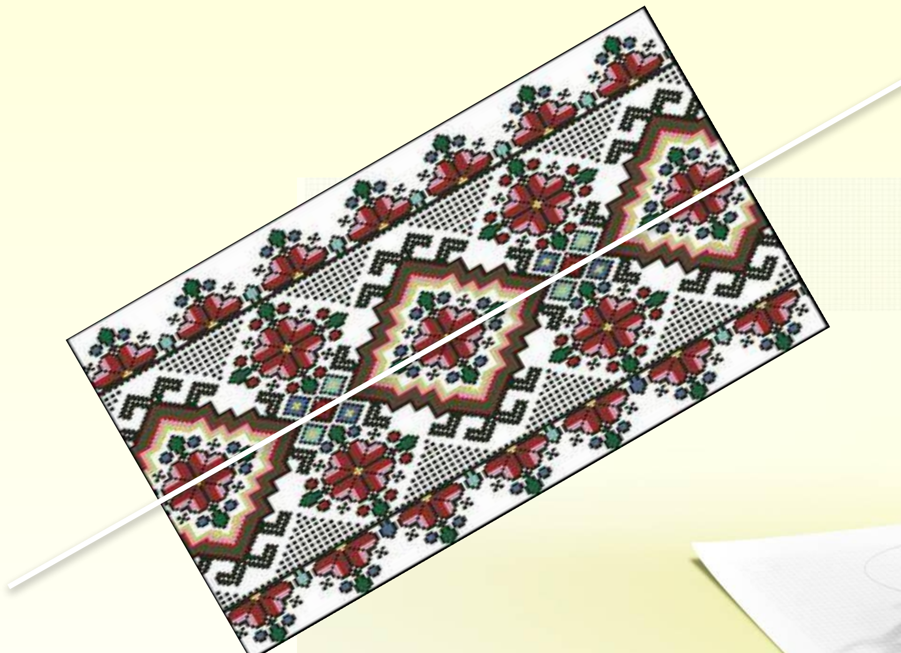
Геометричні перетворення на площині

Геометрія 9 клас

Автор презентації
вчитель математики
Олексицької ЗСОШ І-ІІ ст.
Стрийського району
Шакало Тетяна Василівна

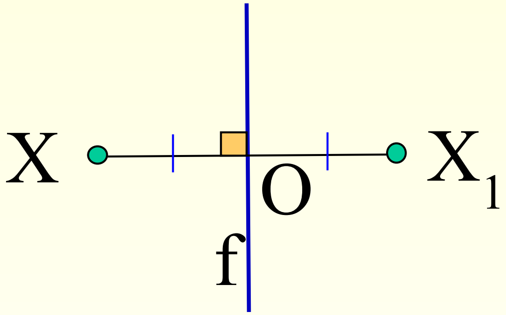
Симетрія відносно прямої

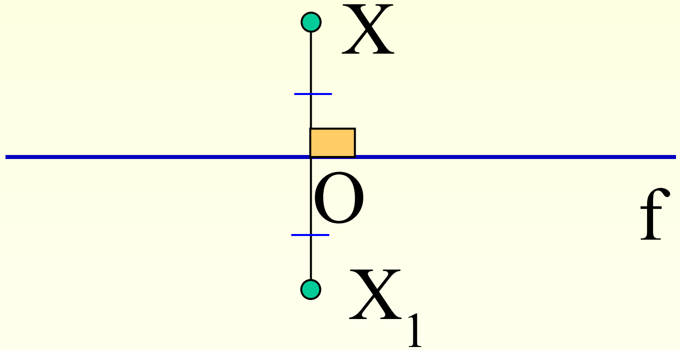


Щоб побудувати точку X_1, симетричну точці X відносно даної прямої f , треба:

1) побудувати промінь XO, перпендикулярний до прямої f (O - точка перетину променя з прямою f);

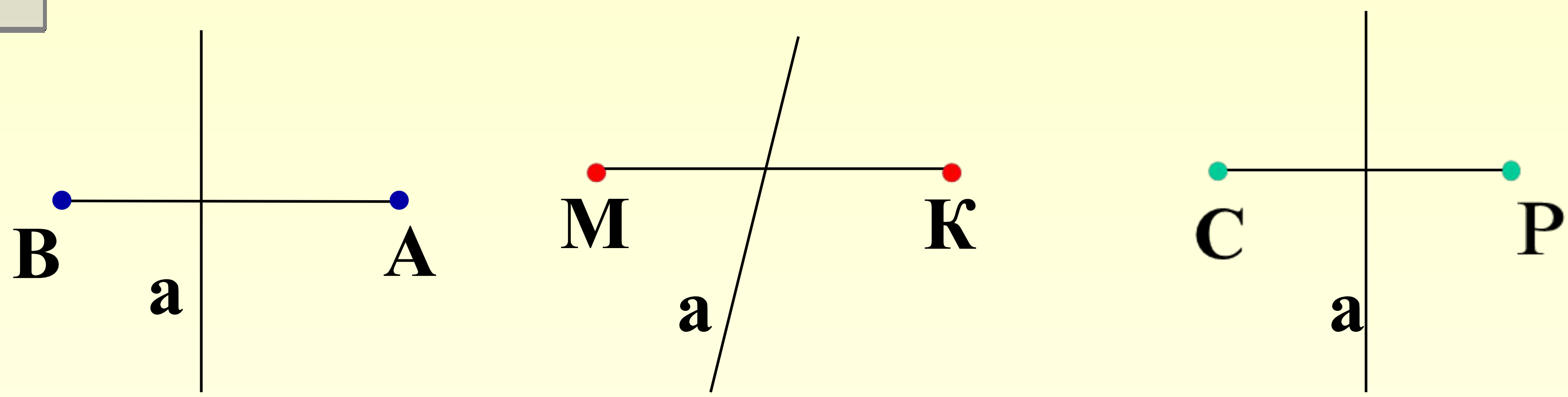
2) на продовженні відрізка XO за точку O відкласти відрізок $OX_1 = XO$.





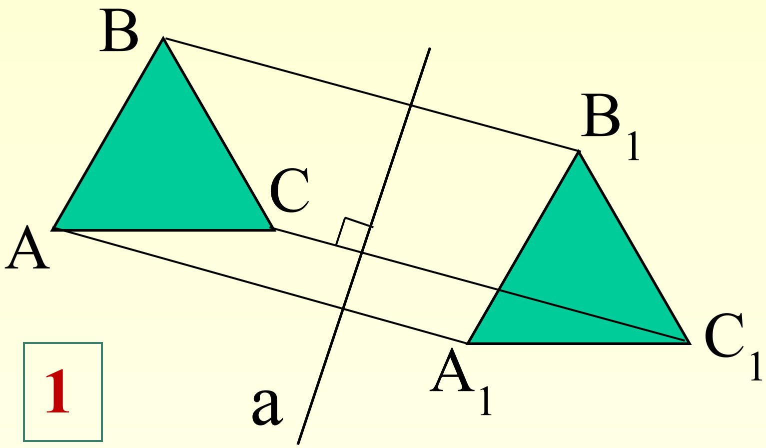
Точки X і X_1 називаються симетричними відносно прямої f, якщо пряма f є серединним перпендикуляром до відрізка XX_1, тобто якщо $OX = OX_1$ і $f \perp XX_1$.

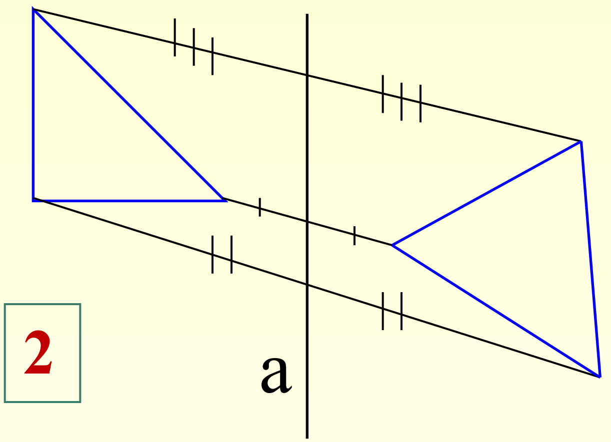
Які точки симетричні відносно прямої a ?

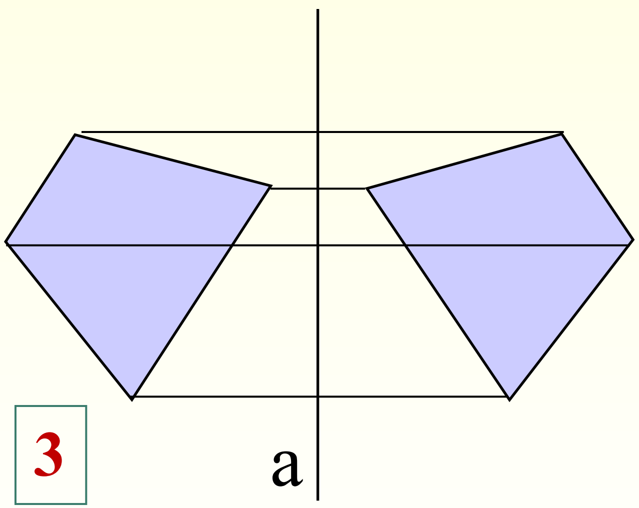


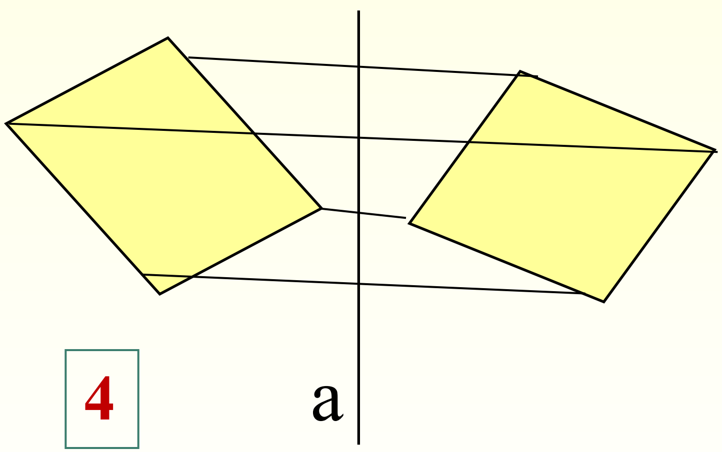
Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому *кожна* точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної прямої f, називається перетворенням симетрії відносно прямої f або осьовою симетрією. *При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними відносно прямої f , а пряма f – віссю симетрії.*

На якому з малюнків зображено фігури, симетричні відносно прямої а? Відповідь обгрунтуйте.



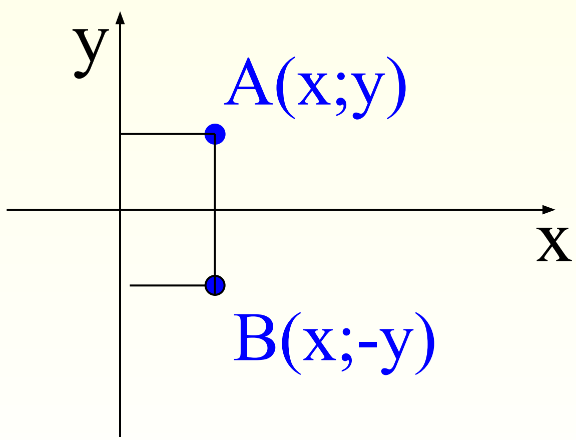


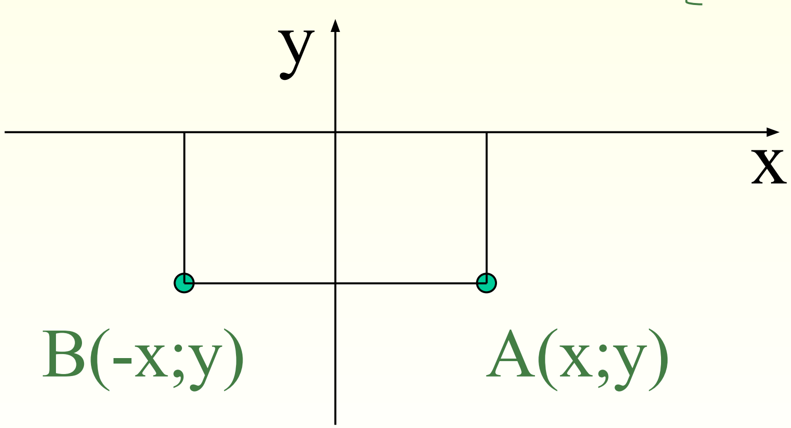




Властивості осьової симетрії

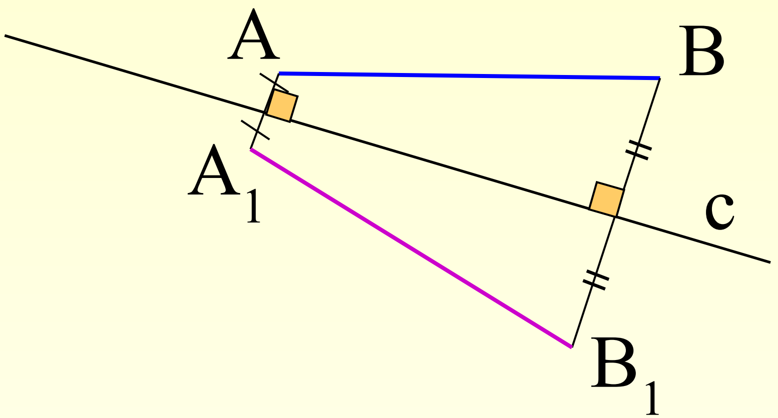
- Перетворення осьової симетрії є переміщенням.
- Осьова симетрія перетворює пряму на пряму, відрізок - на відрізок, многокутник – на рівний йому многокутник.
- Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.
- Якщо точки A(x;y) і B(x_1;y_1) симетричні відносно осі Ox, то виконується умова $\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = -y; \end{cases}$ а відносно осі Oy - $\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = y. \end{cases}$



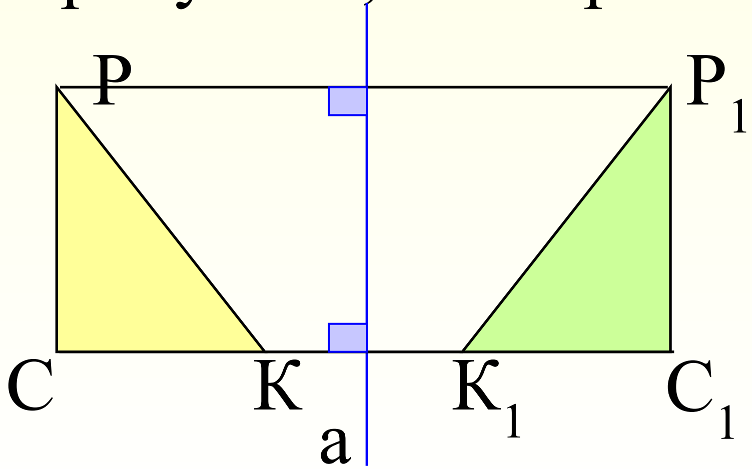


Розв'язування задач

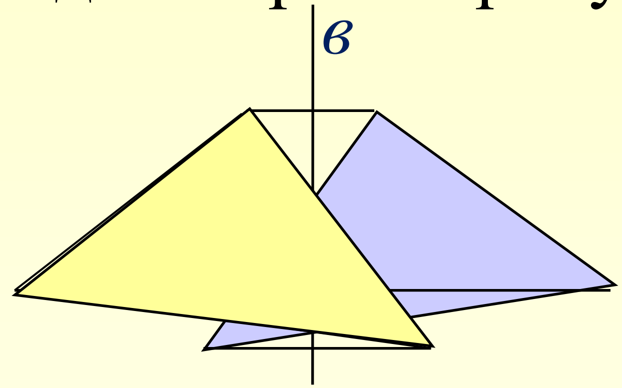
- Побудуйте відрізок, симетричний відрізку АВ відносно прямої с.



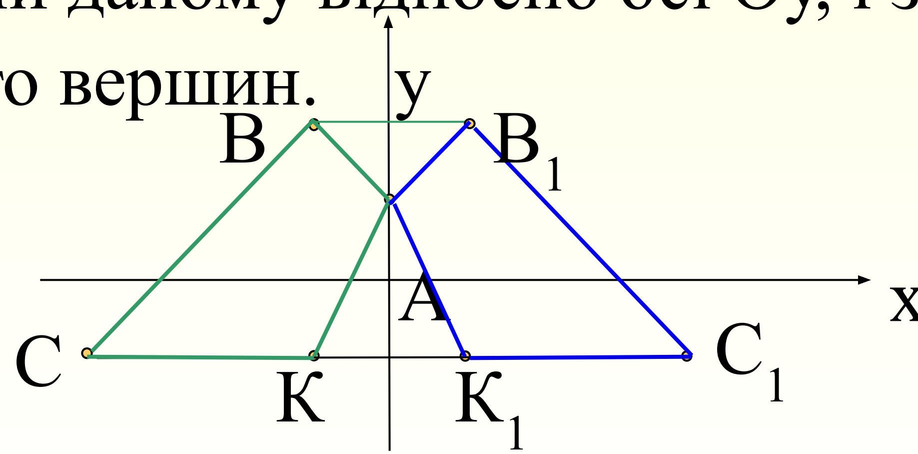
- Накресліть прямокутний трикутник СРК ($< C = 90^0$). Побудуйте трикутник, симетричний Δ СРК відносно прямої а.



- Побудуйте трикутник, симетричний даному, відносно прямої *в*, що перетинає дві сторони трикутника.

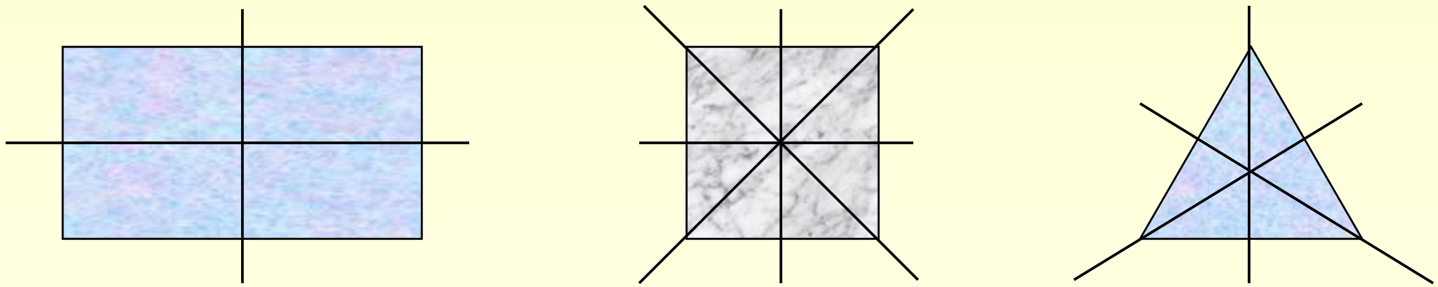


- Вершини чотирикутника АВСК мають координати: А (0; 1), В(-1; 2), С(-4;-1), К(-1;-1). Побудуйте чотирикутник, симетричний даному відносно осі Оу, і знайдіть координати його вершин.



В (1; 2), С (4; -1), К (1; -1), А(0; 1)

Позначте осі симетрії прямокутника, квадрата, рівностороннього трикутника.



Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ відносно осі Ox.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $y = x - 2$ відносно осі Ox.

Відповідь: $y = -x + 2$

Осьова симетрія навколо нас








Підсумок уроку

1. Скільки осей симетрії має: а) рівнобедрений трикутник; б) ромб; в) коло?

2. Назвіть координати точки В, яка симетрична точці А (-3; 5) відносно: а) осі Ох; б) осі Оу.

3. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ відносно осі Оу.

4*. Осі симетрії прямокутника $x=3$ і $y=2$. Одна з його вершин А (4;1). Знайдіть координати інших вершин.

Домашня робота

1. Запишіть координати точки М, яка симетрична точці К (2; −4) відносно осі Оу.
2. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний даному, відносно прямої, що проходить через одну з його вершин.
3. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ відносно осі Ох.

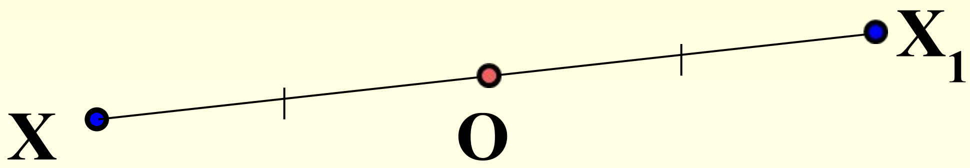
4* (додатково) Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $y = x - 2$ відносно осі Оу.

Симетрія відносно точки

Щоб побудувати точку X_1, симетричну точці X відносно даної точки O, треба:

1) побудувати промінь XO;

2) на продовженні відрізка OX за точку O відкласти відрізок $OX_1 = OX$.



Точка X_1 називається симетричною точці X відносно точки O, якщо O - середина відрізка XX_1.

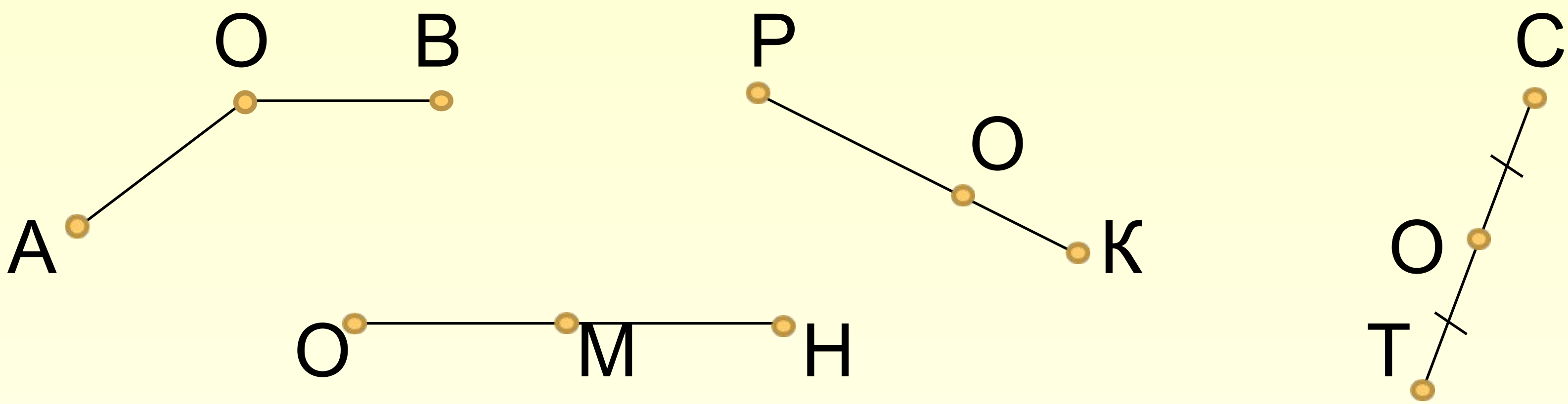
Умови симетричності точок X_1 і X відносно точки O:

а) точки X, X_1 і O належать одній прямій;

б) точки X і X_1 лежать по різні боки від точки O;

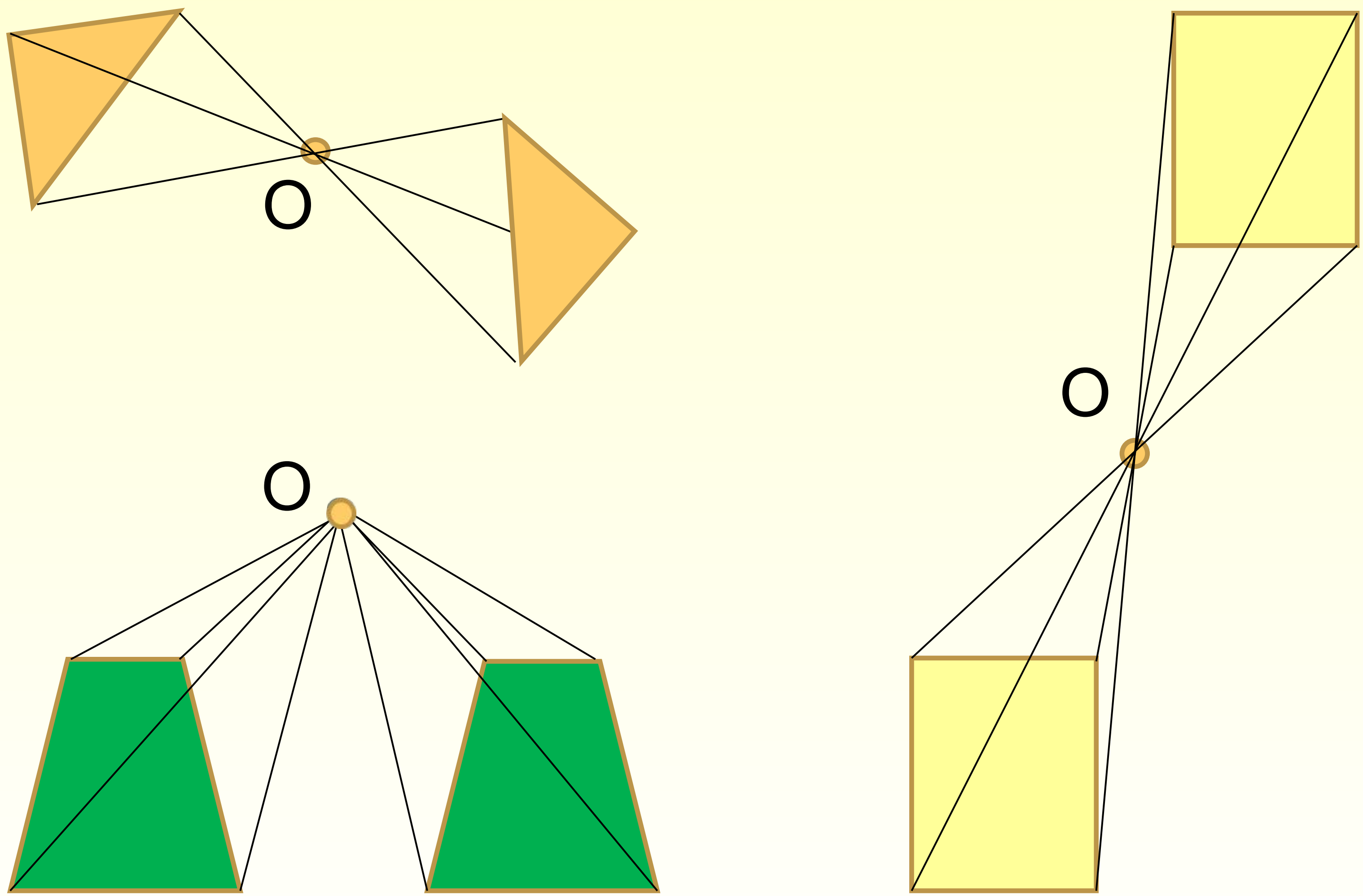
в) $OX_1 = OX$.

Назвіть точки, які симетричні відносно точки О.



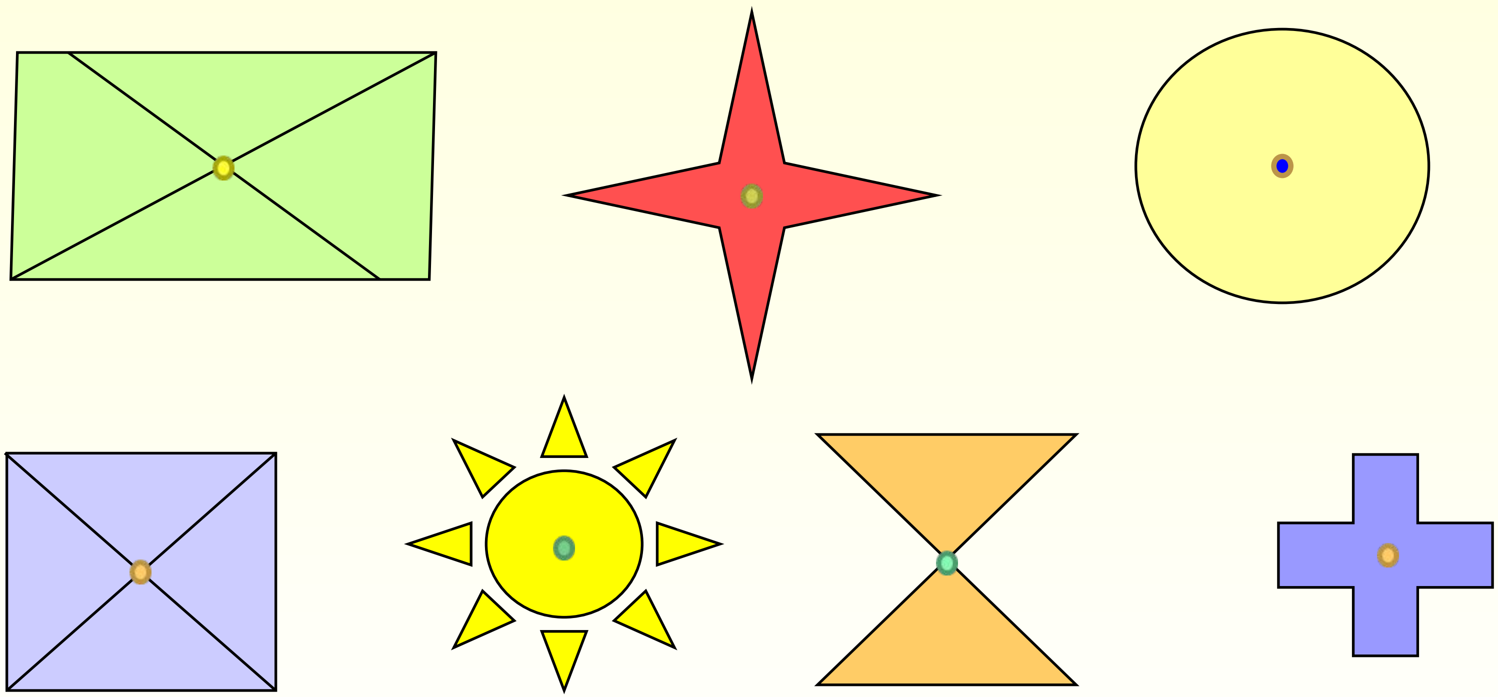
Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому *кожна* точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної точки O, називається перетворенням симетрії відносно точки O. *При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними відносно точки O.*

Назвіть фігури, які симетричні відносно точки О. Відповідь обгрунтуйте.



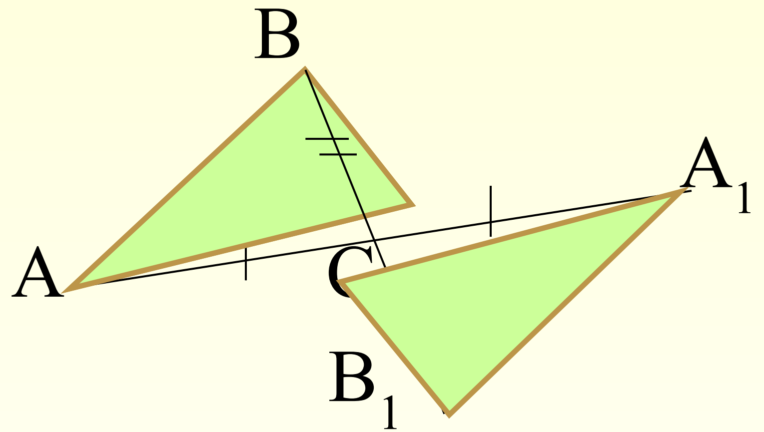
Якщо перетворення симетрії відносно точки О переводить фігуру F у себе, то вона називається центрально-симетричною, а точка О – центром симетрії.

Приклади центрально-симетричних фігур

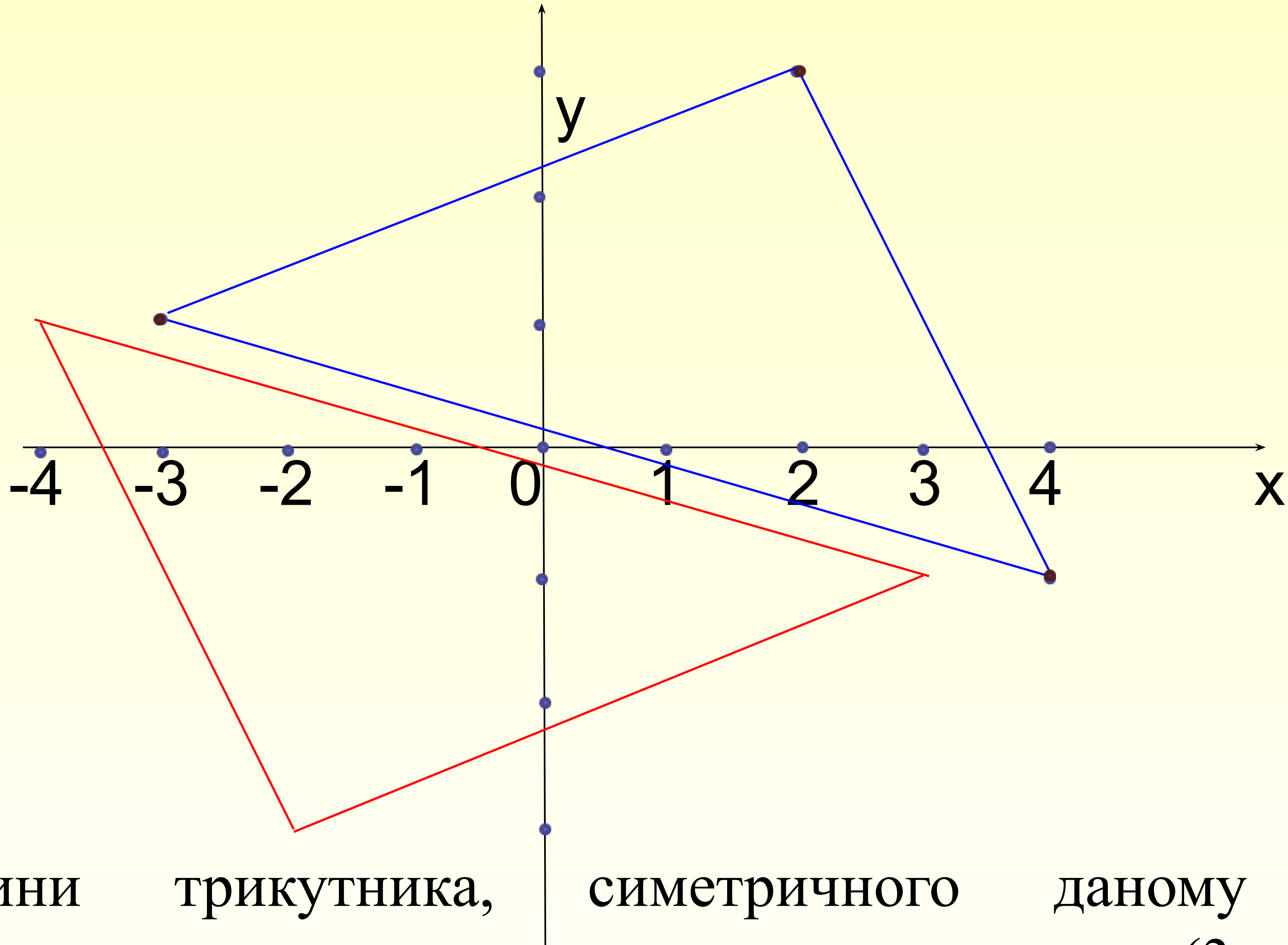


Розв'язування задач

- Дано трикутник ABC. Побудуйте фігуру, симетричну даному трикутнику відносно вершини C.



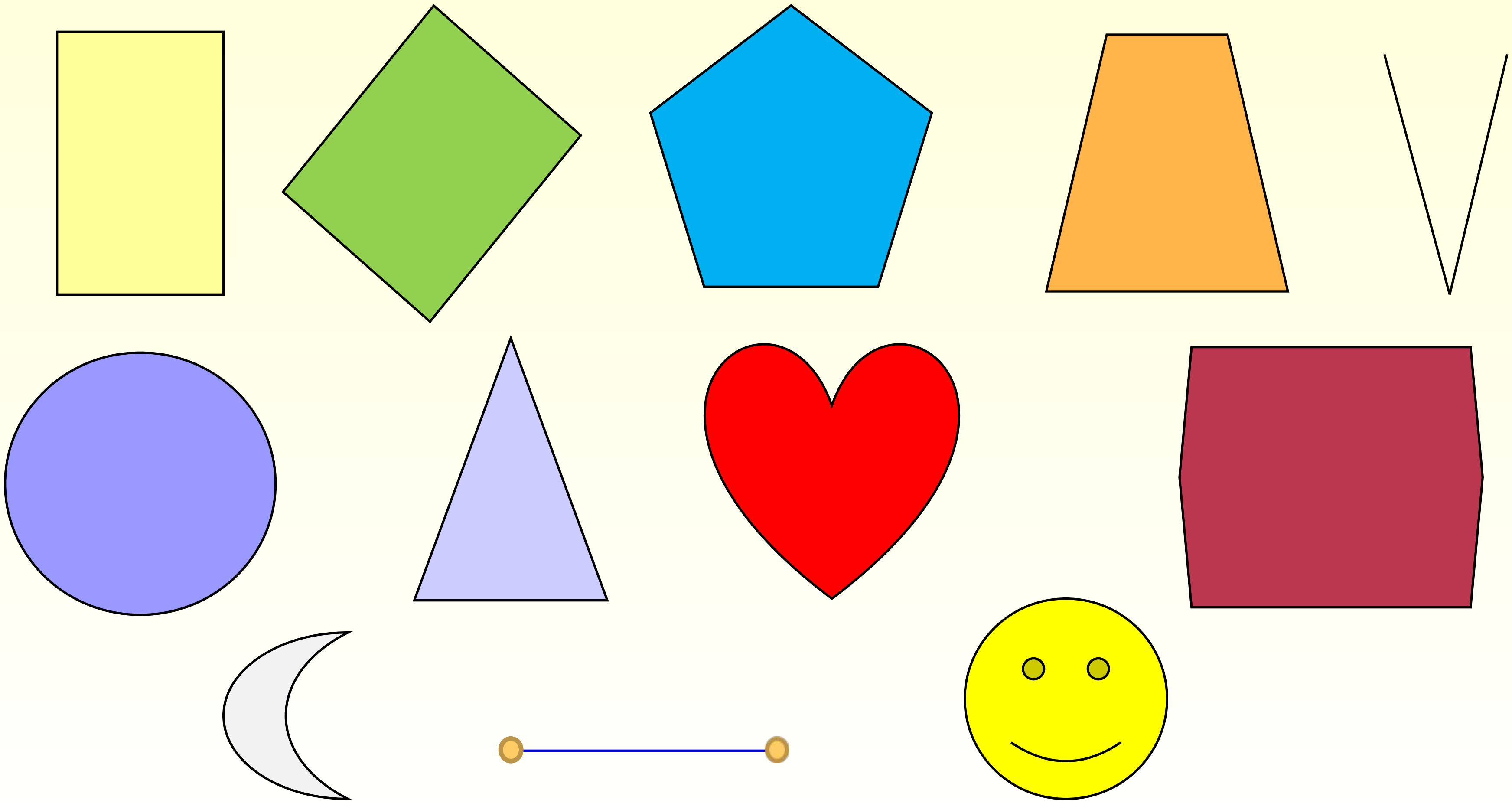
- Вершини трикутника містяться у точках (-3; 1); (2; 3); (4; -1). Побудуйте трикутник, який симетричний даному відносно початку координат.



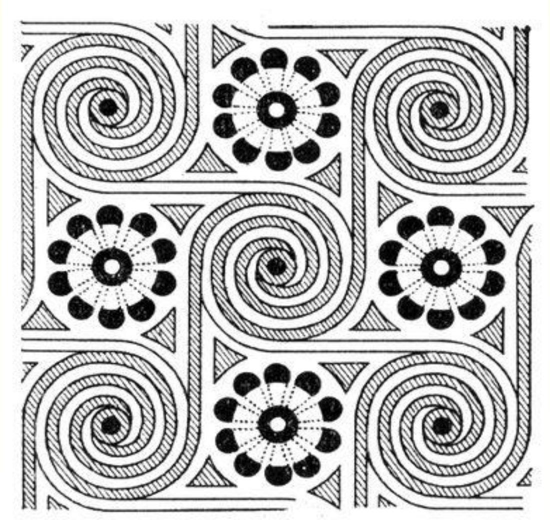
Вершини трикутника, симетричного даному відносно початку координат, знаходяться у точках (3; -1); (-2; -3); (-4; 1).

Визначіть фігури:

- центрально-симетричні та вкажіть їх центр;
- які мають осьову симетрію та вкажіть їх вісь симетрії;
- які мають обидві симетрії.



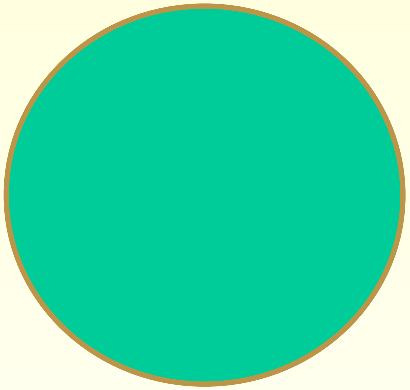
Центральна симетрія у візерунках



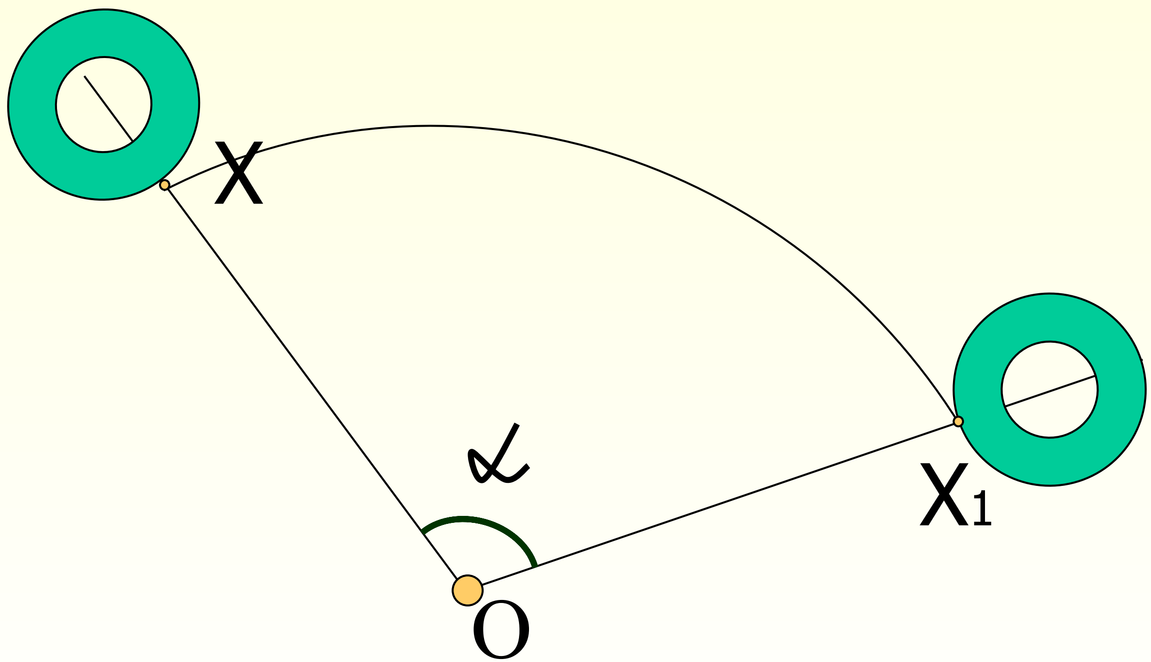

StitchFanClub.com

Центральна симетрія навколо нас

ПОВОРОТ



Поворотом фігури F навколо точки O на кут α називається таке перетворення, при якому будь-яка точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 таку, що $OX = OX_1$ і $\angle XOX_1 = \alpha$



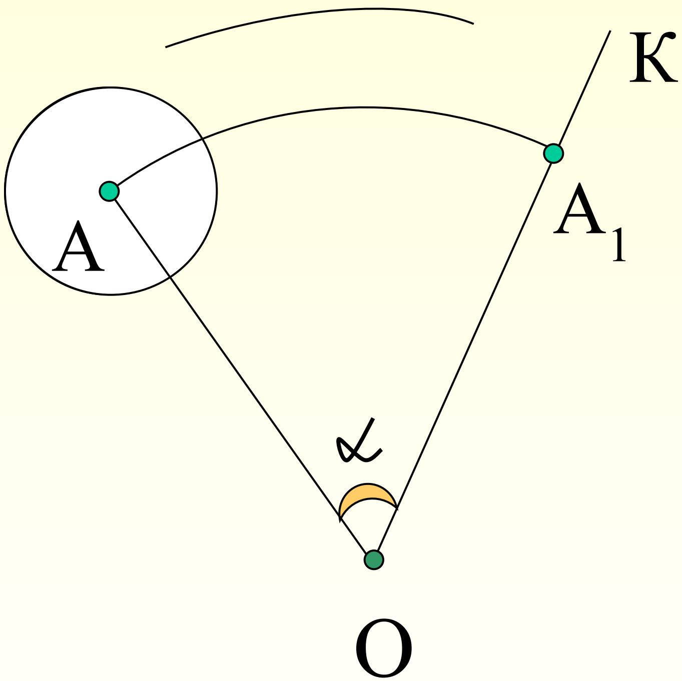
Поворот фігури задається кутом повороту та центром повороту і може здійснюватися проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою.

- Задача.

Виконайте поворот даного круга з центром А навколо точки О на кут α за годинниковою стрілкою.

Розв’язання.

Проведемо відрізок ОА і побудуємо кут АОК = α Відкладемо на промені ОК відрізок $OA_1 = OA$. Точка A_1 - центр шуканого круга, а радіус дорівнює радіусу даного круга.



Властивості повороту

- Перетворення повороту є переміщенням.
- Центральна симетрія є поворотом на 180°.
- При повороті пряма переходить у пряму; кут – у рівний кут; відрізок – у рівний відрізок; будь-яка фігура переходить у рівну їй фігуру.
- Правильний многокутник при повороті навколо свого центра на кут $\frac{360°}{n}$ переходить у себе.
- Якщо точка $B(x_1; y_1)$ є образом точки $A(x; y)$ при повороті на 90° відносно початку координат за годинниковою стрілкою, то виконується умова

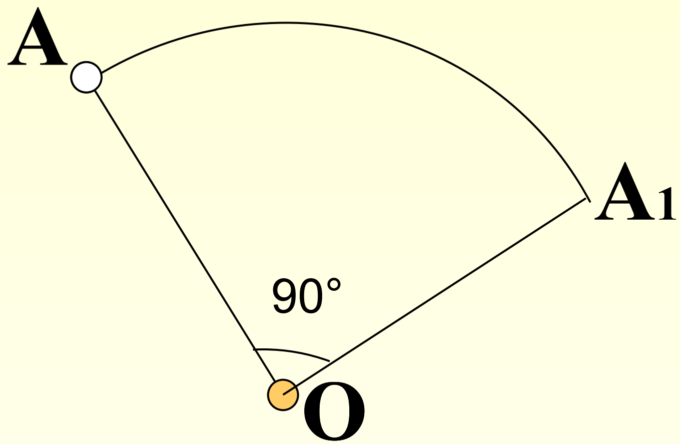
$$\begin{cases} x_1 = y, \\ y_1 = -x; \end{cases}$$

якщо проти годинникової стрілки -

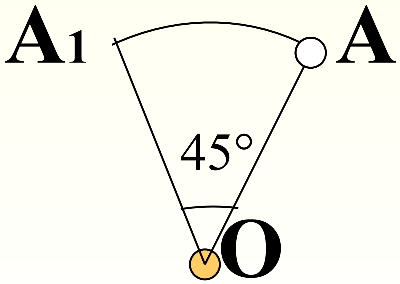
$$\begin{cases} x_1 = -y, \\ y_1 = x. \end{cases}$$

Задачі на застосування означення та властивостей повороту

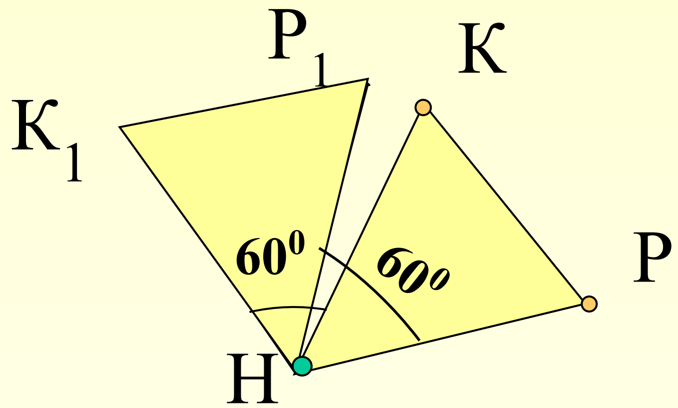
1. Виконайте поворот точки А навколо точки О на кут 90° за годинниковою стрілкою.



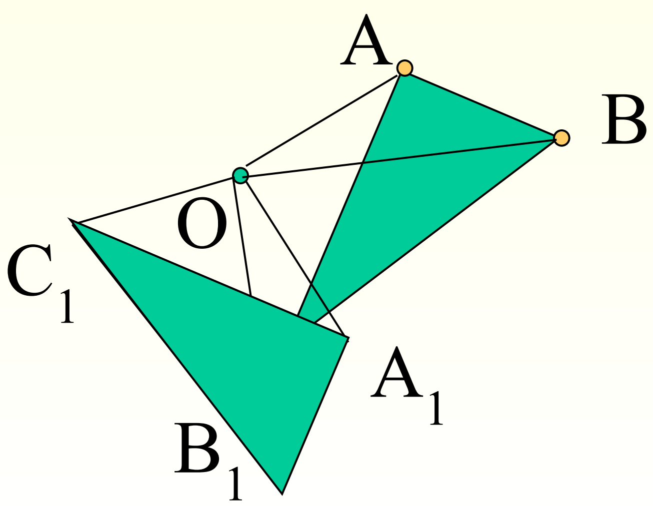
2. Виконайте поворот точки А навколо точки О на кут 45° проти годинникової стрілки.



3. Виконайте поворот трикутника НКР навколо вершини Н на кут 60^0 проти годинникової стрілки.

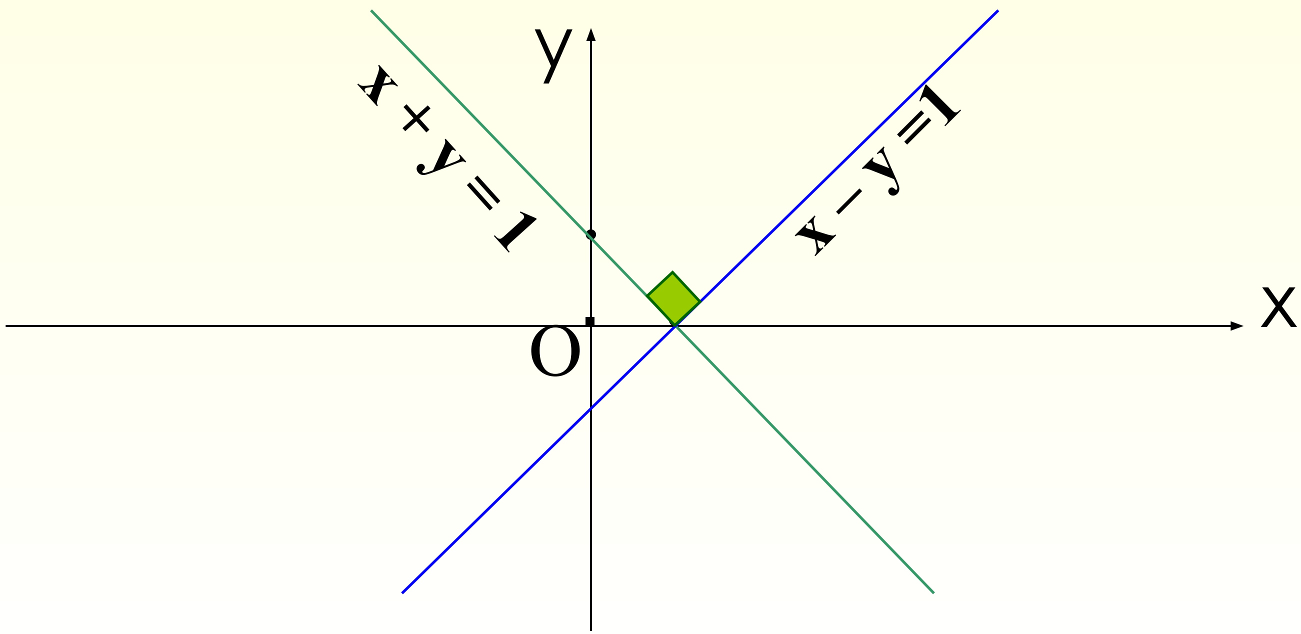


4. Виконайте поворот трикутника АВС навколо точки О на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.



5. Дано пряму x + y = 1. Запишіть рівняння прямої, яка утвориться з даної внаслідок її повороту навколо початку координат на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.

Розв’язання. За властивістю повороту (5) довільна точка A(x ; y), що належить прямій, при повороті на 90^0 відносно початку координат за годинниковою стрілкою відобразиться у точку $A_1(x_1;y_1)$, де $x_1 = y$ і $y_1 = -x$. Тому рівняння шуканої прямої матиме вид: x – y =1.



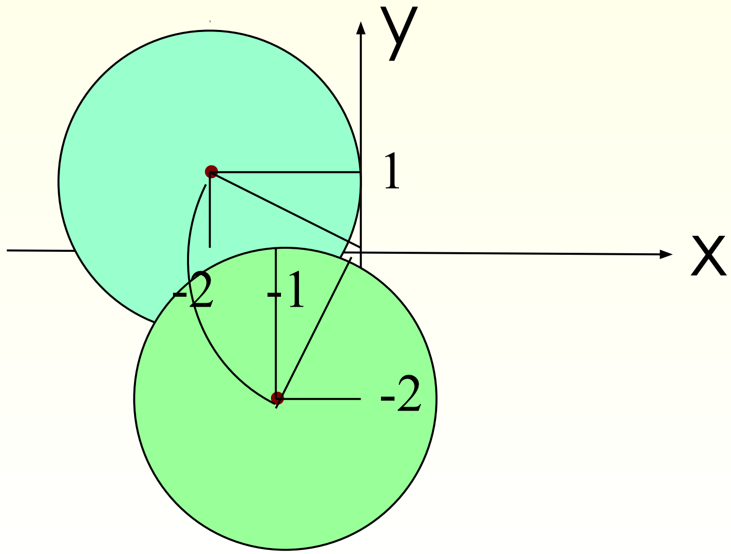
6. Дано коло $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Запишіть рівняння кола, яке утворюється з даного внаслідок його повороту навколо початку координат на кут 90^0 проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Радіус даного кола 2, а центр – точка (-2; 1). При повороті довжина радіуса не змінюється. Внаслідок повороту даного кола навколо початку координат на кут 90^0 проти годинникової стрілки координати центра нового кола визначатимемо згідно властивості (5): $x_1 = -y$, $y_1 = x$, тобто $x_1 = -1$, $y_1 = -2$.

Отже,

рівняння шуканого кола:

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

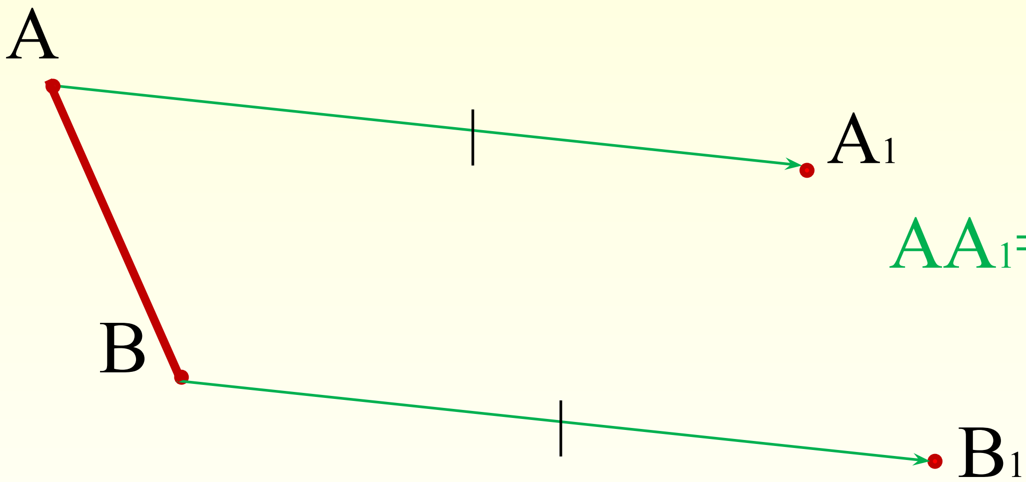


Задачі для самостійного розв’язування

1. Виконайте поворот точки К навколо даного центра О на кут 50^0 проти годинникової стрілки.
2. Виконайте поворот відрізка АВ навколо точки О на кут 30^0 за годинниковою стрілкою.
3. Виконайте поворот круга з центром С навколо точки О на кут 120^0 проти годинникової стрілки.
4. Побудуйте фігуру, в яку переходить трикутник АВС при повороті його навколо вершини В на кут 60^0 за годинниковою стрілкою.
5. Виконайте поворот трикутника АВС навколо даного центра О на кут 45^0 проти годинникової стрілки.
6. Запишіть рівняння кола, яке утворюється з кола $(x-1)^2+(y+2)^2= 9$ внаслідок його повороту навколо початку координат на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.

Паралельне перенесення

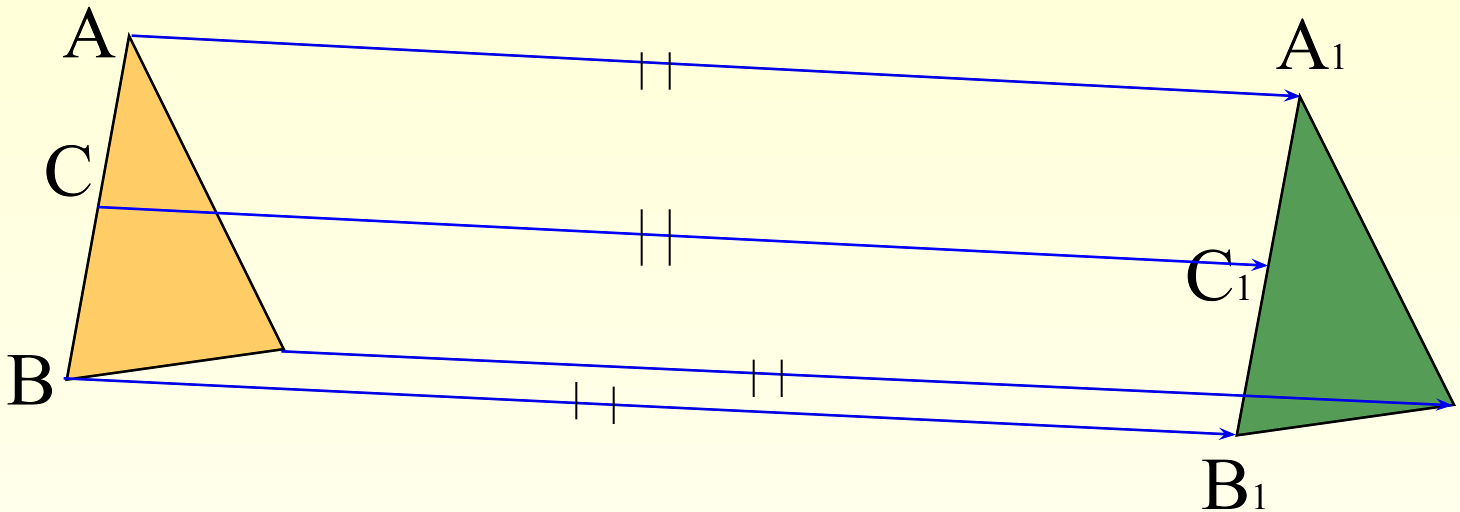
Паралельним перенесенням називається перетворення, при якому дві довільні точки A і B фігури прообразу перетворюються на точки A_1 і B_1 фігури образу так, що $AA_1 = BB_1$ і $AA_1 \parallel BB_1$ (або точки A, A_1, B, B_1 лежать на одній прямій).

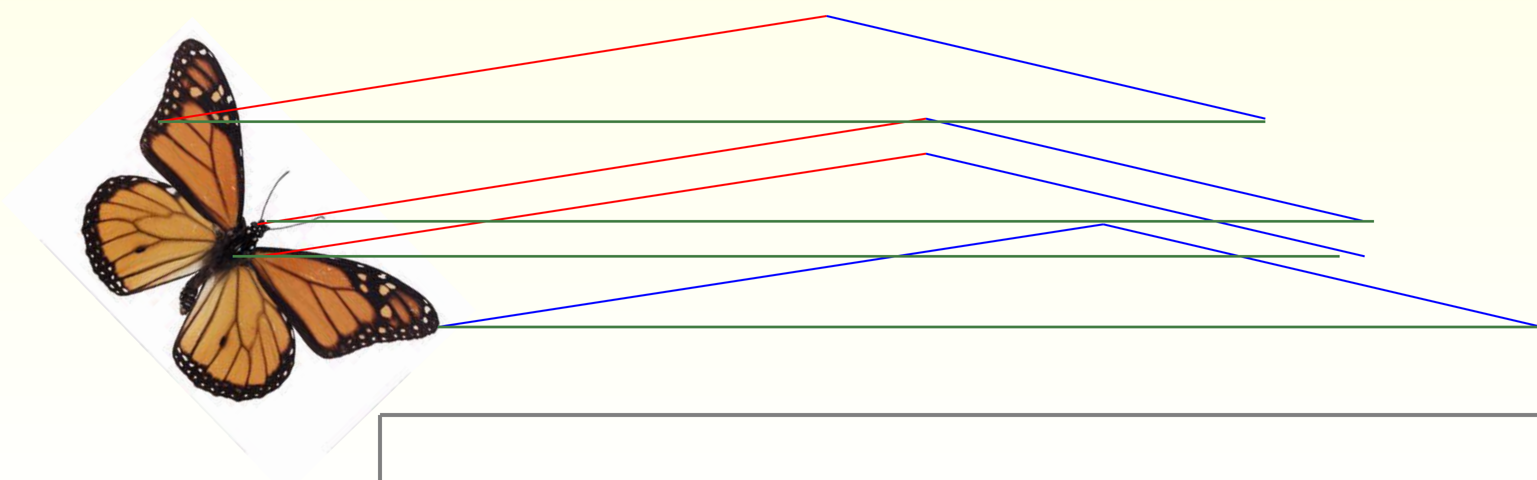


$AA_1=BB_1$, $AA_1 \parallel BB_1$

Чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм (за ознакою паралелограма). Тому $AB \parallel A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$.

При паралельному перенесенні всі точки фігури переміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту ж відстань.

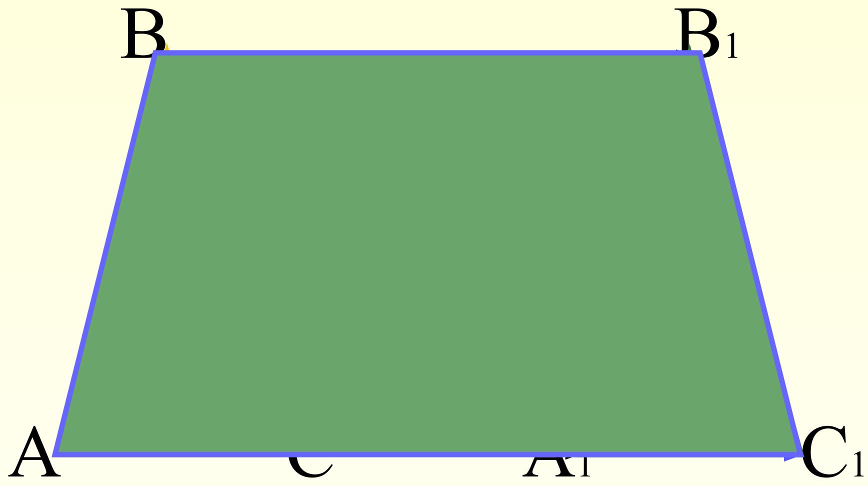




Властивості паралельного перенесення

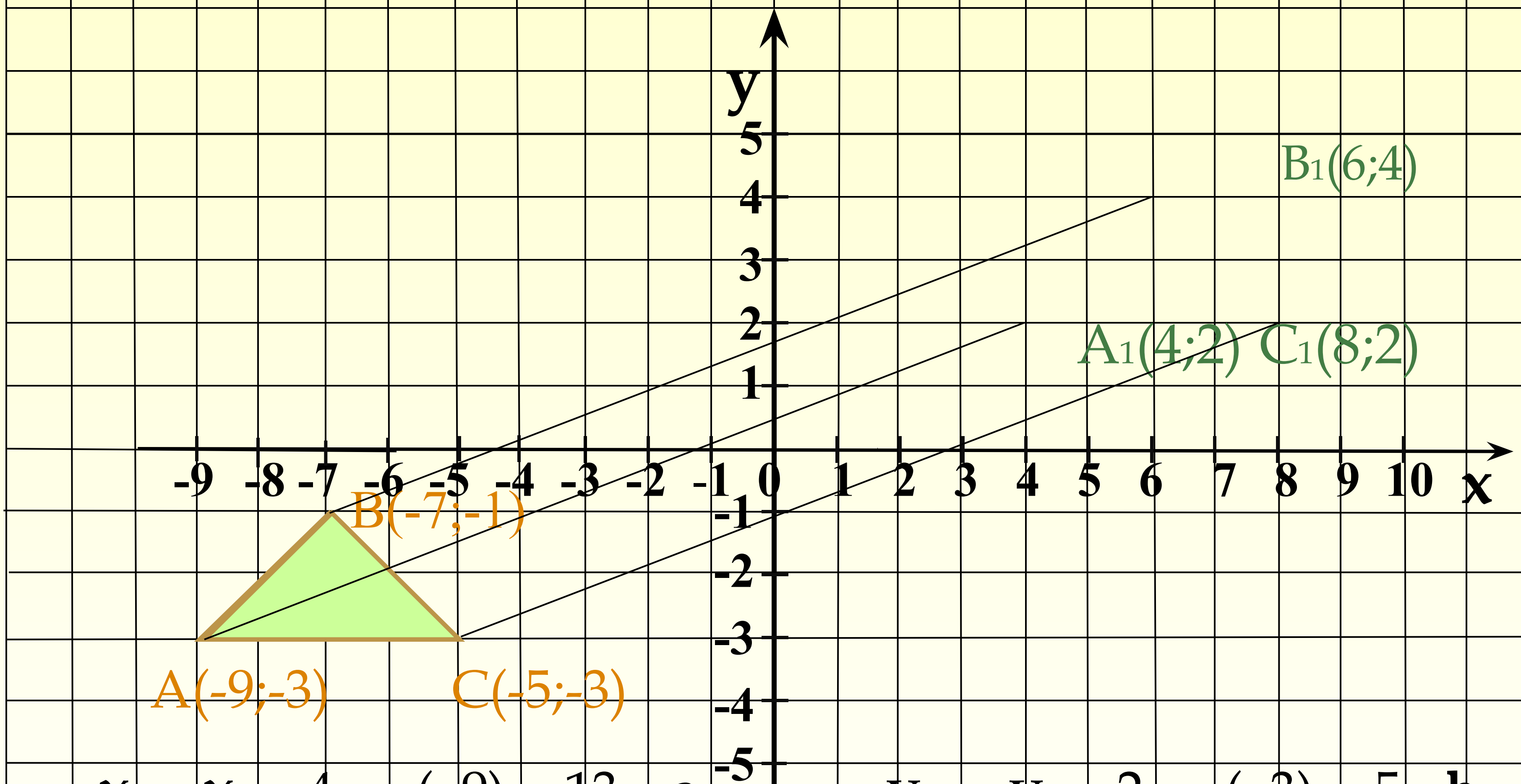
1. *Паралельне перенесення є рух.*
2. *При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе).*
3. *Кути між прямими зберігаються.*
4. *Якщо точка С належить відрізку АВ, то при паралельному перенесенні у відповідні точки A_1, B_1, C_1 точка C_1 належатиме відрізку A_1B_1.*
5. *Композиція двох паралельних перенесень є паралельне перенесення.*
6. *Існує єдине паралельне перенесення, що переводить точку А у точку A_1.*

Задача 1. Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, який утворений з даного паралельним перенесенням так, щоб утворилася трапеція ABB_1C_1



При паралельному перенесенні точки A, B, C трикутника переміщуються так, що $BB_1 = AA_1 = CC_1$ і $BB_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$.

Паралельне перенесення на координатній площині



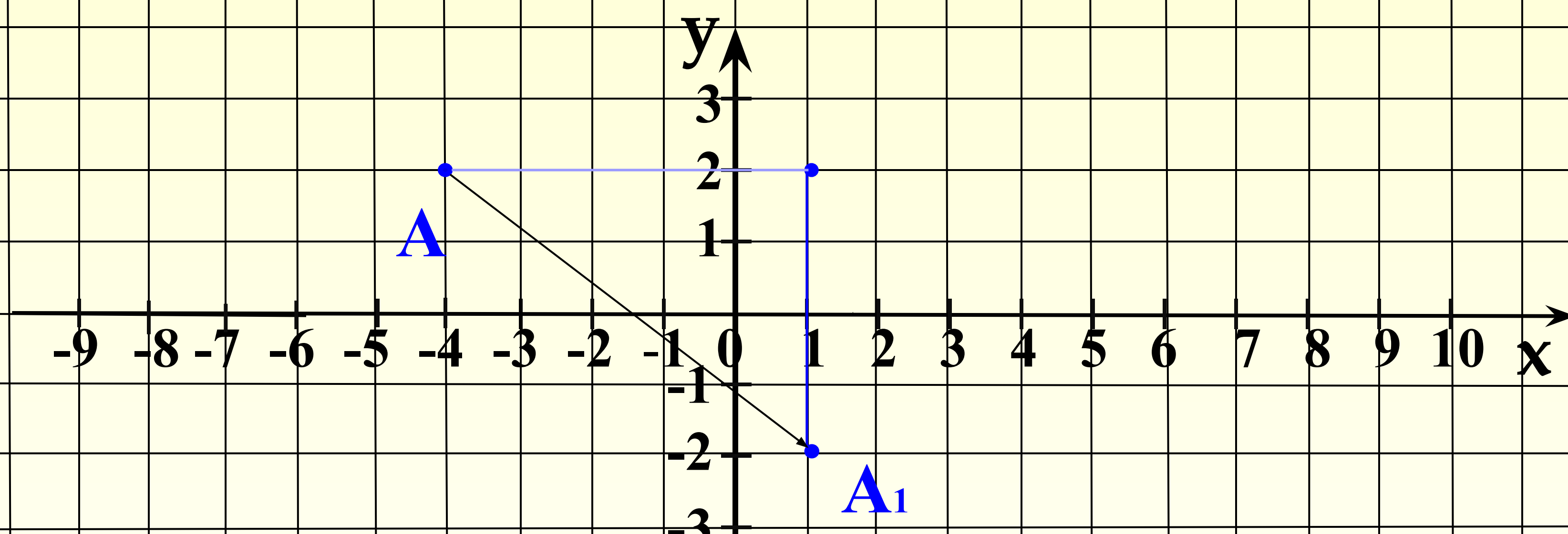
$x_{A_1} - x_A = 4 - (-9) = 13 = \mathbf{a}$ $\quad y_{A_1} - y_A = 2 - (-3) = 5 = \mathbf{b}$

$x_{B_1} - x_B = 6 - (-7) = 13 = \mathbf{a}$ $\quad y_{B_1} - y_B = 4 - (-1) = 5 = \mathbf{b}$

$x_{C_1} - x_C = 8 - (-5) = 13 = \mathbf{a}$ $\quad y_{C_1} - y_C = 2 - (-3) = 5 = \mathbf{b}$

Паралельним перенесенням називається перетворення, при якому довільна точка **(x; y)** фігури-прообразу переходить у точку **(x+a; y+b)** фігури-образу.

Формули паралельного перенесення: $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$



Задача 2. В яку точку перейде точка $A(-4; 2)$ при паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x + 5$, $y_1 = y - 4$?

Розв'язання: $A(-4; 2) \longrightarrow A_1(x_1; y_1)$; $x = -4$, $y = 2$; $a = 5$, $b = -4$;

$x_1 = -4 + 5 = 1$, $y_1 = 2 - 4 = -2$.

Відповідь: $A_1(1; -2)$.

Задача 3. При паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x + 8$, $y_1 = y - 1$, точка В переходить у точку B_1. Знайдіть координати точки В, якщо $B_1(-5; -4)$.

Розв΄язання: $B(x; y) \longrightarrow B_1(-5; -4)$.

$x_1 = -5$, $y_1 = -4$. Підставимо ці значення у формули заданого паралельного перенесення: $-5 = x + 8$, $-4 = y - 1$;

$$x = -13, \quad y = -3.$$

Відповідь: $(-13; -3)$ – координати точки В.

Задача 4. Запишіть формули паралельного перенесення, яке точку $C(-4; 7)$ відображає у точку $C_1(8; -3)$.

Розв΄язання: $C(-4; 7) \longrightarrow C_1(8; -3)$.

Підставимо у формули паралельного перенесення $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$ відповідні координати точок С і C_1:

$$8 = -4 + a, \quad -3 = 7 + b,$$

$$a = 12, \qquad b = -10.$$

Відповідь: $x_1 = x + 12$, $y_1 = y - 10$.

Задача 5. При паралельному перенесенні точка A(3; -7), відображається у точку A_1 (-5; 1). В яку точку відображається точка B(-8; 6)?

Розв΄язання: $A(3; -7) \longrightarrow A_1(-5; 1)$,

$B(-8; 6) \longrightarrow B_1(x_1; y_1)$.

Підставимо у формули паралельного перенесення $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$ відповідні координати точок A і A_1:

$$-5 = 3 + a, \quad 1 = -7 + b; \quad a = -8, \; b = 8.$$

Паралельне перенесення, яке відображає точку A у точку A_1, задається формулами: $x_1 = x - 8$, $y_1 = y + 8$. Це ж саме паралельне перенесення відображає точку B у точку B_1.

Підставимо координати точки B у вище вказані формули :

$$x_1 = -8 - 8 = -16, \quad y_1 = 6 + 8 = 14.$$

Відповідь: (–16; 14) – координати точки B_1.

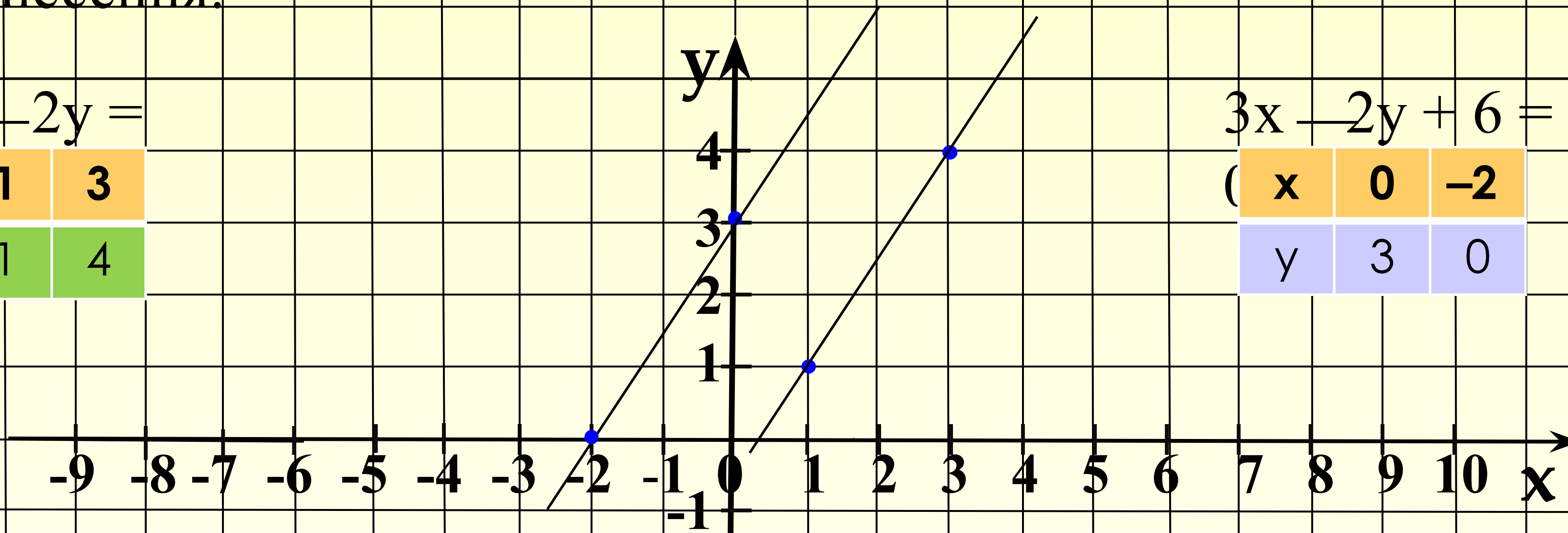
Задача 6. Пряма $3x - 2y = 1$ після паралельного перенесення проходить через точку (0;3). Запишіть рівняння прямої після перенесення.

$3x - 2y =$

x	1	3
y	1	4

$3x - 2y + 6 =$ (

x	0	–2
y	3	0



Розв΄язання. Нехай $y=kx+b$ – рівняння шуканої прямої. У рівнянні прямої $3x - 2y =1$ виразимо у через х: $y =1,5x–0,5$, де 1,5 – кутовий коефіцієнт прямої. У паралельних прямих кутові коефіцієнти рівні, тому $k=1,5$. Оскільки після перенесення пряма проходить через точку (0; 3), то маємо рівняння: $3 = =1,5\cdot0+b$, звідки $b=3$. Рівняння шуканої прямої $y = 1,5x+3$ перепишемо у загальному вигляді: $1,5x–y+3=0$, або $3x–2y+6 =0$.

Відповідь: $3x–2y+6 =0$.

Самостійна робота

1. В яку точку перейде точка А(3; -2) при паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x+2$, $y_1 = y - 3$?

2. Запишіть формули паралельного перенесення, яке точку М(–1; 6) відображає у точку M_1 (7; 2).

3. При паралельному перенесенні точка К(1;5) відображається у точку K_1(–3;7). В яку точку відображається точка Р(6; –4)?

4. Центр кола $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ при паралельному перенесенні перейшов у точку (2; -10). Запишіть формули цього паралельного перенесення.

5. *(додаткова задача)* Пряма $2x – y = 4$ після паралельного перенесення проходить через точку (-1;3). Запишіть рівняння прямої після перенесення.