Глава 3.
Линейная алгебра

§ 1. Матрицы

Определение.

Матрицей размера $m \times n$ (или *числовой матрицей*) называется прямоугольная таблица, образованная из mn чисел и состоящая из m строк и n столбцов ($m, n \in \mathbf{N}$).

Матрицы записывают в виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

или более кратко: $[a_{ij}]$, (a_{ij}), $\|a_{ij}\|$ соответственно.

Числа a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ называются *элементами матрицы*; $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ $(i=\overline{1,m})$ – элементы i-й строки;

$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ $(j=\overline{1,n})$ – элементы j-го столбца. Матрицы обозначают: $A, B, C, \ldots$.

Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m \times n$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$; пишут: $A = B$.

Нулевая матрица (обозначается O) – матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а состоящая из одного столбца – *матрицей-столбцом*.

Трапециевидной матрицей называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ $(i = \overline{1, r})$.

Прямоугольной называется матрица размера $m \times n$, у которой $m \neq n$.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной порядка n*.

Главной диагональю квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ порядка n называется совокупность элементов a_{ii} $(i = \overline{1, n})$, а *побочной диагональю* – совокупность элементов $a_{i\,n-i+1}$ $(i = \overline{1, n})$.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица (обозначается E) – диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, – нули.

Если элементами матрицы являются функции, то матрица называется *функциональной*.

§ 2. Операции над матрицами

Определение.

Суммой матриц $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ размеров $m\times n$ называется матрица $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ размера $m\times n$

$(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

Определение.

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$ *на число* λ $(\lambda \in \mathbf{R})$ называется матрица $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ размера $m \times n$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$.

Матрица $-A = (-1)A$ называется *противоположной* матрице A.

Разностью матриц A и B называется матрица $A - B = A + (-B)$.

Определение.

Произведением матрицы $A = [a_{ik}]$ размера $m \times n$ *на матрицу* $B = [b_{kj}]$ размера $n \times p$ называется матрица $AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]$ размера $m \times p$ $(i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, p})$.

Операция произведения матриц A и B определена для *согласованных матриц*, т.е. когда количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*).

Определение.

k-й степенью $(k \in \mathbf{N})$ *квадратной матрицы* A называется матрица A^k такая, что $A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k\ \text{раз}}.$

По определению, $A^0 = E$.

Операции над матрицами обладают свойствами:

1) $A + B = B + A$,

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$,

4) $(\lambda + \mu)A = (\lambda A + \mu A) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$,

5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \ (\lambda \in \mathbf{R})$,

6) $A(BC) = (AB)C$,

7) $A(B + C) = AB + AC$.

Определение.

Матрицей, транспонированной по отношению к матрице $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$ называется матрица $A^T = [a_{ji}]$ размера $n \times m$.

Переход от A к A^T называется *транспонированием*.

Операция транспонирования обладает свойствами:

1) $(A^T)^T = A$,

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (\lambda \in \mathbf{R})$,

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

§ 3. Определители

Если $A = [a_{11}]$, то *определителем первого порядка* называется число a_{11}.

Определение.

Если $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$ то

определителем второго порядка

называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определение.

Если $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, то

определителем третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

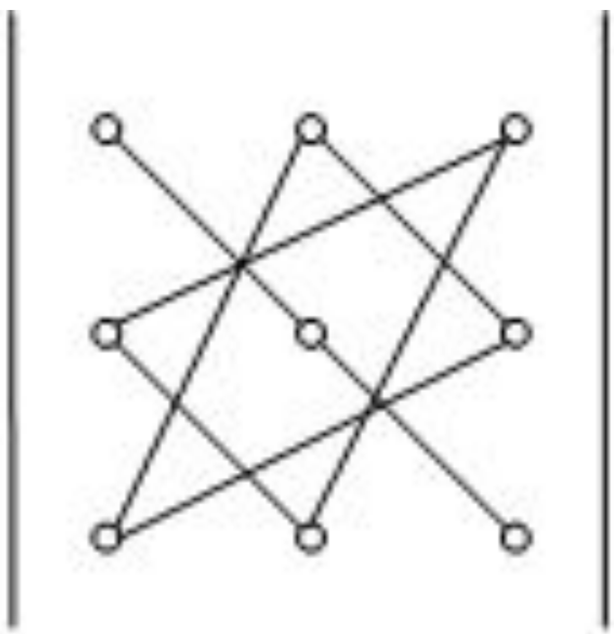
Для вычисления определителя третьего порядка можно использовать *правило треугольников*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

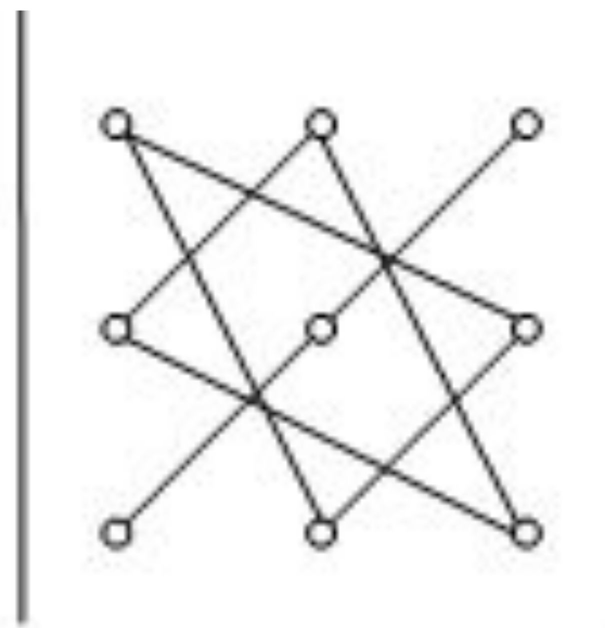
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}.$$

+



−



Если $A = [a_{ij}]$ $(i, j = \overline{1, n},\ n \in \mathbf{N})$, то *определитель n-го порядка* записывают в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ называются *элементами определителя*.

Определитель матрицы A обозначают: Δ, $\det A$, $|A|$.

Определение.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка ($n > 1$) называется определитель ($n-1$)-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Определение.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определитель n-го порядка матрицы $A = [a_{ij}]$ можно вычислять:

1) путем разложения по элементам i-й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik};$$

2) путем разложением по элементам j-го столбца:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Определители обладают следующими свойствами:

1) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю;

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель изменит знак на противоположный;

3) определитель, содержащий две одинаковых строки (столбца), равен нулю;

4) если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на число k $(k \in \mathbf{R})$, то исходный определитель умножится на это число;

5) если соответствующие элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю;

6) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой, умноженной на одно и то же число;

Справедливы формулы:

$$|AB| = |A||B|,$$

$$|A^n| = |A|^n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$|A^T| = |A|.$$

§ 4. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной* (или *неособенной*) если $|A| \neq 0$. В противном случае A – *вырожденная* (или *особенная*).

Определение.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для квадратной матрицы A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица.

Теорема.

Матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Если $A = [a_{ij}]$ $(i, j = \overline{1, n})$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Обратная матрица обладает свойствами:

1) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$,

2) $(A^{-1})^{-1} = A$,

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

4) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \ (k \in \mathbf{N})$,

5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

§ 5. Ранг матрицы

Определение.

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров.

Ранг матрицы A обозначают: $r(\mathrm{A})$, r_A, $\mathrm{rank}\ A$.

Базисным минором матрицы называется любой отличный от нуля минор порядка $r = r(A)$.

<u>Метод окаймляющих миноров</u>.

Если в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k $(k \in \mathbf{N})$, а все окаймляющие его миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

§ 6. Системы линейных алгебраических уравнений

Определение.

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – коэффициенты системы; b_i $(i=\overline{1,m})$– свободные члены; $m, n \in \mathbf{N}$.

Решением системы называется совокупность n значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной*.

Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти множество всех ее решений.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей* (или *основной матрицей*) системы.

Матрица

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

называется *расширенной матрицей* системы

Теорема Кронекера – Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r([A|B])$.

Определение.

Определителем системы n линейных уравнений с n неизвестными называется определитель Δ матрицы этой системы.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и называется *невырожденной*.

Если $\Delta = 0$, то система не имеет решения или имеет бесконечное множество решений и называется *вырожденной*.

Для решения невырожденной системы используют метод Крамера и метод обратной матрицы.

Метод Крамера. Необходимо:

1) вычислить определитель Δ системы;

2) в определителе Δ заменить поочередно i-й столбец столбцом свободных членов и вычислить соответствующие определители Δ_i;

3) вычислить значения

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta};$$

4) записать решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Метод обратной матрицы.

Необходимо:

1) записать систему в матричном виде: $AX = B$, где A – матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов;

2) решить матричное уравнение

$$X = A^{-1}B;$$

3) записать решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Основным методом решения произвольных систем является метод Гаусса. Он базируется на понятии элементарных преобразований строк матрицы системы.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число λ ($\lambda \neq 0$);

3) прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число.

В результате элементарных преобразований строк матрицы A получают *эквивалентную матрицу* B; пишут: $A \sim B$.

Метод Гаусса. Необходимо:

1) записать расширенную матрицу системы;

2) с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы свести матрицу системы к треугольной или трапециевидной;

3) для преобразованной таким образом расширенной матрицы записать соответствующую систему уравнений;

4) решить полученную систему начиная с последнего уравнения;

5) записать решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – проницательность.

Ф. Бэкон