Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Институт радиоэлектроники и информационных технологий — РТФ

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Столетие университета

# Лекции по теории вероятностей

Белоусова Вероника Игоревна
к.ф.-м.н., доцент

# Полная вероятность события. Формула Байеса переоценки гипотез.

# Повторные испытания Бернулли.

# Вероятность повторных испытаний. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

# План лекции

- Полная вероятность события.
- Формула Байеса переоценки гипотез.
- Повторные испытания Бернулли.
- Вероятность повторных испытаний. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

# *Полная вероятность события*

*Определение.* Пусть событие $A$ может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий.

Тогда события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются **гипотезами.**

# Например

Событие А – презентация фильма прошла успешно

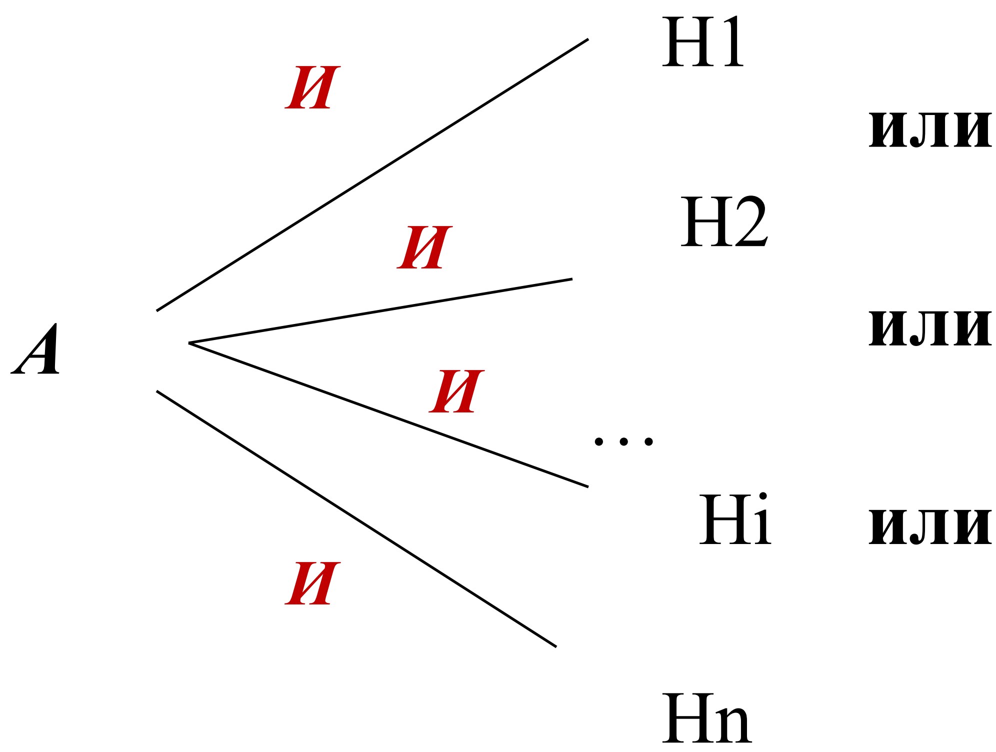
Н1 – судьи состояли из детей

Н2 – судьи из взрослых

Н3 – смешанное судейство

# Вероятность события *A*

Когда наступает событие *A*?



# Теорема.

Вероятность события $A$, наступающего совместно с гипотезами $H_1, H_2, \ldots, H_n$, равна:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A / H_i),$$

где $p(H_i)$ – вероятность $i$- й гипотезы,
а $p(A/H_i)$ – вероятность события $A$ при условии реализации этой гипотезы.

Формула называется **формулой полной вероятности**.

доказательство

Можно считать событие $A$ суммой попарно несовместных событий $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$.

Тогда из теорем сложения и умножения следует, что

$$P(A) = P\left(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n\right) =$$

$$P(A) = P\left(AH_1\right) + P\left(AH_2\right) + \ldots + P\left(AH_n\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A / H_i\right).$$

что и требовалось доказать.

# Пример

Имеется 2 урны с шарами.

В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных. Из первой урны случайно выбирают шар и перекладывают во вторую.

Найти вероятность того, что вытащенный затем наудачу шар из второй урны белый.

*Решение*: Сформулируем гипотезы:

$H_1$ : из первой урны вынут белый шар,

$H_2$ : из первой урны вынут черный шар.

Тогда

*1 урна*

3 белых 4 черных

*2 урна*

2 белых 5 черных

$P(H_1)=\frac{3}{7}$

$P(H_2)=\frac{4}{7}$

*2 урна*

3 белых 5 черных

*2 урна*

2 белых 6 черных

$P(A/H_1)=\frac{3}{8}$

$P(A/H_2)=\frac{2}{8}$

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$={}^{9}\!/_{56}+{}^{8}\!/_{56}={}^{17}\!/_{56}$$

# Переоценка гипотез

- Пусть известен результат опыта, а именно то, что произошло событие $A$.
- Этот факт может изменить априорные (то есть известные до опыта) вероятности гипотез.
- **Вопрос**: Чему равна вероятность того, что к возникновению события привело появление определенной гипотезы $p(H_i / A)$ ?

# Вероятность события

- В какую формулу входит условная вероятность $p(H_i / A)$ ?
- Условная вероятность $p(H_i / A)$ входит в формулу теоремы умножения вероятностей:

$$p(A \cdot H_i) = p(A)\,p(H_i / A) = p(H_i)\,p(A / H_i),$$

# Формула Байеса (теорема гипотез).

Из формулы $p(A \cdot H_i) = p(H_i)p(A/H_i)$ выразим $p(H_i/A)$:

Получим используемую для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта **формулу Байеса**:

$$\boxed{p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)}.}$$

# Пример

После двух выстрелов двух стрелков, вероятности попаданий которых равны 0,6 и 0,7, в мишени оказалась одна пробоина.

Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

**Решение:**

Пусть событие $A$ – одно попадание при двух выстрелах,

$H_1$ – первый попал, а второй промахнулся,

$H_2$ – первый промахнулся, а второй попал,

$H_3$ – оба попали,

$H_4$ – оба промахнулись.

# Пример

Вероятности гипотез:

$p(H_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$, (первый попал, а второй промахнулся)

$p(H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$, (первый промахнулся, а второй попал)

$p(H_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, (оба попали)

$p(H_4) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. (оба промахнулись)

Тогда $p(A/H_1) = p(A/H_2) = 1$, $p(A/H_3) = p(A/H_4) = 0$.

$p(A) = 0{,}18 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 1 + 0{,}42 \cdot 0 + 0{,}12 \cdot 0 = 0{,}46$.

Применяя формулу Байеса, получим: $p(H_1 / A) = \dfrac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}46} = \dfrac{9}{23} \approx 0{,}391$.

# Схема Бернулли повторения испытаний

Рассмотрим серию из $n$ испытаний, в каждом из которых событие $A$ появляется с одной и той же вероятностью $p$, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных.

Подобная постановка задачи называется **схемой повторения испытаний**.

## Схема повторения испытаний. Формула Бернулли

Найдем вероятность того, что в такой серии событие *A* произойдет ровно *к* раз (неважно, в какой последовательности).

Событие *A* - сумма равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что:

*1) из n выбраны k таких испытаний, при которых:*

2) *A* произошло в этих k испытаниях

и

3) не произошло в остальных (n-k) испытаниях.

# Формула Бернулли

1. Число таких событий равно числу сочетаний $C_n^k$ из $n$ по $k$ ,

2. Вероятность каждого из испытаний равна:

$$p^k q^{n\text{-}k},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте $A$ не произошло.

Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим **формулу Бернулли**:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

# Якоб Бернулли

6 января6 января 1655 - 16 августа 1705, швейцарский математик, один из создателей теории вероятностей.

# Пример 1

Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

**Решение:**

# Пример 1

Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

**Решение:**

Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия.

# Пример 1

Мы ищем вероятность события А:

*Последнее изделие было с особым знаком*

**и**

*4 и 9 из предыдущих тоже были с особым знаком.*

Найдем вероятность второго условия по формуле Бернулли: $p_9(4) = C_9^4 \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^5 = 0{,}0006092.$

Тогда $P(A) = 0{,}0006092 \cdot 0{,}05 = 0{,}0000304.$

# Пример 2

Что вероятнее, выиграть у равносильного соперника не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8?

# Пример 2

Что вероятнее, выиграть у равносильного соперника не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8?

**Решение:**

A- выиграть у равносильного соперника не менее 3 партий из 4

B- выиграть у равносильного соперника не менее 5 из 8

$$P(A)=C_4^3\cdot(0,5)^4+C_4^4\cdot(0,5)^4=(0,5)^4\cdot 5={}^5\!/_{16}$$

$$P(B)=(0,5)^8\left(C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8\right)=$$

$$=(0,5)^8\cdot(56+28+8+1)={}^{93}\!/_{256}$$

$$\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{93\cdot 16}{16\cdot 16\cdot 5}=\frac{93}{80}>1$$

# Пример 3

Проводится 10 испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p$ и неудачи $q$. Найти вероятность того, что успех произойдет только в двух случаях, при этом между ними 3 раза испытание будет неуспешным.

**Решение:**

# Когда формула Бернулли неудобна?

# Приближение Пуассона для схемы Бернулли

При повторении испытаний равновозможные исходы испытания будут наступать в среднем одинаково часто.

Пусть при большом числе испытаний вероятность появления $A$ в одном опыте мала, а произведение $np = \lambda$ сохраняет постоянное значение для разных серий опытов

( то есть среднее число появлений события $A$ в разных сериях испытаний остается неизменным).

# Приближение Пуассона для схемы Бернулли

*Из* $np = \lambda$ следует $p = \lambda/n$ . Применим формулу Бернулли:

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

ения при $n \to \infty$

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left( 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1.$$

# Формула Пуассона

Таким образом, получена **формула Пуассона**

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

которая позволяет найти вероятность *к* появлений события *A* для массовых (*n* велико) и редких (*p* мало) событий.

Достаточно условий p<0,1 и npq<10

# Симеон Дени Пуассон

французский математик французский математик, механик французский математик, механик и физик.

— 1840 г.)

# пример

Вероятность сбоя в системе при переключении ее режимов равна 0,001. Найти вероятность того, что в 5000 переключениях будет не меньше двух сбоев.

# пример

Вероятность сбоя в системе при переключении ее режимов равна 0,001. Найти вероятность того, что в 5000 переключениях будет не меньше двух сбоев.

**Решение**

A – в 5000 переключениях будет от 2 до 5000 сбоев.

$\overline{A}$ - в 5000 переключениях будет 0 или 1 сбой.

p=0,001 q=0,999 n=5000 npq=4,995<10

λ=np=5

$$P_{5000}(0) \approx \frac{5^0}{0!}e^{-5} \approx 0,0067$$

$$P_{5000}(1) \approx \frac{5^1}{1!}e^{-5} \approx 5 \cdot 0,0067$$

$$\boxed{P_{5000}(0) + P_{5000}(1) \approx 0,04}$$

# Наивероятнейшее число появлений события

**Наивероятнейшим числом появления** события в независимых испытаниях называется такое число , вероятность которого превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных чисел появления события .

Обозначим $P_{m_0,n}$ вероятность, соответствующую наивероятнейшему числу $m_0$.

# Наивероятнейшее число появлений события

Используя формулу, $p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ получим:

$$P_{m_0,n} = C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} = \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0}$$

Согласно определению наивероятнейшего числа, вероятности наступления события А соответственно $m_0$-1 и $m_0$+1 раз должны, по крайней мере не превышать $P_{m0,n}$:

$$P_{m_0+1,n} \le P_{m_0,n} \qquad P_{m_0-1,n} \le P_{m_0,n}$$

Сначала распишем неравенство $P_{m_0+1,n} \le P_{m_0,n}$

$$\frac{n!}{(m_0+1)!\,(n-m_0-1)!}p^{m_0+1}q^{n-m_0-1} \le \frac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!}p^{m_0}q^{n-m_0},$$

$$\frac{1}{(m_0+1)}p \le \frac{1}{(n-m_0)}q$$

$$(n-m_0)p \le (m_0+1)q \;\rightarrow\; np-q \le m_0(p+q) = m_0.$$

Аналогично, расписывая неравенство $P_{m_0,n} \le P_{m_0-1,n}$ , получим $np+p \ge m_0$.

# Наивероятнейшее число появлений события

Для определения наивероятнейшего числа событий в повторных испытаниях используют формулу:

$$\boxed{np - q \le m_0 \le np + p}$$

Длина интервала, определяемого неравенством равна единице, т. е.

$$(np + p) - (np - q) = p + q = 1.$$

# Наивероятнейшее число появлений события

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

Событие может произойти в испытаниях только целое число раз, то следует иметь в виду, что:

1) если $np - q$ — целое число, то существуют два значения наивероятнейшего числа, а именно: $m_0 = np - q$ и $m_0' = np - q + 1 = np + p$;

2) если $np - q$ — дробное число, то существует одно наивероятнейшее число, а именно: единственное целое, заключенное между дробными числами, полученными из неравенства;

3) если $np$ — целое число, то существует одно наивероятнейшее число, а именно: $m_0 = np$.

## Вероятность наивероятнейшего числа появлений события

При больших значениях $n$ пользоваться формулой Бернулли для расчета вероятности, соответствующей наивероятнейшему числу, неудобно. Если в формулу Бернулли подставить формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

и принять $m_0 = np$, то получим ***формулу вероятности наступления наивероятнейшего числа появления события А:***

$$\boxed{P_{m_0,n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}.}$$

**Пример**

Известно, что 1/15 часть продукции, поставляемой заводом на торговую базу, не удовлетворяет всем требованиям стандарта. На базу была завезена партия изделий в количестве 250 шт. Найти наивероятнейшее число изделий, удовлетворяющих требованиям стандарта, и вычислить вероятность того, что в этой партии окажется наивероятнейшее число изделий.

Решение:

По условию n=250 q=1/15, значит p=14/15.

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad 250 \cdot \frac{14}{15} - \frac{1}{15} \le m_0 \le 250 \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15}$$

$$233,26 \le m_0 \le 234,26 \Rightarrow \quad m_0 = 234.$$

$$P_{m_0,n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \approx 0,254.$$

# Локальная теорема Лапласа

Локальная теорема Лапласа дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления событий ровно $m$ раз в $n$ испытаниях, если число испытаний достаточно велико, а $p$ и $q$ не достаточно малы.

# Локальная теорема Лапласа

**Теорема**. Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие А появится в $n$ испытаниях ровно $m$ раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше $n$) значению функции

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.}$$

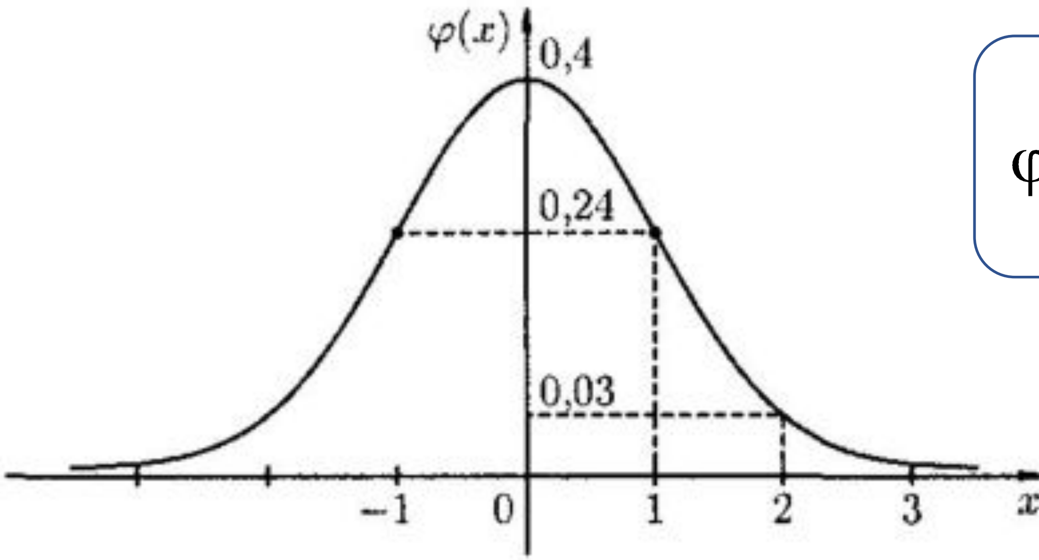
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$ - функция табличная

# Свойства функции $\varphi(x)$ :

1)функция четная $\varphi(-x)= -\varphi(x)$;

2)при $x\geq 4 \quad \varphi(x)\approx 0$.

*$\varphi(x)$ называют функцией Гаусса*




$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

# Пример

Найти вероятность того, что событие наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2.

**Решение**. По условию $n$=400, $m$=80, $p$=0,2, $q$=0,8 ($npq$=64). Применим асимптотическую формулу Лапласа.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{8}\varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение $x$:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

По таблице (Приложение 1) находим $\varphi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность $P_{80,100} = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$

# Интегральная теорема Лапласа

Пусть в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна, равна p и отлична от 0 и 1,

необходимо вычислить вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что A появится не менее $m_1$ и не более $m_2$ раз (от $m_1$ до $m_2$ раз), тогда

применяют *интегральную теорему Лапласа*.

# Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность наступления события A постоянна и отлична от 0 и 1, то приближенно вероятность $P_n(m_1, m_2)$ появления события A от $m_1$ до $m_2$ раз равна

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx,$$

$$\text{где } x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

# Функция Лапласа

Неопределенный интеграл $\int e^{-x^2/2}\,dx$

не выражается через элементарные функции.

Функция Лапласа – табличная (Приложение 2)

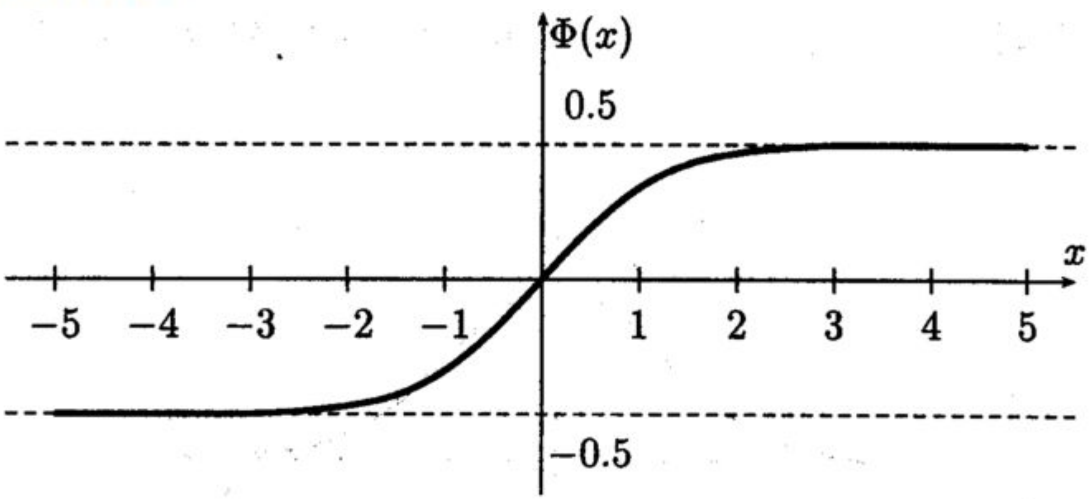
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$$

# Свойства функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz$$

1) $\Phi(x)$ нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

2) для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$. Таблица содержит значения функции $\Phi(x)$ лишь для $x \in [0; 5]$.



# Пример

Вероятность того, что деталь изготовлена с нарушениями стандартов, $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей нестандартных окажется от 70 до 100 деталей.

*Решение.* По условию $p = 0{,}2,\ q = 0{,}8,\ n = 400,\ m_1 = 70,\ m_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{(70,100),400} \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим пределы интегрирования:

Нижний $$x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25,$$

Верхний $$x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5,$$

# Пример

Таким образом

$$P_{(70,100),400} \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице прил. 2 находим $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \qquad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$

Искомая вероятность

$$P_{(70,100),400} = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

# Применение интегральной теоремы Лапласа

Поставим задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности $p$ по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$.

Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon$, что то же самое, $-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \varepsilon$.

Эту вероятность будем обозначать так: $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\}$.

# Применение интегральной теоремы Лапласа

$$-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \varepsilon.$$

Умножим неравенство на множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

По теореме Лапласа $P\left\{x' \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x''\right\} = \Phi(x'') - \Phi(x')$.

Тогда получаем $\Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

# Пример

Вероятность того, что деталь нестандартна, $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

*Решение.* По условию $n = 400,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9,\ \varepsilon = 0{,}03$.

Требуется найти вероятность $P\left\{\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \leqslant 0{,}03\right\}$.

Используя формулу $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ получаем

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \leqslant 0{,}03\right\} \approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = 2\Phi(2).$$

# Пример

$$P\left\{\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\leqslant 0{,}03\right\}\approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице прил. 2 находим $\Phi(2)=0{,}4772$, следовательно, $2\Phi(2)=0{,}9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

**На сегодня всё.**
**Расходимся.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^2+4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin n}$$