Лабораторная №5.
Численное решение нелинейных уравнений

Постановка задачи

Одной из важных практических задач при исследовании различных свойств математической модели в виде функциональной зависимости $y = f(x)$ является нахождение значений x, при которых эта функция обращается в ноль, т.е. решение уравнения

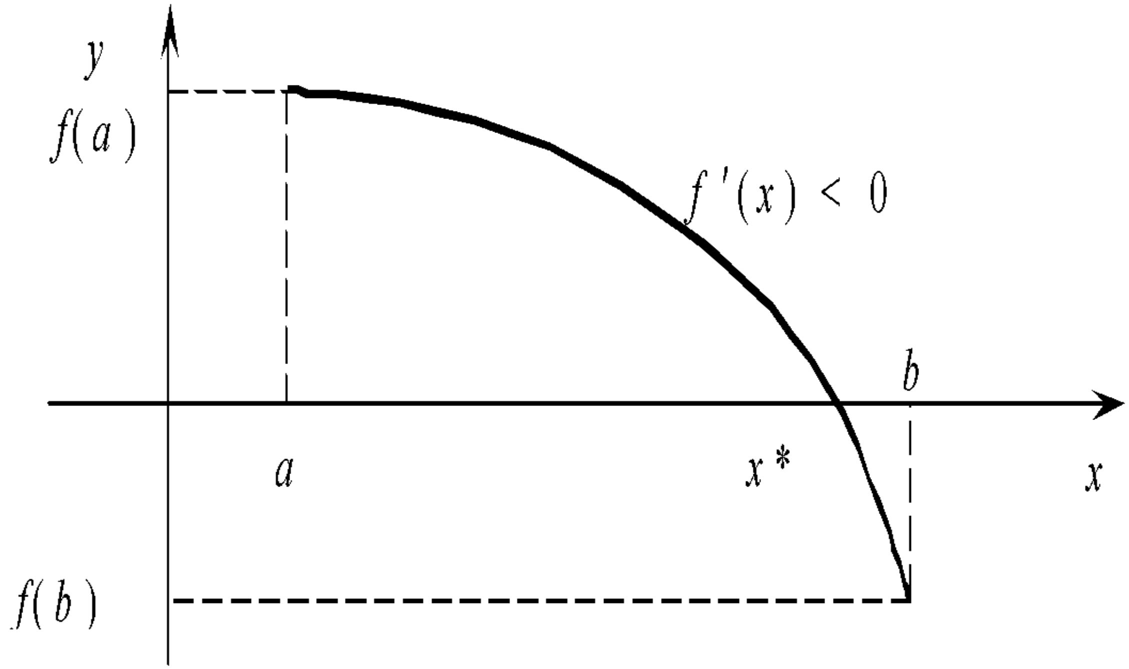
$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

В общем случае это уравнение носит нелинейный характер.

Этапы численного решения

1) Исследование характера функции *f*(*x*), определение количества корней и приблизительного значения интересующего нас корня:

Определяют, какие корни требуется найти, например, только действительные или только положительные корни, наименьший корень и т.д. Популярным методом является графический, который позволяет определить приближенное значение корня или найти отрезок, содержащий один корень функции *f*(*x*), т.е. отделить корень.



Если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, т.е. если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка существует, по крайней мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. Корень будет единственным, если производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри интервала (a, b).

2) Вычисление корня с требуемой точностью с помощью какого-либо численного алгоритма.

Уточнение решения, исходя из выбранного начального приближении к истинному корню x^*. Для этого используются итерационные методы, позволяющие с помощью рекуррентного соотношения

$$x^k = \varphi(x^{k-1}, x^{k-2}, \ldots, x^{k-m})$$

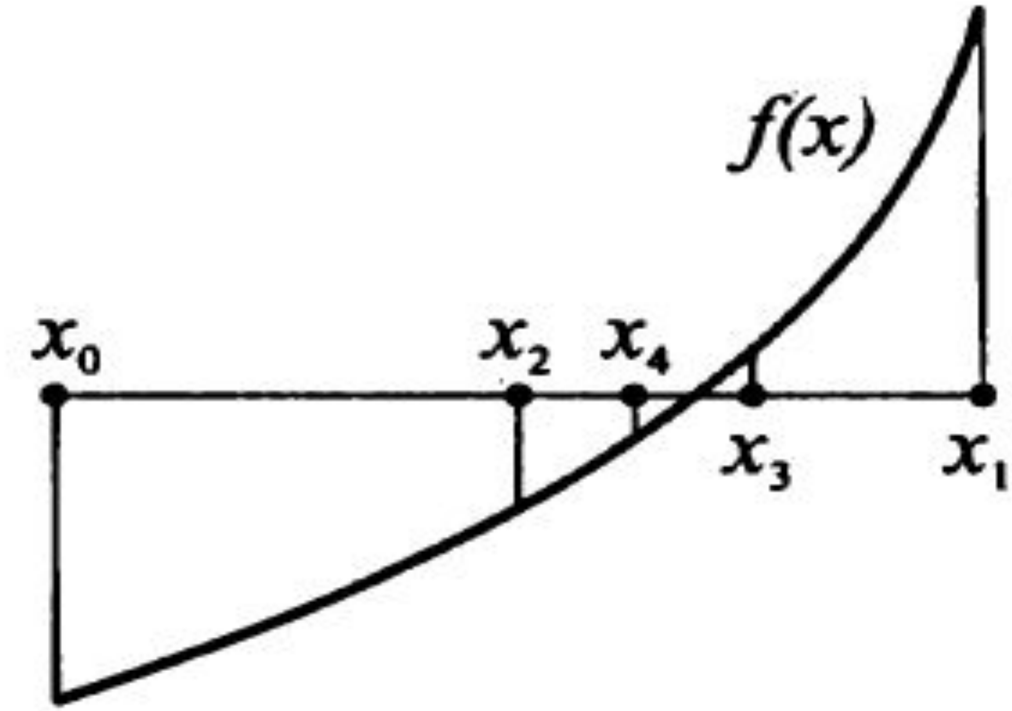
построить последовательность приближенных решений (x_n), сходящуюся к x^*. Т. о. стоит задача обеспечения сходимости последовательности к истинному значению

Сходимость достигается посредством выбора различными способами функций φ, которая зависит от $f(x)$ и в общем случае от номера члена последовательности (n).
Если при нахождении значения $x^k \approx x^*$, используется одно предыдущее значение (x^{k-1}), то такой метод называется *одношаговым*.
Если используется m предыдущих значений, то метод называется m-шаговым и, как правило, с увеличением m вычислительные алгоритмы усложняются.

Расчет по рекуррентной последовательности продолжается до тех пор, пока $|x^n – x^{n-1}| < \varepsilon$ (требуемая *точность*). Тогда последнее x^n выбирается в качестве приближенного значения корня ($x^* \approx x^n$).

На практике имеется *большой выбор* законов ф, что обеспечивает многообразие численных итерационных методов решения нелинейных уравнений.

Метод дихотомии (деления пополам)



А) Отрезок [*a*, *b*], на котором находится корень (т.е. выполняется условие $f(a) \cdot f(b) < 0$), последовательно делится на две равные части и определяются знаки функции в точках деления.

Б) При каждом делении проверяется: если в точках деления x_i, x_{i+1} выполнено условие $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$, то на интервале (x_i, x_{i+1}) имеется корень уравнения $f(x) = 0$. Этот интервал затем делится пополам и т.д.

В) Последовательность середин интервалов сходится к искомому решению; процесс останавливается, когда длина интервала станет меньше некоторого заранее заданного значения (точности).

Метод простых итераций

Применяется к уравнению, разрешенному относительно *x*:

$$x = \phi(x).$$

Переход к этой записи можно сделать многими способами, например, положив $\phi(x)=x+\psi(x)\ f(x)$, где $\psi(x) \neq 0$ – произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Метод состоит в построении **последовательности** в виде:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$n = 0,1,2,\ldots.$

Если $\phi(x_n)$ – непрерывная функция, а x_n – сходящаяся последовательность, то значение предела этой последовательности и будет искомым решением x^*.

Итерационный процесс уточнения корня **заканчивается**, когда

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Метод простой итерации является примером одношагового метода и для начала вычислений достаточно знать **одно начальное приближение**.

Сходимость метода. Отличие (n+1)-го члена последовательности от точного решения можно связать с аналогичной разностью для n-го члена последовательности:

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = (x_n - x^*)\varphi'(\xi)$$

где ξ – некоторая точка между x_n и x^*. Очевидно, что отрезки должны убывать, а значит всюду должно выполняться соотношение:

$$|\ \phi'(x)\ | \le q < 1.$$

При этом скорость сходимости увеличивается при уменьшении величины q. Максимальный интервал (α,β), на котором выполняется это условие, называется

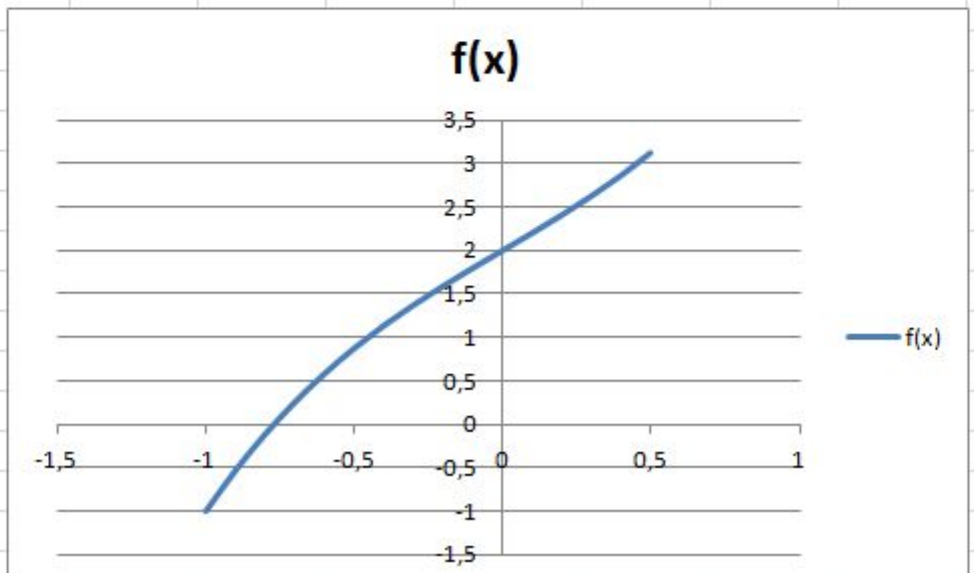
Рассмотрим пример улучшения сходимости метода простых итераций

Пусть нам нужно решить уравнение

$$x^3+2x+2=0,$$

т.е. $f(x)=x^3+2x+2$. Построим график $f(x)$:

x	f(x)
-1	-1
-0,9	-0,529
-0,8	-0,112
-0,7	0,257
-0,6	0,584
-0,5	0,875
-0,4	1,136
-0,3	1,373
-0,2	1,592
-0,1	1,799
0	2
0,1	2,201
0,2	2,408
0,3	2,627
0,4	2,864
0,5	3,125



Видно, что решение находится где-то на интервале $-1<x<0$.

Чтобы искать решение методом простых итераций, записываем уравнение в виде

$$x=\varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x)=x+\psi(x)f(x)$$

Простейший вариант: $\psi(x)=1$. Но тогда $\varphi'(x)=1+f'(x)=3(1+x^2)>1$ при $-1<x<0$, т.е. метод не сходится.

Возьмем $\psi(x)=a=\text{const}$. Тогда $\varphi'(x)=1+a(2+3x^2)$.

Из условия сходимости $|\varphi'(x)|<1$ следует:

$$-1<1+a(2+3x^2)<1\ \text{или}\ -2/(2+3x^2)<a<0,$$

т.е. $-1<a<0$ при $x=0$ и $-2/5<a<0$ при $x=-1$. Для сходимости на всем интервале достаточно $a=-1/5$

Метод Ньютона (касательных)

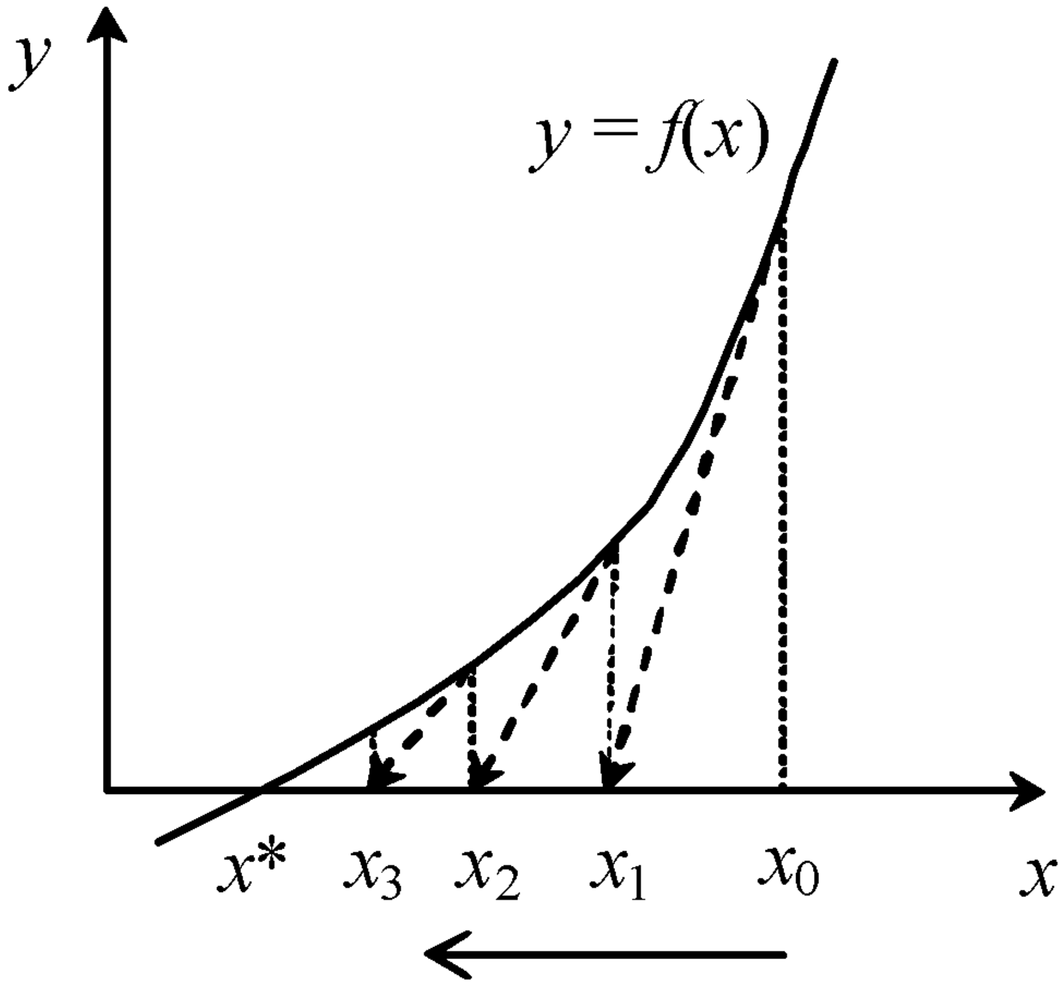
Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема, то выбирая $\psi(x) = -\frac{1}{f'(x)}$,

получим эквивалентное уравнение

$$x = x - f(x)/f'(x) = \phi(x),\ f'(x) \neq 0.$$

Тогда получим следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$



Геометрически итерационный процесс можно интерпретировать, как замену на каждой итерации графика функции на касательную к нему.

Это также одношаговый метод.

Сходимость метода определяется условием

$$|\,\phi'(x)\,| = |f f''/ f'^2| < 1.$$

В общем случае, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерации сходятся. **Проблематичным** может быть выбор начального приближения x_0 в виду узости области сходимости. При выборе начального приближения x_0 имеет смысл использовать заведомо сходящийся метод, например, метод деления отрезка пополам

Задание

1. Построить график функции и определить приблизительное положение корней.
2. Составить программу на языке Java для решения уравнения (уточнения корня):
(а) методом деления отрезка пополам. Для нахождения корня следует должным образом выбрать отрезок, на котором ищется решение;
(б) методом простых итераций. Для обеспечения сходимости следует должным образом подобрать вспомогательную функцию и начальное приближение;

(в) методом Ньютона. Для обеспечения сходимости следует должным образом подобрать начальное приближение.

3. Решение получить с точностью 0.0001. Определить количество делений пополам/итераций, которое вам понадобилось для этого.

Кому какие уравнения?

1. $X^3 + 2X + 2 = 0$
2. $X^3 - 2X + 2 = 0$
3. $X^3 + 3X - 1 = 0$
4. $X^3 + X - 3 = 0$
5. $X^3 + 2X + 4 = 0$
6. $(X+1)^2 = 1/X$
7. $X = (X+1)^3$
8. $X^3 + 4X - 4 = 0$
9. $X^3 + 6X - 1 = 0$