ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Помимо полезного регулярного сигнала *в выходной цепи приемника наблюдается хаотический сигнал со случайными амплитудой, частотой и фазой -* ***шум приемника****. На фоне шума становятся неразличимыми малые полезные сигналы, т. е. шум ограничивает возможности ПИ.*

Случайным называется событие, которое в результате проведения эксперимента может произойти или не произойти.

Случайная величина *— это величина, которая при повторных измерениях принимает одно из заранее неизвестных значений.*

Основной характеристикой в теории вероятностей является ***вероятность события*** *(P).*

Оценка *(приближенное значение P)* ***вероятности события*** *(V) определяется выражением:*

$$\boxed{V = \frac{n}{N}}$$

N – полное число случайных событий

n – число успешных событий

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Законы распределения случайных величин и их моменты

При N→∞ получим ***вероятность события***

$$\boxed{P=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}}$$

Интегральный закон распределения *(F)*

$$\boxed{F(X)=P\left[x\le X\right]}$$

Дифференциальный закон распределения **(*f*(*x*))** *для непрерывной случайной величины*

$$\boxed{f(x)=\frac{dF(x)}{dx}}$$

Для случайной величины изменяющейся дискретно

$$\boxed{f(x)=\sum_i f_i\delta(x-x_i)}\quad \textit{где}\quad \boxed{f_i=P\left[x=x_i\right]}$$

Свойства законов распределения случайных

1. $F(\infty)=1 \;\rightarrow\; F(x_{\max})=1$

2. $F(-\infty)=0 \;\rightarrow\; F(x_{\min})=0$

3. $F(x_1)\geq F(x_2)$ если $x_1>x_2$

1. $f(x)\geq 0$

2. $\int\limits_x f(x)dx=1$

3. $P\left[x_1<x<x_2\right]=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Законы распределения случайных величин и их моменты

Многомерные законы распределения

$$\boxed{F(X_1, X_2, ..., X_n) = P(x_1 <= X_1; x_2 <= X_2; ...; x_n <= X_n)}$$

$$\boxed{f(x_1, x_2, \; ... \; , x_n) = \frac{dF(x_1, x_2, \; ... \; , x_n)}{dx_1 dx_2 ... dx_n}}$$

Начальные моменты законов распределения

$$\boxed{\alpha_s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx = \mathrm{M}\left[x^s\right]}$$

s – порядок момента

Наиболее важен в светотехнике начальный момент первого порядка, который получил название ***математическое ожидание*** *и имеет несколько обозначений*

$$\boxed{\alpha_1 = m_x = \mathrm{M}[x] = \langle x \rangle = \bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}$$

Физический смысл α_1 – это ***среднее значение случайной величины***

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Законы распределения случайных величин и их моменты

Центральные моменты законов распределения

$$\boxed{\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x)dx = \mathrm{M}\left[(x - m_x)^s\right]}$$

s – порядок момента

Для всех случайных величин ***μ₁=0***, *поэтому наибольшее распространение получил начальный момент второго порядка, названый* ***дисперсией*** *и квадратный корень из нее -* ***среднеквадратическое*** *(среднеквадратичное)* ***отклонение*** *(σ, СКО)*

$$\left.\begin{aligned} &\mu_2 = \mathrm{M}\left[(x - m_x)^2\right] = D_x = \sigma_x^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx \\ &\boldsymbol{\sigma}_x = \sqrt{D_x} \end{aligned}\right\}$$

Физический смысл СКО состоит в том, ее величине пропорционален разброс случайных значений x относительно математического ожидания

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Законы распределения случайных величин и их моменты

Связь центральных и начальных моментов

При разложении $(x-m_x)^s$ *по биному Ньютона получим:*

$$\boxed{\mu_s = \sum_{i=1}^{s} \frac{s!}{i!(s-i)!}(-1)^i m_s^i \alpha_{s-i}}$$

Связь дисперсии и математического ожидания с начальным моментом 2-го порядка

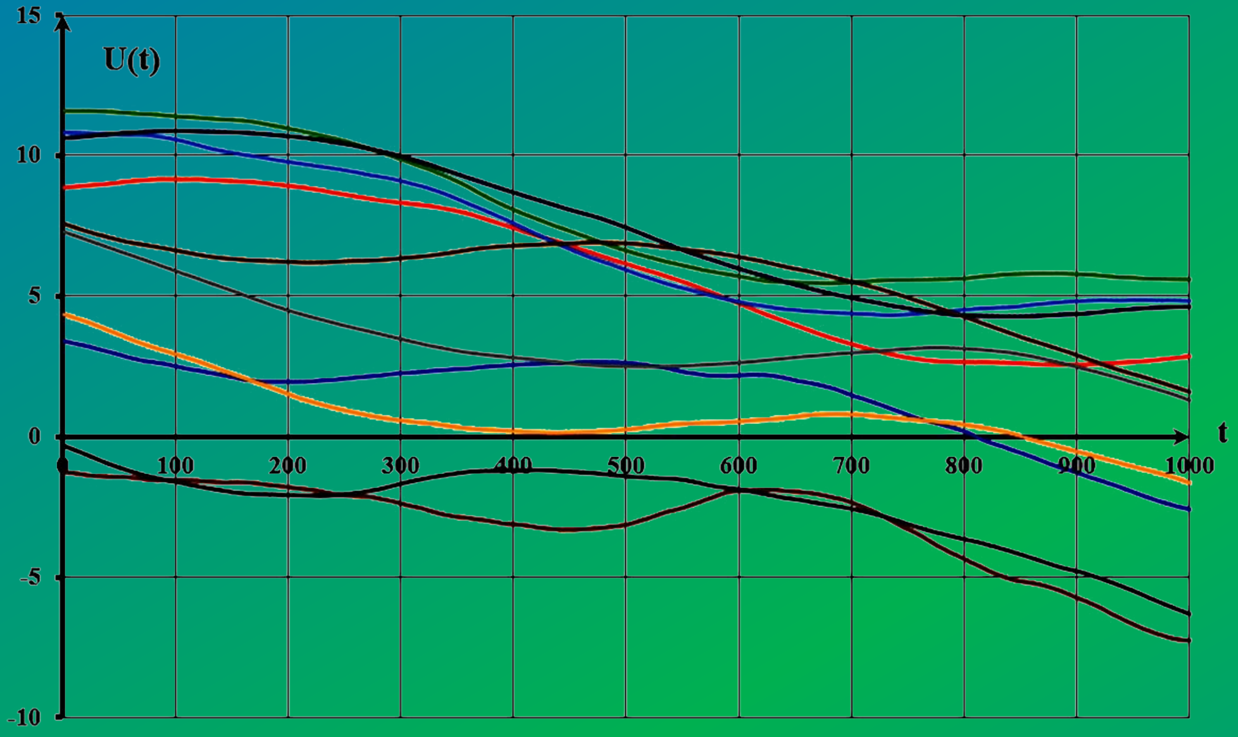
$$\boxed{\mu_2 = \mathrm{M}\left[(x-m_x)^2\right]} \qquad \boxed{\mu_2 = \mathrm{M}\left[x^2 - 2xm_x + m_x^2\right]} \qquad \boxed{\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2}$$

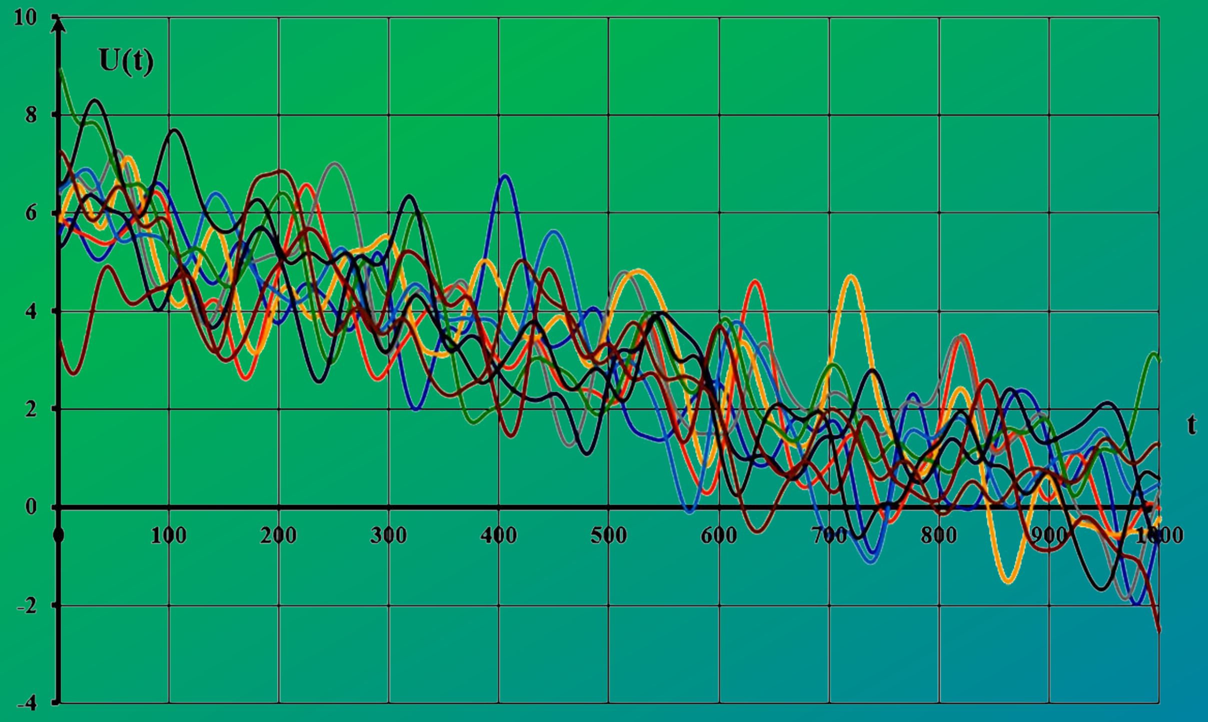
Если случайное значение изменяется с течением времени, что характерно для сигналов на выходе фотоприемников, то такие зависимости называются ***случайными процессами***

Зависимости случайных процессов от времени, полученные при измерениях, называются ***реализациями случайного процесса***

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Корреляционная функция и ее свойства





$$m_{1x}(t) = m_{2x}(t)$$

$$\sigma_{1x}(t) = \sigma_{2x}(t)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Корреляционная функция и ее свойства

Корреляционная функция *равна математическому ожиданию произведения двух центрированных значений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2*

$$\boxed{R_x(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x_1-m_x(t_1)\right)\left(x_2-m_x(t_2)\right)f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2}$$

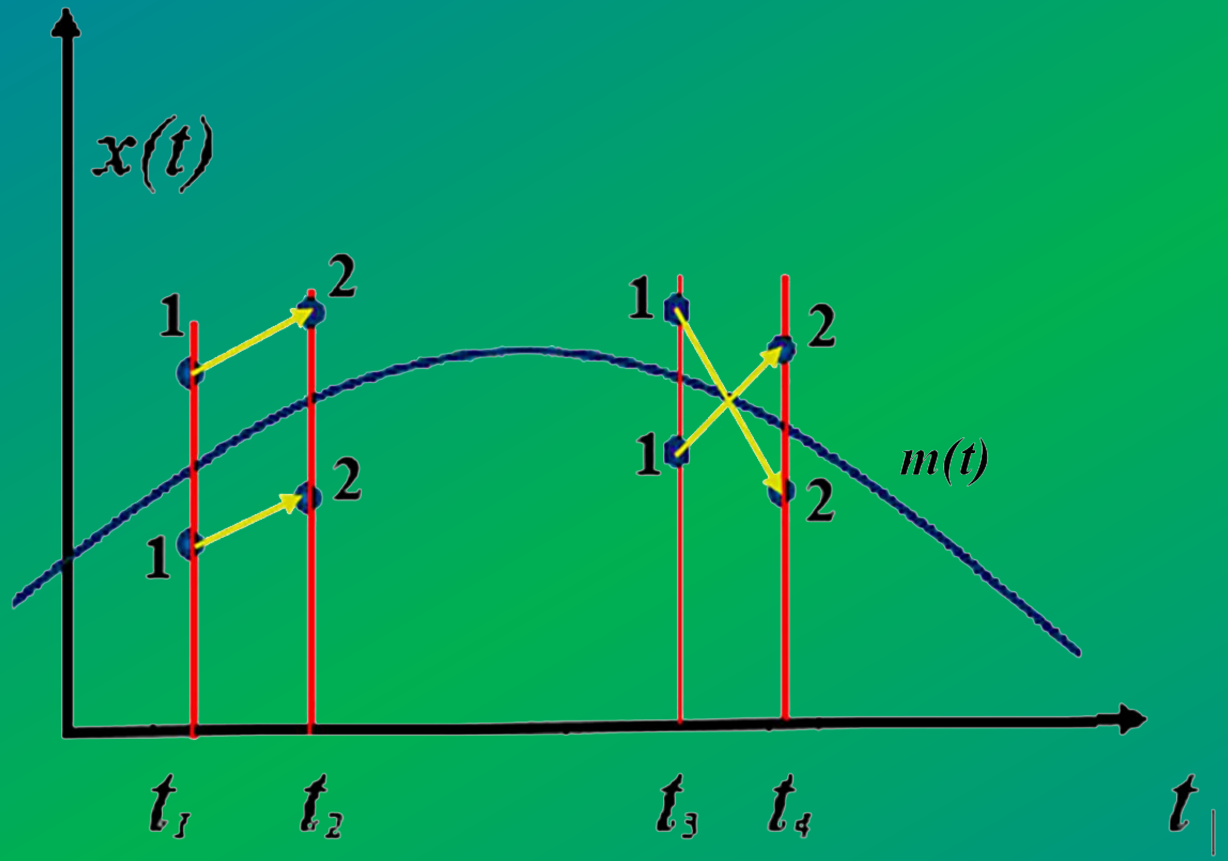
где $f(x_1,x_2,t_1,t_2)$ двумерный закон распределения случайных величин x_1 и x_2 (значения случайного процесса x в моменты времени t_1 и t_2), $m_x(t_1)$, $m_x(t_2)$ – значения математических ожиданий x в моменты времени t_1 и t_2

$$\boxed{R_x(t_1,t_2)=M\left[\left(x_1-m_x(t_1)\right)\left(x_2-m_x(t_2)\right)\right]}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Корреляционная функция и ее свойства

*Значение корреляционной функции позволяет **в среднем предсказывать изменение** случайных реализаций **с течением времени***



$R(t_1,t_2) > 0 \rightarrow$ *x_1 и x_2 в среднем колеблются относительно m(t) в фазе*

$R(t_3,t_4) < 0 \rightarrow$ *x_1 и x_2 в среднем колеблются относительно m(t) в противофазе*

$R(t_1,t_2) = 0 \rightarrow$ *x_1 и x_2 в среднем колеблются относительно m(t) независимо*

Корреляционная функция и ее свойства

Значения $R(t_1,t_2)$ ***получают экспериментально****, а затем аппроксимируют аналитическими выражениями. Оказалось, что* ***не всякую функцию можно использовать*** *для такой аппроксимации, т.к. из ее определения следует ряд свойств, которым она должна удовлетворять*

$$R_x(t_1,t_2) = M\left[\left(x_1 - m_x(t_1)\right)\left(x_2 - m_x(t_2)\right)\right]$$

1. Четность $\boxed{R_x(t_1,t_2) = R_x(t_2,t_1)}$

2. Значение корреляционной функции в совпадающие моменты времени – это дисперсия случайного процесса в этот момент времени

$$\boxed{R_x(t_1,t_1) = D_x(t_1)}$$

Корреляционная функция и ее свойства

3. Добавление к случайному процессу *X(t)* любой неслучайной функции времени *φ(t)* не изменяет его корреляционную функцию

$$\boxed{Y(t)=X(t)+\varphi(t)}$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2)=M\left[\left(Y(t_1)-m_Y(t_1)\right)\left(Y(t_2)-m_Y(t_2)\right)\right]}$$

$$\boxed{m_Y(t)=M\left[\left(X(t)+\varphi(t)\right)\right]}$$

$$\boxed{m_Y(t)=M\left[X(t)\right]+M\left[\varphi(t)\right]}$$

$$\boxed{m_Y(t)=m_X(t)+\varphi(t)}$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2)=M\begin{bmatrix}\left(X(t_1)+\varphi(t_1)-m_X(t_1)-\varphi(t_1)\right)\cdot\\ \cdot\left(X(t_2)+\varphi(t_2)-m_X(t_2)-\varphi(t_2)\right)\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2)=M\left[\left(X(t_1)-m_x(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_x(t_2)\right)\right]}$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)}$$

Корреляционная функция и ее свойства

4. Абсолютное значение корреляционной функции всегда меньше, либо равно, среднего геометрического значения дисперсий в соответствующие моменты времени

Рассмотрим тождество

$$M\left[a^2\right] \geq 0$$

$$a = \sqrt{R(t_1,t_1)}\left(X(t_2) - m_X(t_2)\right) \pm \sqrt{R(t_2,t_2)}\left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)$$

$$M\left[R(t_1,t_1)\left(X(t_2) - m_X(t_2)\right)^2\right] \pm$$

$$\pm 2M\left[\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}\left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_X(t_2)\right)\right] +$$

$$+ M\left[R(t_2,t_2)\left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)^2\right] \geq 0$$

Корреляционная функция и ее свойства

4. Абсолютное значение корреляционной функции всегда меньше, либо равно, среднего геометрического значения дисперсий в соответствующие моменты времени

$$\boxed{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2) \pm 2\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}R(t_1,t_2) + R(t_2,t_2)R(t_1,t_1) \geq 0}$$

$$\boxed{\pm\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}R(t_1,t_2) \geq -R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}$$

$$+\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)} \geq 0 \qquad \boxed{\left.\begin{aligned} R(t_1,t_2) &\geq -\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)} \\ R(t_1,t_2) &\leq \sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)} \end{aligned}\right\}}$$

$$-\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)} < 0$$

$$\boxed{\left|R(t_1,t_2)\right| \leq \sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Корреляционная функция и ее свойства

5. Абсолютное значение корреляционной функции всегда меньше, либо равно, среднего арифметического значения дисперсий в соответствующие моменты времени

Рассмотрим тождество

$$\boxed{(a-b)^2 \geq 0 \qquad \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab}$$

$$\boxed{a = \sqrt{R(t_1,t_1)} \qquad b = \sqrt{R(t_2,t_2)}}$$

$$\boxed{\frac{R(t_1,t_1)+R(t_2,t_2)}{2} \geq \sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}}$$

$$\boxed{\left|R\left(t_1,t_2\right)\right| \leq \frac{R(t_1,t_1)+R(t_2,t_2)}{2}}$$

6. У *эргодических случайных процессов* $R(t_1,t_2) \to 0$ если $(t_1 - t_2) \to \infty$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Стационарность и эргодичность случайных процессов

Стационарными **(в узком смысле)** ***случайными процессами*** **называют процессы, у которых все многомерные функции плотности вероятностей не зависят от начала отсчета времени**

$$\boxed{f\left(x(t_1), x(t_2),\ \dots, x(t_n)\right) = f(x_1, x_2,\ \dots, x_n; t_1, t_2\ \dots\ t_n) = f(x_1, x_2,\ \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 t_1 + t_0\ \dots\ t_n t_1 + t_0)}$$

Стационарными **(в широком смысле)** ***случайными процессами*** **называют процессы, у которых одномерный и двумерный законы распределения не зависят от начала отсчета времени**

$$\boxed{m_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t+t_0)dx}$$

$$t_0 = -t$$

$$\boxed{m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;0)dx = m_x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_x(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2; t_1 + t_0, t_2 + t_0)dx_1 dx_2 \end{aligned}}$$

$$t_0 = -t_1$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Стационарность и эргодичность случайных процессов

$$\boxed{R_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x)(x_2-m_x)\,f(x_1,x_2;0,t_2-t_1)\,dx_1dx_2=R_x(t_2-t_1)}\quad \tau=t_2-t_1\quad \boxed{R_x(t_1,t_2)=R_x(\tau)}$$

Стационарные процессы**, у которых* $R_x(\tau)\to 0$ *при* $\tau\to\infty$ *называются **эргодическими процессами

Для эргодических процессов вычисление математического ожидания можно проводить путем усреднения по времени вдоль одной длинной реализации (ее длительность $T\to\infty$)

$$\boxed{M[x]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt=m_x}$$

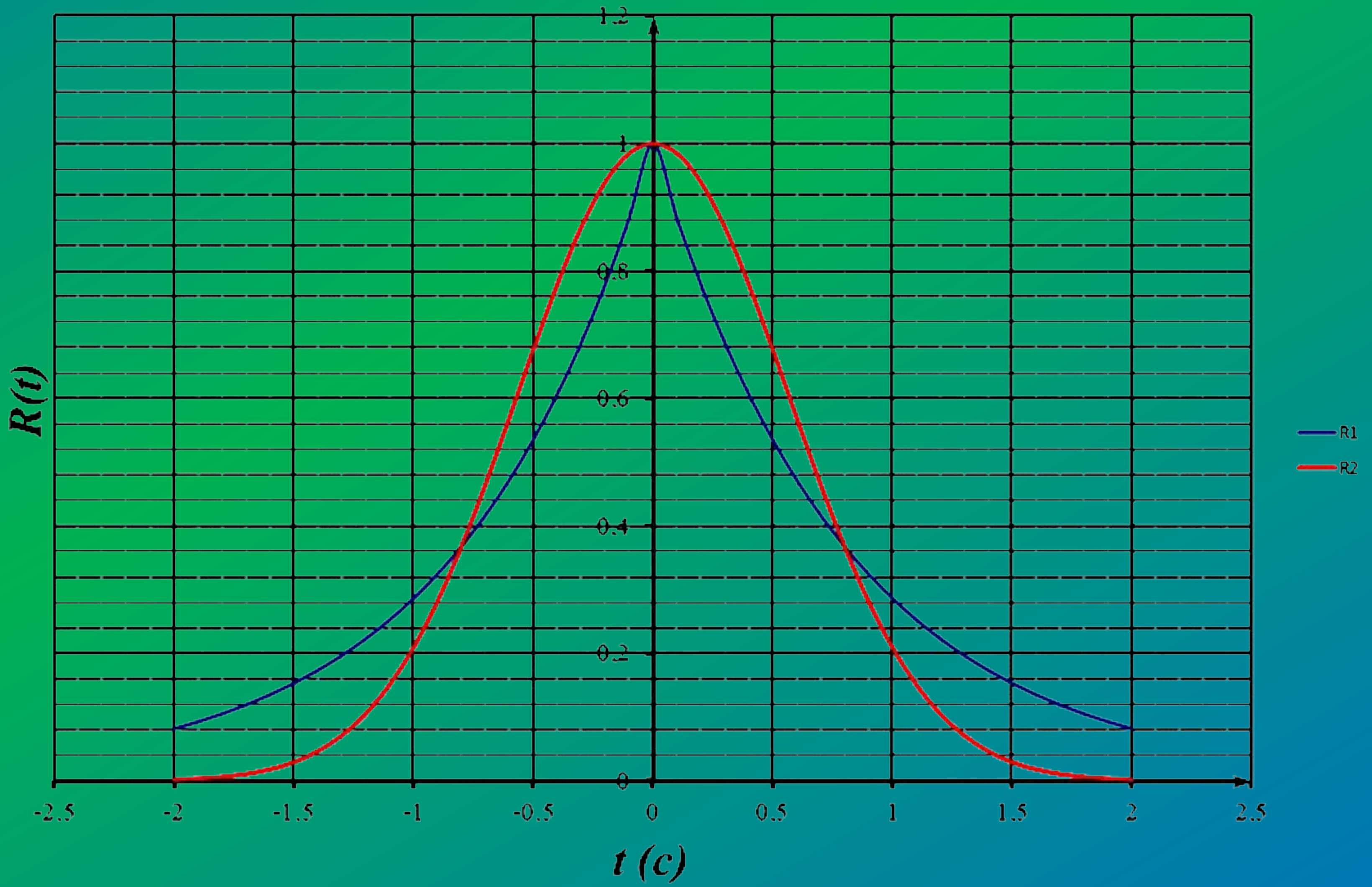
$$\boxed{R(\tau)=M[x(t)x(t+\tau)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аппроксимации корреляционной функции

$$R_x(t) = D_x \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_0}\right)$$

$$R_x(t) = D_x \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right)$$



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

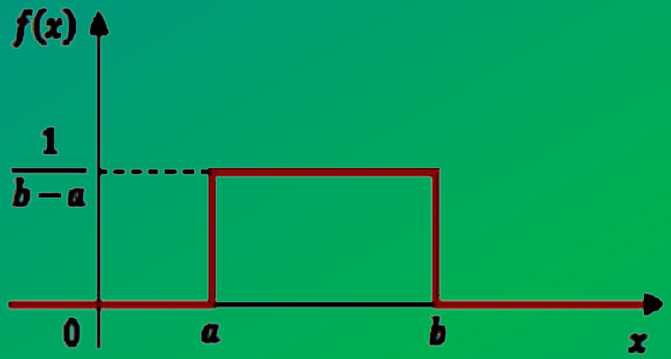
$$f(x)=\begin{cases} C & \text{если } a\le x\le b \\ 0 & \text{если } a>x>b \end{cases}$$

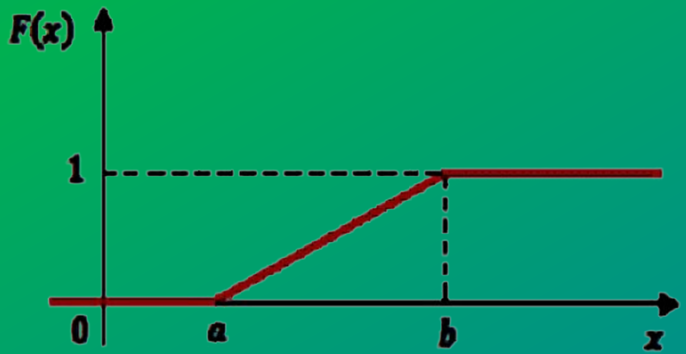
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\rightarrow\int_a^b Cdx=1$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{если } a\le x\le b \\ 0 & \text{если } a>x>b \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{если } a\le x\le b \\ 1 & \text{при } x>b \end{cases}$$

Закон равномерной плотности





Моменты закона равномерной плотности

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$m_x=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

$$\boxed{m_x=\frac{a+b}{2}}$$

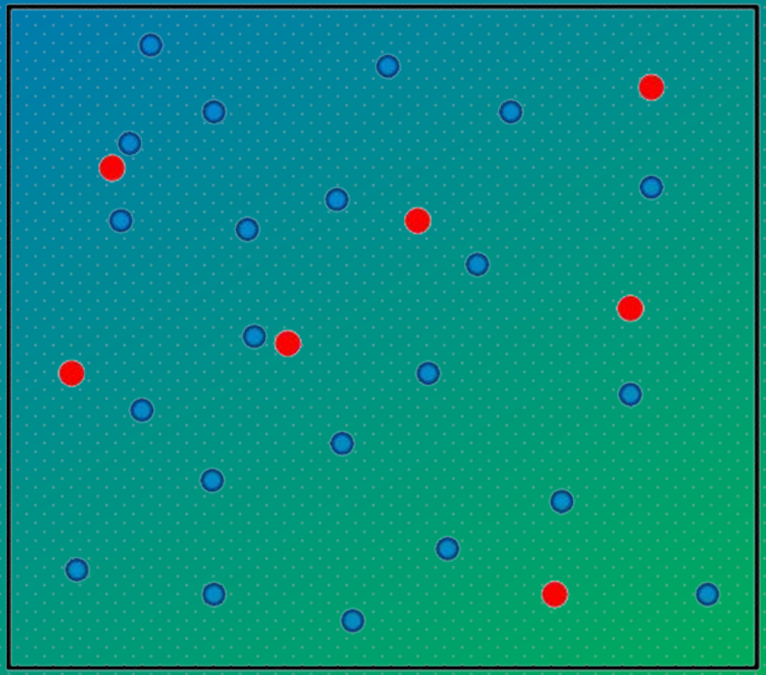
$$D_x=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

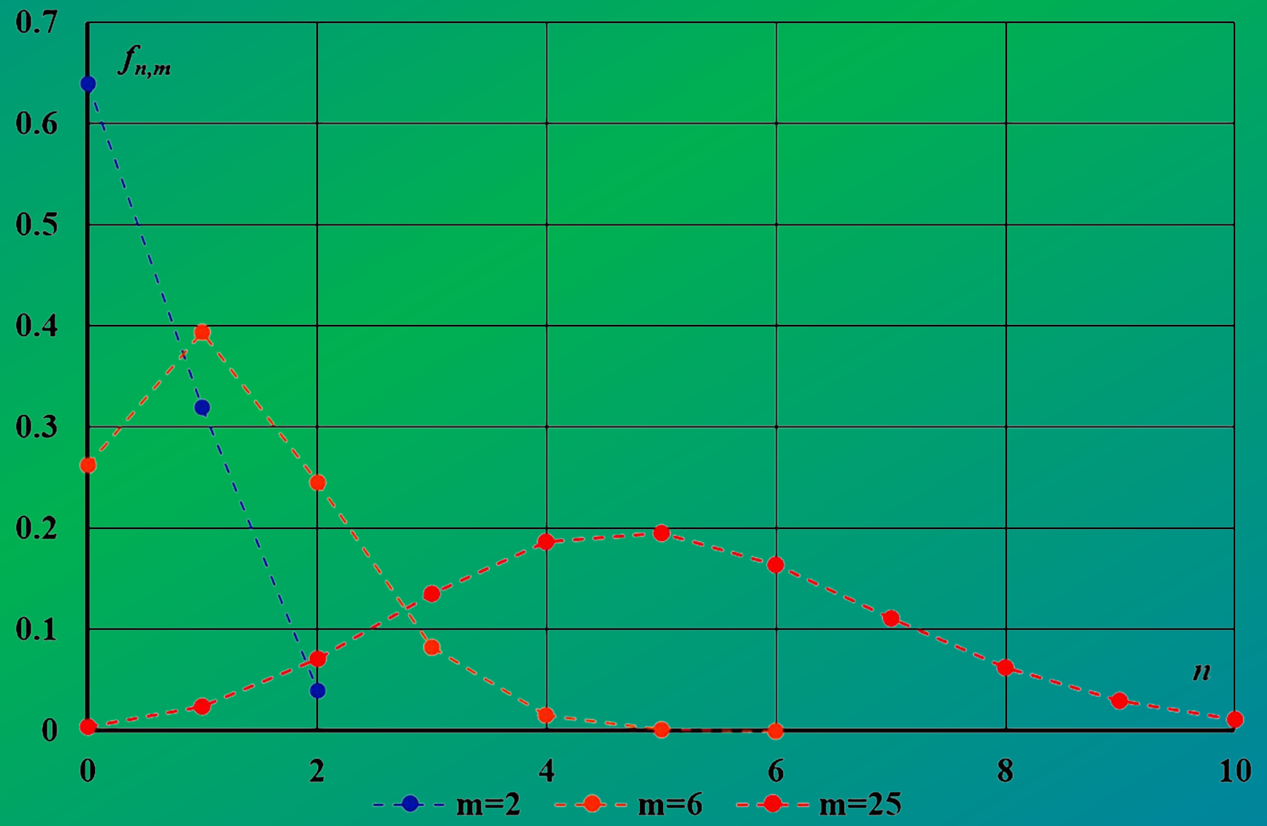
$$\boxed{D_x=\frac{(b-a)^2}{12}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Биномиальный закон распределения





Каждый из ***m*** атомов излучает квант с вероятностью ***p***. Какова вероятность $f_{n,m}$ испускания квантов n атомами

$$f_{n,m} = \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n} = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

- число перестановок из ***n*** событий в полном числе событий ***m***

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Биномиальный закон распределения

Моменты биномиального закона распределения

$$m_n = \sum_{n=0}^{m} n f_{n,m} = \sum_{n=0}^{m} n \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}$$

$$m_n = mp \sum_{n=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} p^{n-1} (1-p)^{m-1-(n-1)}$$

$$k = n-1$$

$$m_n = mp \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-n)!} p^k (1-p)^{m-1-k}$$

Бином Ньютона: $(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n a^n b^{m-n}$

$$\boxed{m_n = mp}$$

$$\boxed{\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2}$$

$$D_n = \sum_{n=0}^{m} n^2 f_{n,m} - (mp)^2 = \sum_{n=0}^{m} n^2 \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n} - (mp)^2$$

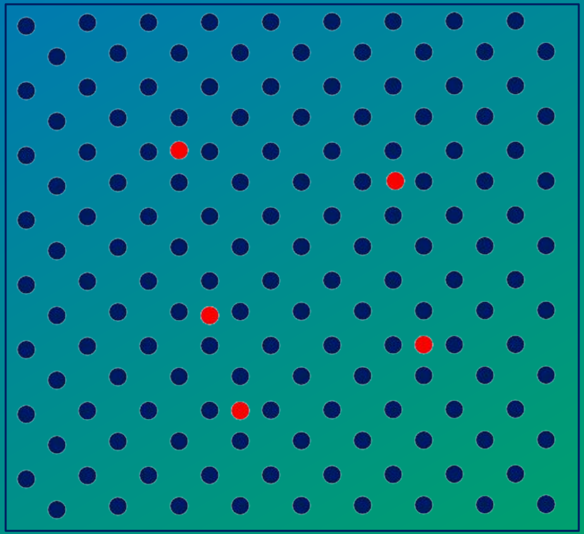
$$mp \sum_{n=1}^{m} ((n-1)+1) \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} p^{n-1} (1-p)^{m-1-(n-1)} = mp \sum_{n=1}^{m} (n-1) \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} p^{n-1} (1-p)^{m-1-(n-1)} + mp$$

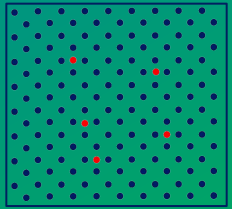
$$mp(m-1)p \sum_{n=2}^{m} \frac{(m-2)!}{(n-2)!(m-n)!} p^{n-2} (1-p)^{m-1-(n-1)} = m(m-1)p^2$$

$$\boxed{D_n = mp(1-p)}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин





Закон распределения Пуассона

Предельный переход в биномиальном законе распределения

$$\boxed{m \to \infty;\ p \to 0;\ mp = a}$$

$$f_{n,m} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} \frac{m!}{n!(m-n)!} p^n (1-p)^{m-n}$$

$$f_{n,m} = \frac{1}{n!} \lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} (1-p)^m \frac{m!}{(m-n)!} p^n (1-p)^{-n}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} (1-p)^m = \lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} \left[(1-p)^{\frac{1}{p}} \right]^{mp} = \exp(-a)$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} \frac{m!}{(m-n)!} p^n = \lim_{\substack{m\to\infty\\ p\to 0\\ mp=a}} \frac{m!}{(m-n)!} \frac{(mp)^n}{m^n} = (a)^n \lim_{m\to\infty} \frac{\overbrace{(m-n+1)(m-n+2)\ \cdots\ m}^{n\ \text{чисел}}}{m^n} = a^n$$

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^{-n} = 1$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Закон распределения Пуассона

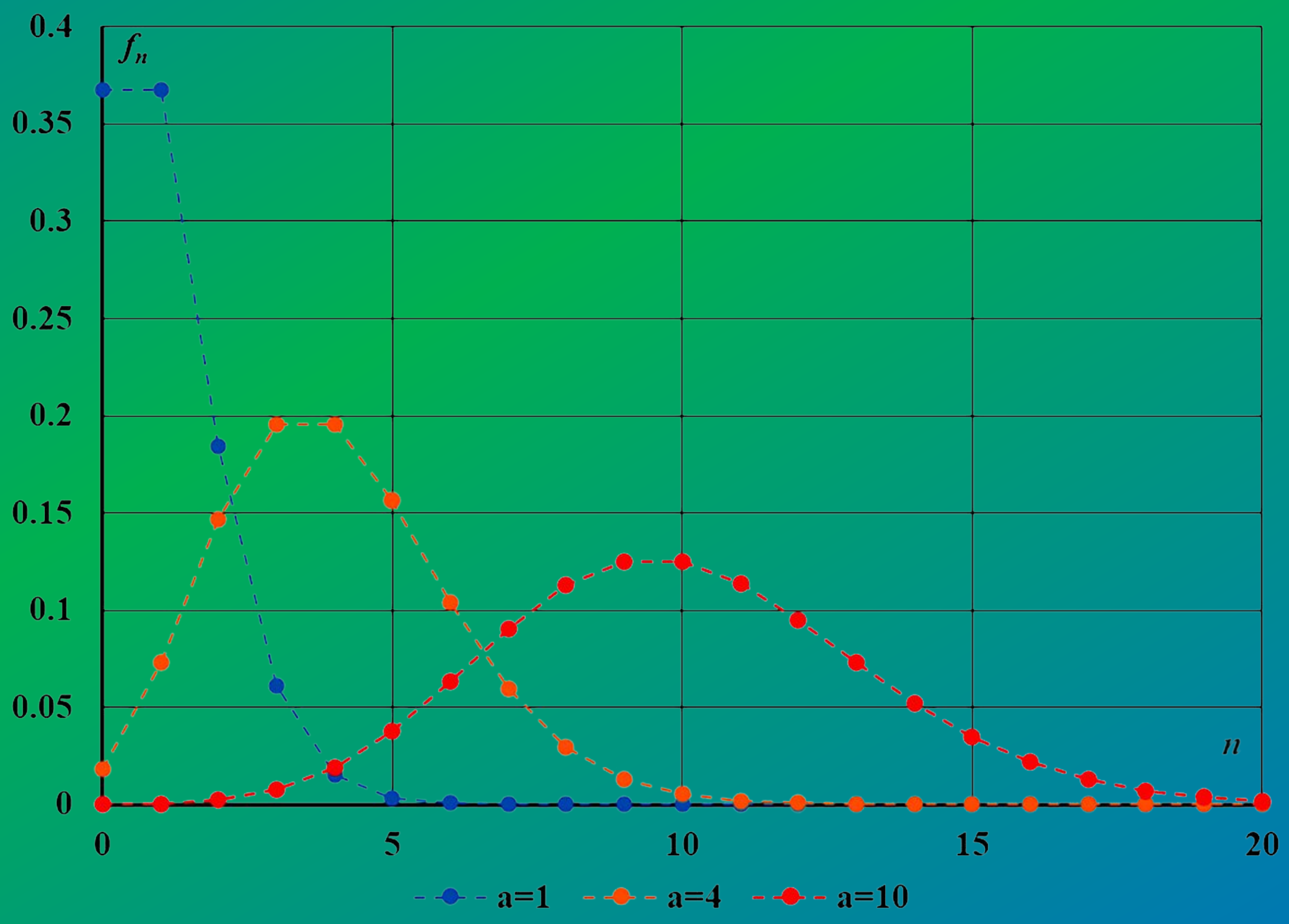
$$f_{n,m} = f_n = \frac{a^n}{n!}\exp(-a)$$

Моменты закона распределения Пуассона

$$m_n = \lim_{\substack{m\to\infty \\ p\to 0 \\ mp=a}} (mp) = a$$

$$D_n = \lim_{\substack{m\to\infty \\ p\to 0 \\ mp=a}} (mp(1-p)) = a$$

Дисперсия равна математическому ожиданию



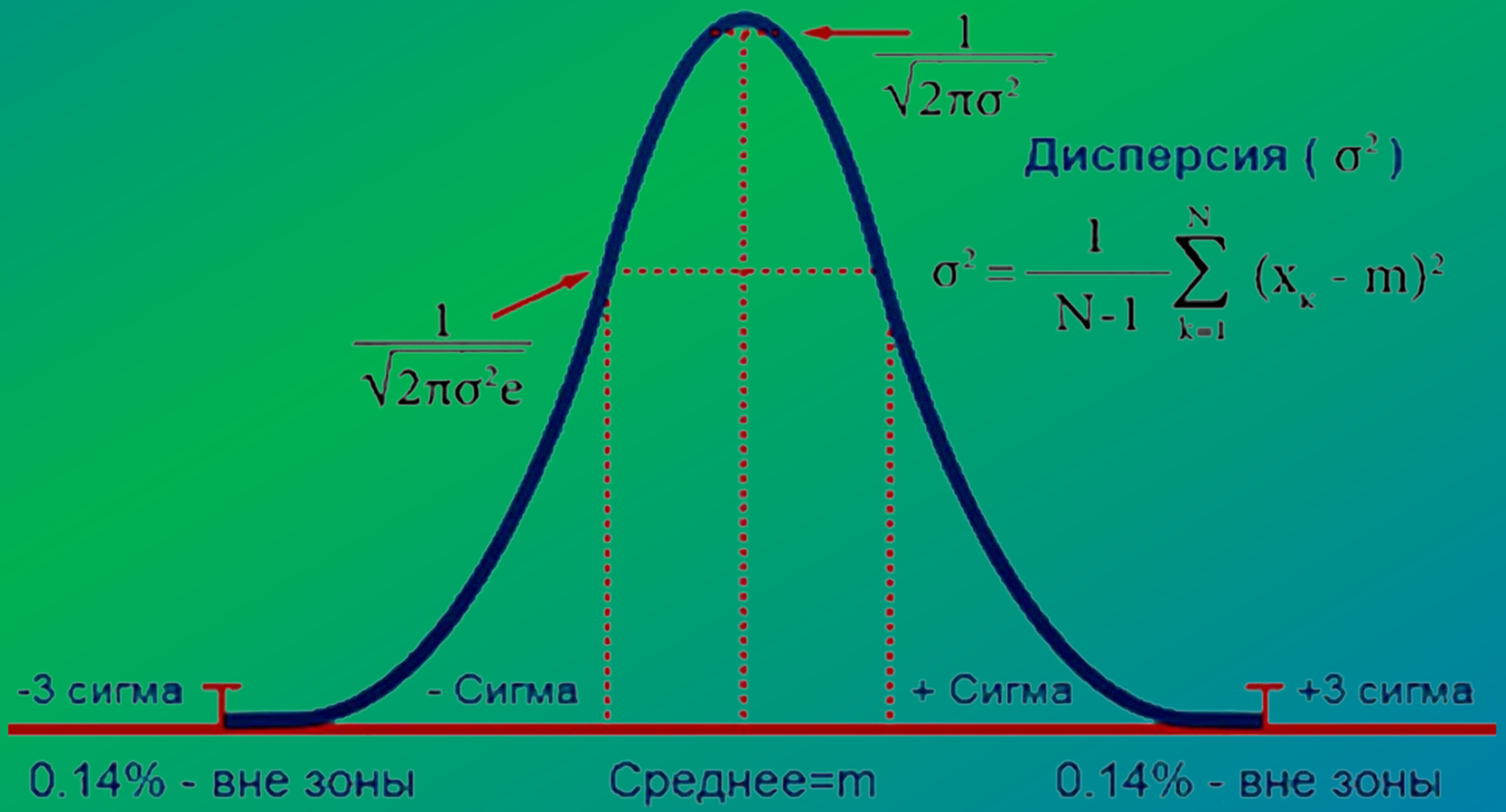
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Вероятность попадания x в интервал [-σ;+σ] равна 0.68, а в интервал [-3σ;+3σ] – 0.999



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Многомерный нормальный закон распределения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \,\mathrm{Det}\left[R_{ij}\right]_n}} \exp\left\{ \frac{1}{2\,\mathrm{Det}\left[R_{ij}\right]_n} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} & (x_1 - m_{x1}) \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} & (x_2 - m_{x2}) \\ & & \ldots & & \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} & (x_n - m_{xn}) \\ (x_1 - m_{x1}) & & \ldots & (x_n - m_{xn}) & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} & (x_1 - m_{x1}) \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} & (x_2 - m_{x2}) \\ & & \ldots & & \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} & (x_n - m_{xn}) \\ (x_1 - m_{x1}) & & \ldots & (x_n - m_{xn}) & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} (x_i - m_{xi})(x_j - m_{xj})$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные законы распределения случайных величин

Многомерный нормальный закон распределения

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Det\left[R_{ij}\right]_n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(x_i - m_{xi})(x_j - m_{xj})\right\}}$$

Элемент матрицы, обратной матрице $[R_{ij}]_n$

$$\boxed{Q_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ij}}{\mathrm{Det}\left[R_{ij}\right]_n}}$$

Анализ случайных процессов в частотной области

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow X_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h_1(t-\tau)\, d\tau \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow X_2(t) = \int^{\infty}\int^{\infty} X(\tau_1) X(\tau_2) h_1(t_1 - \tau_1) h_2(t - \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \quad \ldots$$

$$S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega) H_1(\omega) H_2(\omega) H_3(\omega) \cdots H_n(\omega)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)x^*(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp\left(+j\omega t\right)dtd\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)x(t)\exp\left(+j\omega t\right)dtd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\exp\left(j\omega t\right)d\omega}_{x(t)}dt$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}$$

Спектральная плотность мощности эргодического случайного процесса

$$R(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{x^2(t)}{T}dt$$

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi x^2(\omega)}{T}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)d\omega$$

$$\boxed{G(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi x^2(\omega)}{T}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Теорема Хинчина-Винера

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)x^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp\big(j\omega t\big)dt\exp(j\omega\tau)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)x(t)\exp\big(j\omega(\tau+t)\big)dtd\omega =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\exp\big(j\omega(t+\tau)\big)d\omega}_{x(t+\tau)}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = R_x(\tau)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G\;(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega$$

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R\;(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Виды спектров

$$R_{1x}(t) = D_x \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_0}\right)$$

$$R_{1x}(t) = D_x \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right)$$

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R\ (\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau$$

$$G_{1x}(\omega) = \frac{D_x}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau + \int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau\right]$$

$$G_{1x}(\omega) = \frac{D_x}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\exp\left((1-j\omega\tau_0)\frac{\tau}{\tau_0}\right)d\tau + \int_{0}^{\infty}\exp\left(-(1+j\omega\tau_0)\frac{\tau}{\tau_0}\right)d\tau\right]$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Виды спектров

$$G_{1x}(\omega)=\frac{D_x}{2\pi}\left[\underbrace{\frac{\tau_0}{1-j\omega\tau_0}\exp\left((1-j\omega\tau_0)\frac{\tau}{\tau_0}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}}_{\frac{\tau_0}{1-j\omega\tau_0}}+\underbrace{\frac{\tau_0}{1+j\omega\tau_0}\exp\left(-(1+j\omega\tau_0)\frac{\tau}{\tau_0}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}}_{\frac{\tau_0}{1+j\omega\tau_0}}\right]=\frac{D_x\tau_0}{\pi\left(1+(\omega\tau_0)^2\right)}$$

$$G_{2x}(\omega)=\frac{D_x}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right)\exp(-j\omega\tau)d\tau\right]$$

$$G_{1x}(\omega)=\frac{D_x\tau_0}{\pi\left(1+(\omega\tau_0)^2\right)}$$

$$G_{2x}(\omega)=\frac{D_x\tau_0}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{(\omega\tau_0)^2}{4}\right)$$

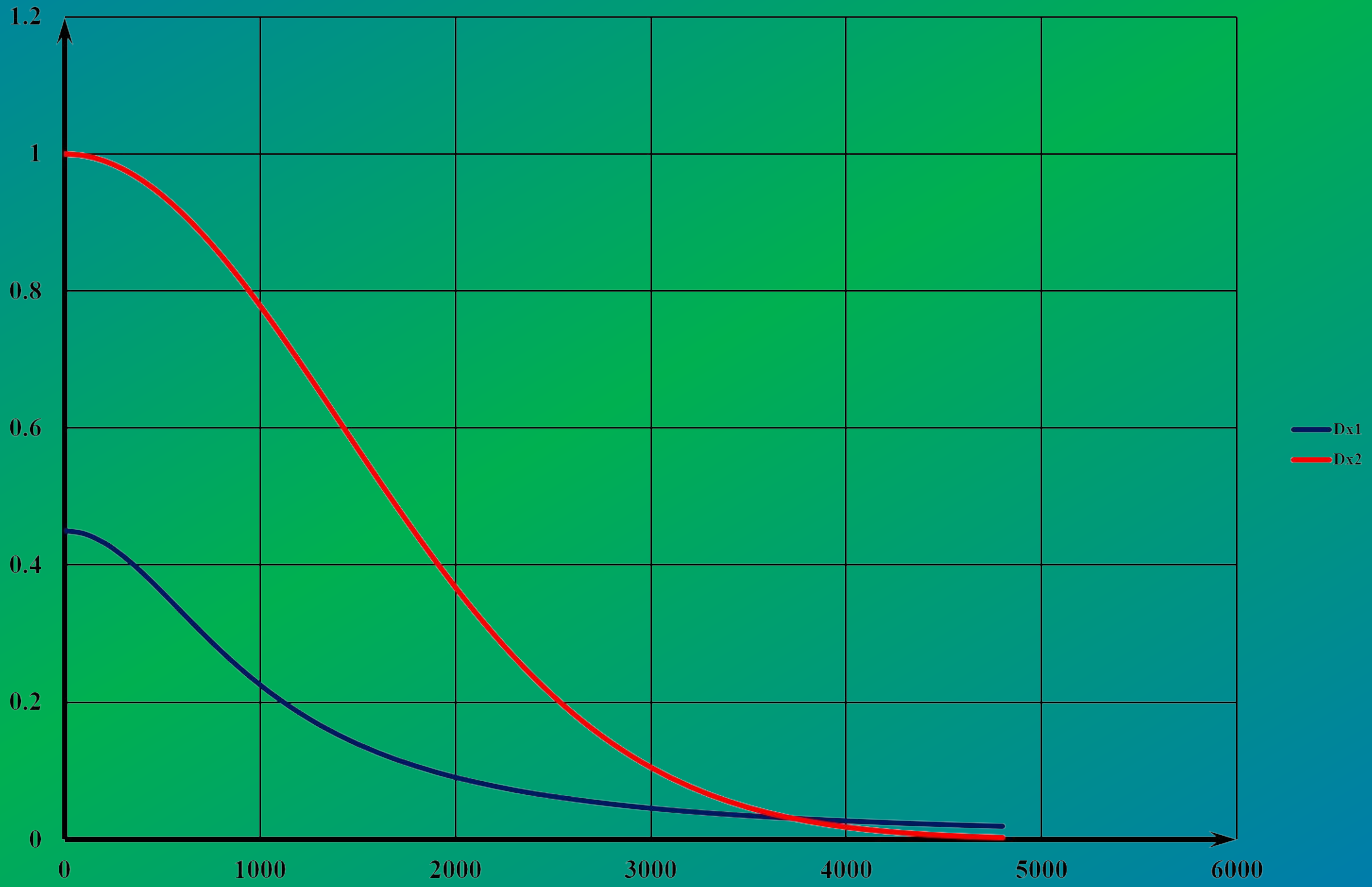
Дисперсия шума в полосе частот $\omega_1 \div \omega_2$

$$\overline{u^2}=\int_{\omega_1}^{\omega_2}G(\omega)d\omega$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Виды спектров



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Четность спектральной плотности мощности

$$\boxed{G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\exp\left(-j\omega\tau\right)d\tau \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}R(-\tau)\exp\left(j\omega\tau\right)d(-\tau)}$$

$$\boxed{G(\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}R(-\tau)\exp\left(-j(-\omega)\tau\right)d\tau \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\exp\left(-j(-\omega)\tau\right)d\tau}$$

$$\boxed{G(\omega)=G(-\omega)}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ случайных процессов в частотной области

Преобразование СПМ линейными цепями

$$\boxed{x(\omega)} \quad \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow \quad \boxed{x(\omega)H(\omega)}$$

$$\boxed{G_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi x^2(\omega)}{T}}$$

$$\boxed{G_x^{\text{вых}}(\omega) = G_x^{\text{вх}}(\omega) H^2(\omega)}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Суммирование шумов от нескольких источников

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t)}$$

$$\boxed{m_x(t) = M\left[x_1(t) + x_2(t)\right]}$$

$$\boxed{m_x(t) = m_{x1}(t) + m_{x2}(t)}$$

$$R_x(t_1,t_2) = M\left[\begin{matrix}\left(\left(x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)\right) + \left(x_2(t_1) - m_{x_2}(t_1)\right)\right)\cdot \\ \cdot\left(\left(x_1(t_2) - m_{x1}(t_2)\right) + \left(x_2(t_2) - m_{x_2}(t_2)\right)\right)\end{matrix}\right]$$

$$\begin{aligned}R_x(t_1,t_2) = {} & \underbrace{M\left[\left(x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)\right)\left(x_1(t_2) - m_{x_1}(t_2)\right)\right]}_{R_{x_1}(t_1,t_2)} + \\ & + \underbrace{M\left[\left(x_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)\right)\left(x_2(t_2) - m_{x_2}(t_2)\right)\right]}_{R_{x_1x_2}(t_1,t_2)} + \\ & + \underbrace{M\left[\left(x_2(t_1) - m_{x_2}(t_1)\right)\left(x_1(t_2) - m_{x_1}(t_2)\right)\right]}_{R_{x_2x_1}(t_1,t_2)} + \\ & + \underbrace{M\left[\left(x_2(t_1) - m_{x_2}(t_1)\right)\left(x_2(t_2) - m_{x_2}(t_2)\right)\right]}_{R_{x_2}(t_1,t_2)}\end{aligned}$$

Для независимых источников шумов взаимные корреляционные функции $R_{x_1x_2}(t_1,t_2)$ *и* $R_{x_2x_1}(t_1,t_2)$ *равны нулю*

$$\boxed{R_x(t_1,t_2) = R_{x_1}(t_1,t_2) + R_{x_2}(t_1,t_2)}$$

$$\boxed{G_x(\omega) = G_{x_1}(\omega) + G_{x_2}(\omega)}$$