – цикл.**
- **Граф без циклов называется ациклическим.**
- **В ориентированном графе цепь называется путем, а цикл – контуром.**

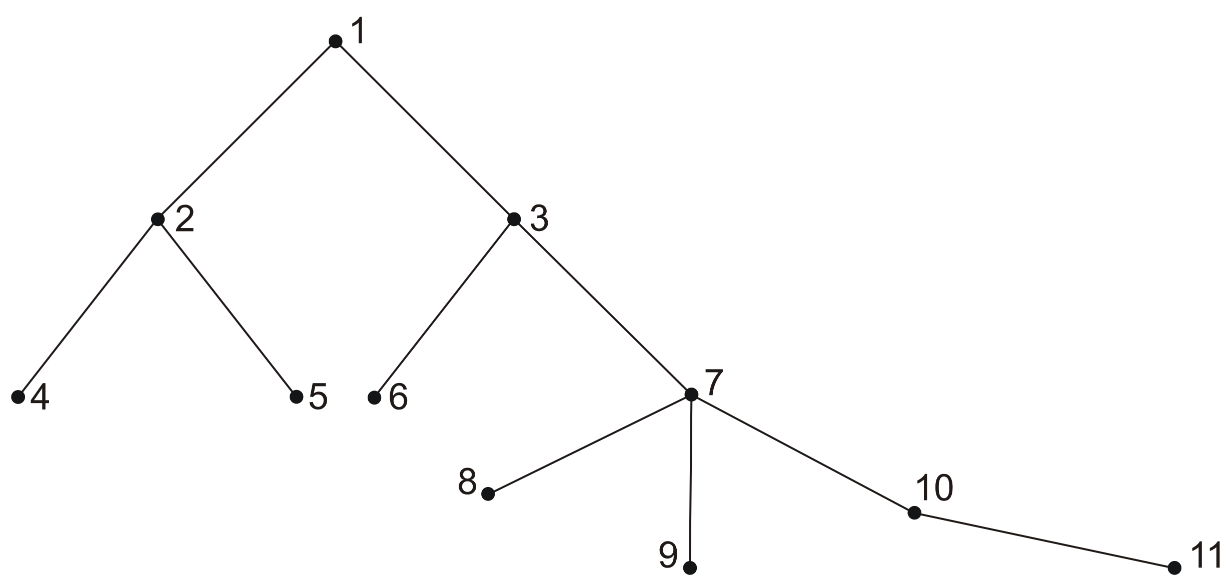
Деревья. Лес.

- Граф связен, если любые две его вершины можно соединить цепью. Если граф не связен, то его можно разбить на отдельные связные подграфы, которые называются компонентами связности.
- Связный граф, не имеющий циклов (ациклический), называется деревом



Деревья. Лес.

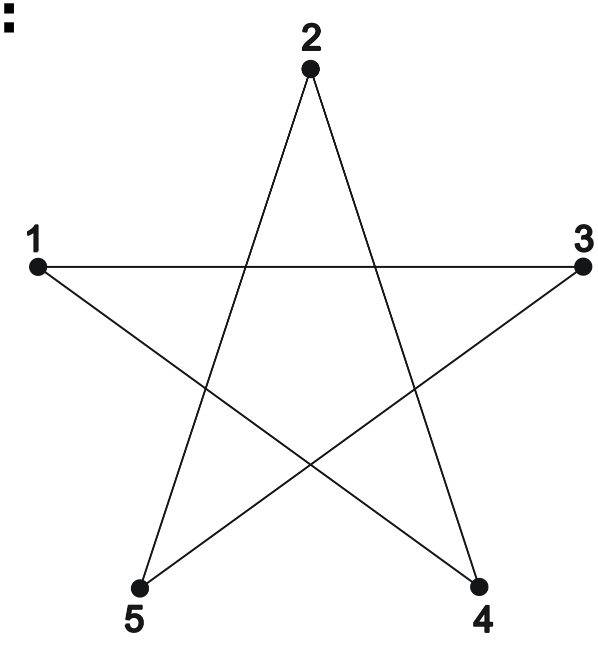
- Деревом может быть задано отношение подчинения в трудовом коллективе, в государстве.
- Простейшее дерево состоит из двух вершин, соединенных ребром.
- Каждый раз, когда добавляется еще одно ребро, в конце его прибавляется также и вершина. Следовательно, дерево с n вершинами имеет n-1 ребро.



Степень вершины

- **Степенью вершины x, обозначаемой deg(x), называют число ребер, инцидентных ей.**
- **Если degx=1, то вершина x тупиковая, если degx=0, то вершина изолированная.**
- **Если G – неориентированный граф с n вершинами и m ребрами, то сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер:**

$$\sum_{j=1}^{n} \deg j = 2m$$



Теорема о сумме степеней вершин

$$\sum_{j=1}^{n} \deg j = 2m$$

- Каждое ребро добавляет единицу к степени каждой из двух вершин, которое оно соединяет, т.е. добавляет 2 к сумме уже имеющихся вершин.
- Следствием является то, что в каждом графе число вершин нечетной степени четно.
- Для ориентированного графа вводятся понятия полустепень исхода и полустепень захода.

Подграф

- **Подграфом GΩ графа G=<M,T> называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A, вместе с ребрами (дугами), их соединяющими.**
- **Так, карта шоссейных дорог Пермской области является подграфом графа «Карта шоссейных дорог Российской Федерации»**

Частичный граф

- Частичным графом GΔ по отношению к графу G называется граф, содержащий только часть ребер (дуг) графа G.
- Так, карта главных дорог России –частичный граф карты шоссейных дорог России

- **Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).**

- **Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.**

- **Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).**

- **Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.**

- **Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).**

- **Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.**

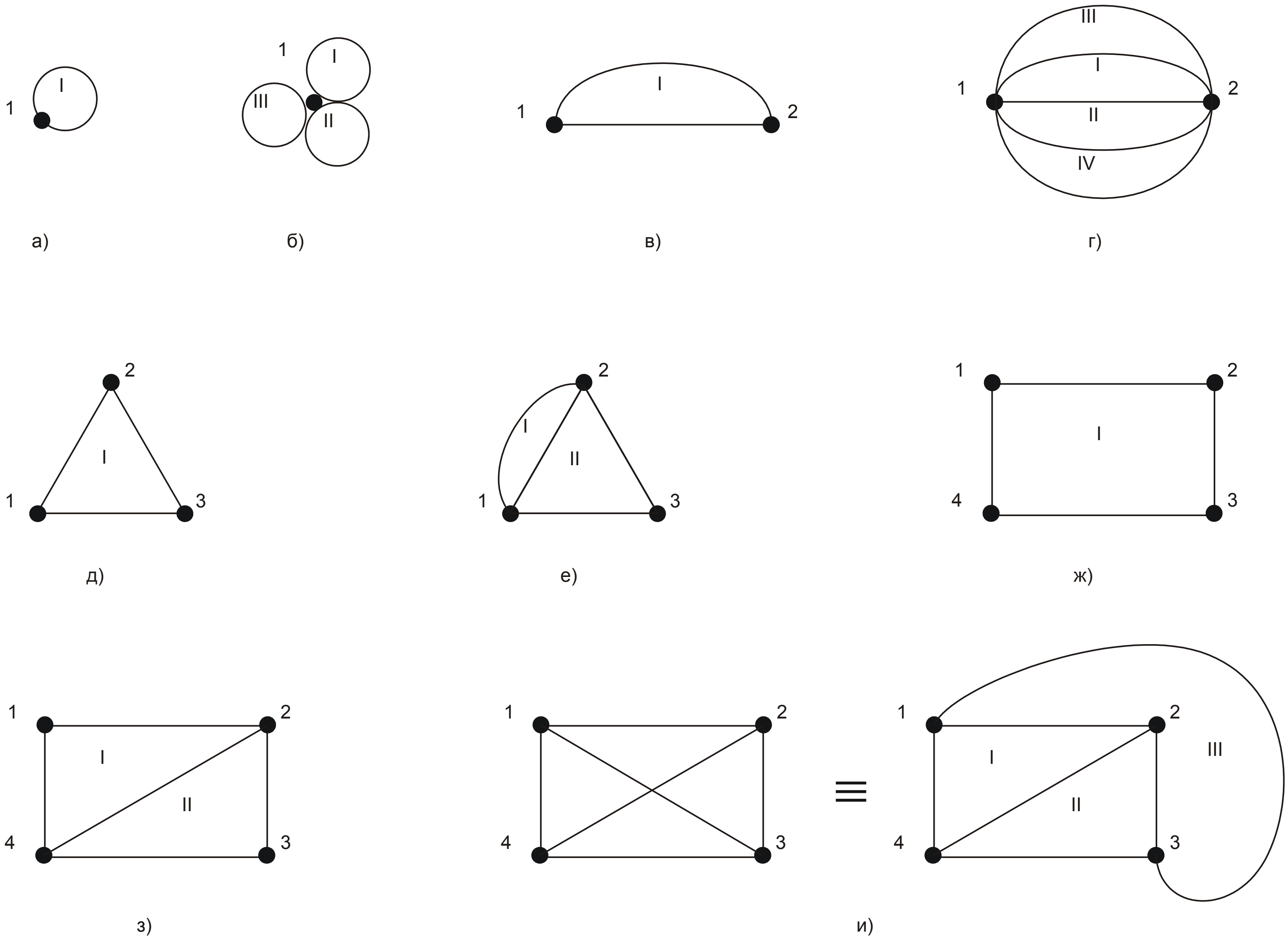
Цикломатическое число.

- Пусть G – неориентированный связный граф, имеющий n вершин и m ребер.
- Цикломатическим числом связного графа G с n вершинами и m ребрами называется число

$$v(G)=m-n+1.$$

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу независимых циклов в графе.

При расчете электрических цепей цикломатическое число используется для определения числа независимых контуров.


1
I
а)
1
I
III
II
б)
1
I
2
в)
III
I
1
2
II
IV
г)
2
I
1
3
д)
2
I
II
1
3
е)
1
2
I
4
3
ж)
1
2
I
II
4
3
з)
1
2
4
3
≡
1
2
I
III
II
4
3
и)

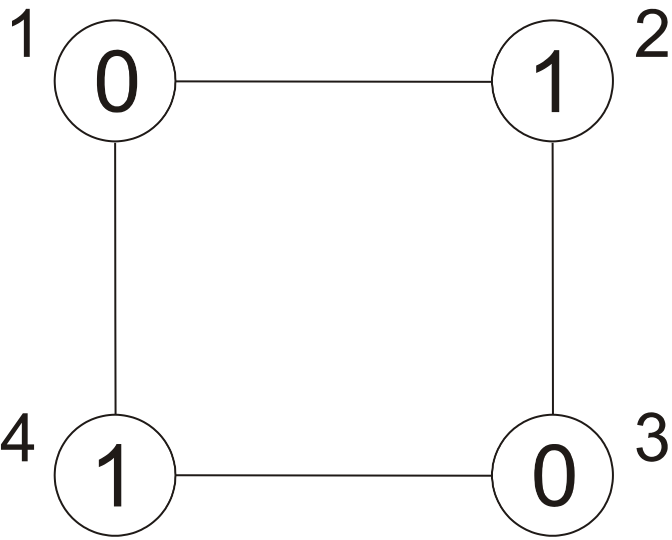
Хроматическое число графа.

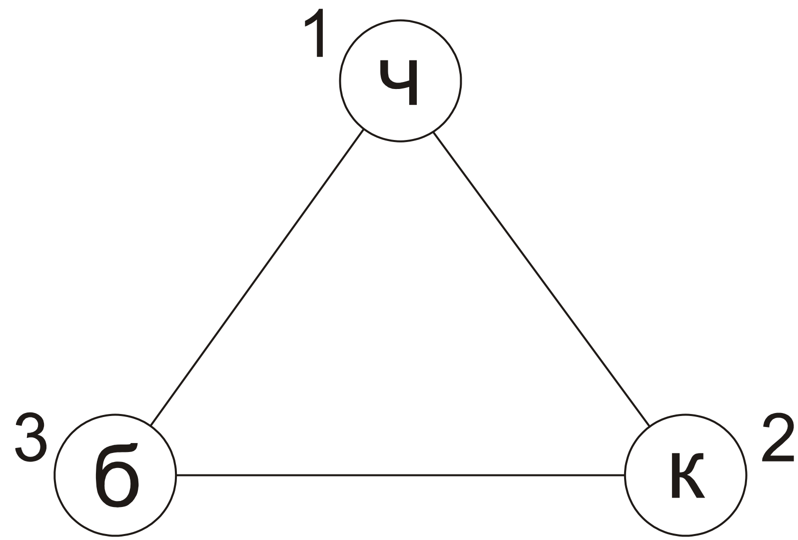
- Граф G называют р - хроматическим, где р – натуральное число, если его вершины можно раскрасить р различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково.

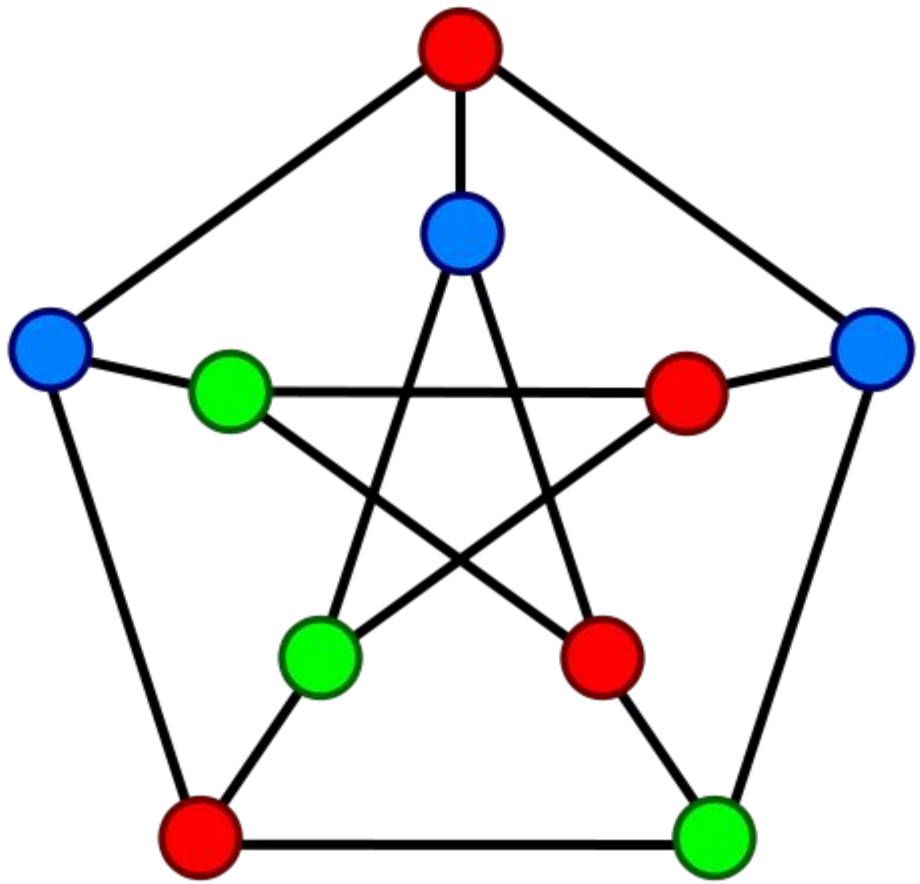
- **Наименьшее число р, при котором граф является р-хроматическим, называют хроматическим числом графа и обозначают λ(G).**

- **Если λ(G)=2, то граф называют бихроматическим.**
- **Необходимым и достаточным условием бихроматичности является отсутствие в графе циклов нечетной длины.**

Примеры раскраски графов

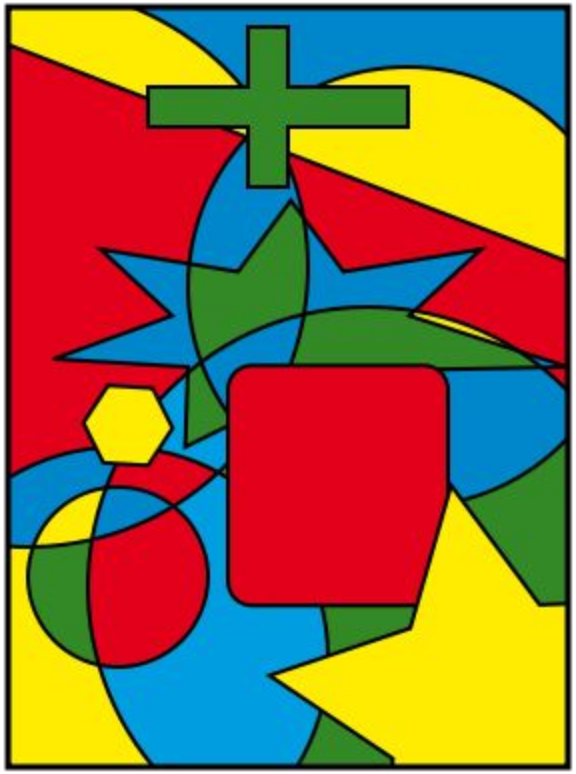






- Френсис Гутри, студент де Моргана, в 1852 году: можно ли всякую расположенную на сфере карту раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета?

Проблема четырёх красок — математическая задача, предложенная Гутри (англ.) в 1852 году.

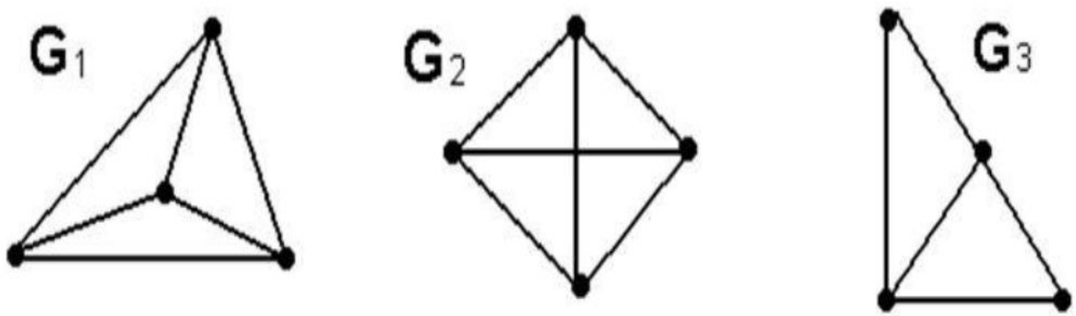


- К. Аппель и В. Хакен доказали в 1976 г. С помощью ЭВМ, что так можно раскрасить любую карту.
- Поэтому некоторые математики отнеслись к этому доказательству с недоверием, что объяснялось не только использованием компьютера, но и громоздкостью описания алгоритма первых доказательств (741 страница).
- Впоследствии были предложены более компактные алгоритмы и скорректирован ряд ошибок.

Изоморфизм графов.

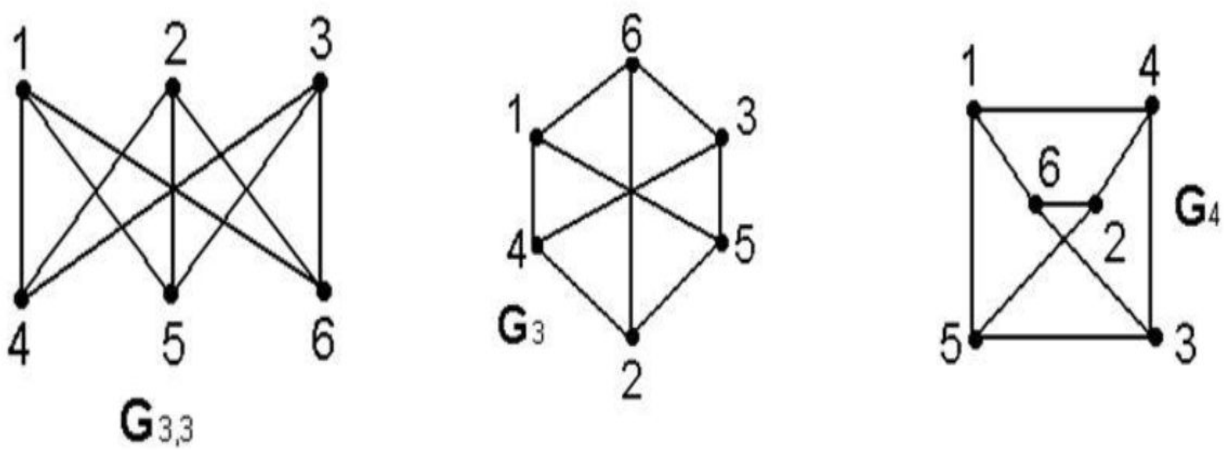
- Иногда не так легко понять, одинаково ли графы, изображенные разными рисунками.
- Вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер графа.
- Строго говоря, граф считается полностью заданным, если нумерация его вершин зафиксирована.
- Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются изоморфными.

Пример6.

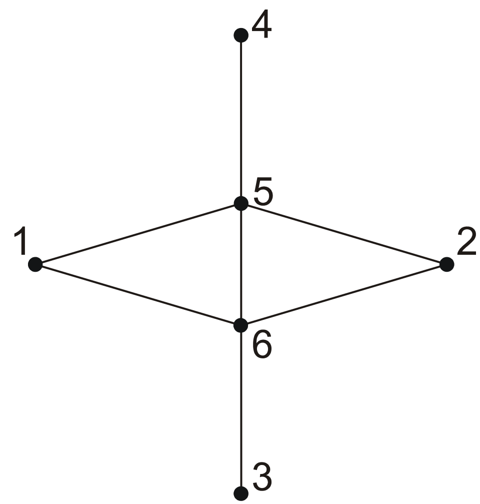


G_1 и G_2 - изоморфны　　　　G_2 и G_3 - неизоморфны

Пример7.

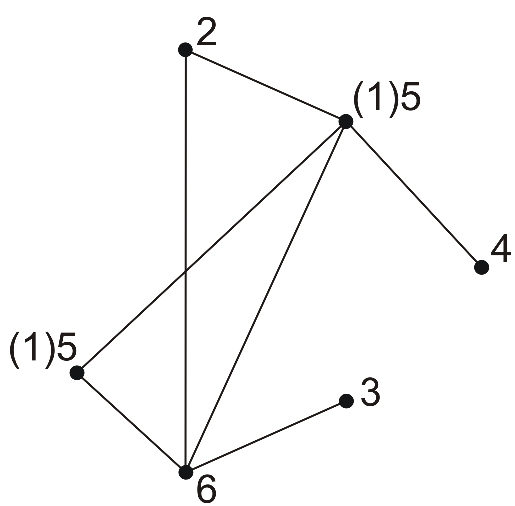


$G_{3,3}$, G_3 и G_4 - изоморфны



$$\left\|\begin{matrix}1&2&3&4&5&6\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{matrix}\right\|\begin{matrix}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

а)



$$\left\|\begin{matrix}1&2&3&4&5&6\\0&1&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&1&0\end{matrix}\right\|\begin{matrix}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

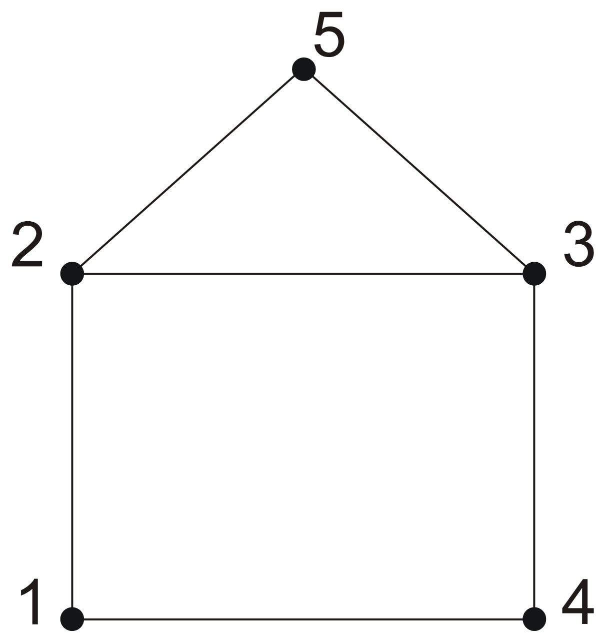
б)

Изоморфизм графов

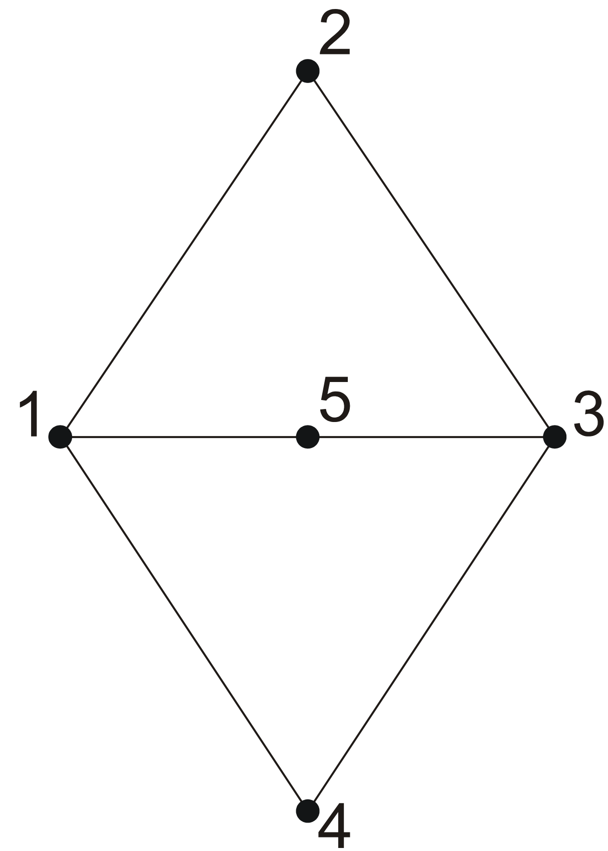
- Если граф ориентированный, то направление дуг в изоморфных графах должно совпадать.
- Чтобы узнать, представляют ли две матрицы смежности изоморфные графы, можно произвести всевозможные одинаковые перестановки строк и столбцов.
- Если после одной из этих перестановок возникнет матрица, совпадающая с заданной, то сравниваемые графы изоморфны. Для этого требуется максимум $n!$ перестановок, где n – число вершин графа.

- **Иногда для определения изоморфности определяют параметры обоих графов: число вершин, число ребер, число компонент связности, последовательность степеней вершин в убывающем порядке.**
- **Если какие-то из этих параметров различны, то эти графы различны.**
- **Однако если все параметры у двух графов совпали, это не гарантирует изоморфности, то есть это необходимое, но не достаточное условие**

- **Два не изоморфных графа, у которых эти параметры совпадают**



а)



б)

Понятие об операциях над графами.

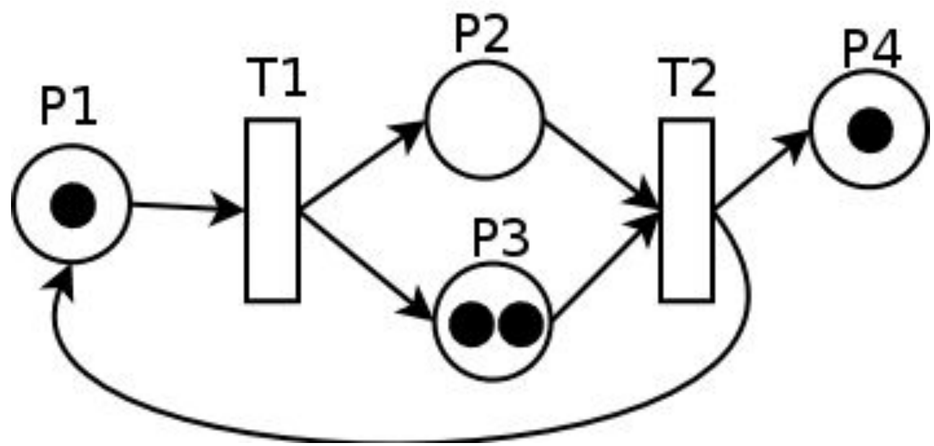
- Полный граф – это граф, в котором все вершины связаны друг с другом. Очевидно, что это аналог универсума в теории множеств.
- Поэтому, можно ввести операцию дополнения графа до полного, например, в матрице смежности неориентированного графа заменяются нули на единицы и наоборот, исключая главную диагональ.

Понятие об операциях над графами.

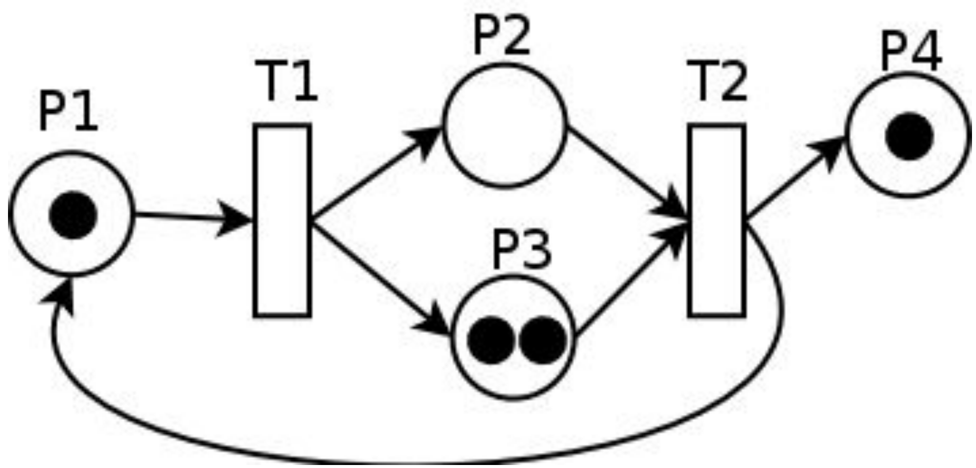
- **Вводятся также операции объединения графов, когда объединяются множества вершин и заданных на них отношений; соединение графов, когда находится пересечение указанных множеств.**
- **Используются и такие операции, как удаление вершины, удаление ребра, добавление вершины, добавление ребра.**

Сети Петри

- **Сети Петри — математический аппарат для моделирования динамических дискретных систем. Впервые описаны Карлом Петри в 1962 году.**

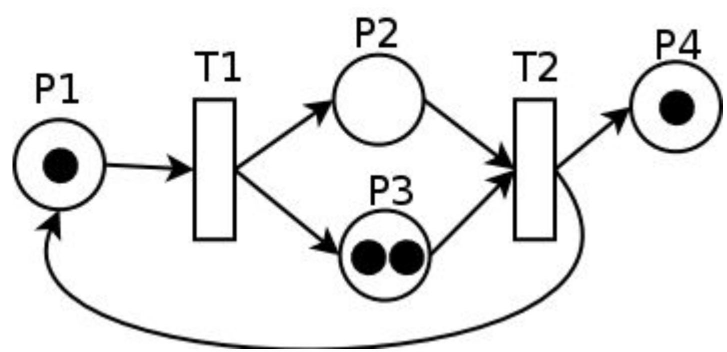


- **Сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, состоящий из вершин двух типов — позиций и переходов, соединённых между собой дугами, вершины одного типа не могут быть соединены непосредственно.**
- **В позициях могут размещаться метки (маркеры), способные перемещаться по сети.**



Сети Петри

- **Событием называют срабатывание перехода, при котором метки из входных позиций этого перехода перемещаются в выходные позиции. События происходят мгновенно, разновременно при выполнении некоторых условий.**



Основными свойствами сети Петри являются:

- Ограниченность — число меток в любой позиции сети не может превысить некоторого значения K.
- Безопасность — частный случай ограниченности, K=1.
- Достижимость — возможность перехода сети из одного заданного состояния (характеризуемого распределением меток) в другое.
- Живость — возможностью срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта.
- В основе исследования перечисленных свойств лежит анализ достижимости.

Некоторые виды сетей Петри:

Временная сеть Петри — переходы обладают весом, определяющим продолжительность срабатывания (задержку).

- Стохастическая сеть Петри — задержки являются случайными величинами.
- Функциональная сеть Петри — задержки определяются как функции некоторых аргументов, например, количества меток в каких-либо позициях, состояния некоторых переходов.

Некоторые виды сетей Петри:

- **Цветная сеть Петри — метки могут быть различных типов, обозначаемых цветами, тип метки может быть использован как аргумент в функциональных сетях.**
- **Ингибиторная сети Петри — возможны ингибиторные дуги, запрещающие срабатывания перехода, если во входной позиции, связанной с переходом ингибиторной дугой находится метка.**

Множество устойчивости

- **Множеством внутренней устойчивости графа называется подмножество таких его вершин, которые несмежны между собой.**
- **Множеством внешней устойчивости графа называют такое подмножество его вершин, если любая вершина, не принадлежащая этому подмножеству, смежна с вершинами из этого подмножества.**
- **Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число вершин, называют наименьшим внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества – число внешней устойчивости графа.**

- Если две вершины соединены ребром, то говорят, что каждая вершина инцидентна этому ребру, а соответствующие вершины – смежны (две вершины, инцидентные одному ребру – смежны).

- Два ребра, инцидентные одной вершине, также смежны.