

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Цель занятия:

Ввести понятие определённого интеграла и его вычисление по формуле Ньютона-Лейбница, используя знания о первообразной и правила её вычисления

Задачи занятия:

- 1. Проиллюстрировать практическое применение интеграла на примерах нахождения площади криволинейной трапеции.**
- 2. Обобщить и систематизировать знания, проверить усвоение изученного материала**
- 3. Закрепить изученное в ходе выполнения упражнений.**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Повторим. Повторение ранее пройденного материала.
2. Новое. Понятие об криволинейной трапеции.
Определённый интеграл
3. Вычисление площадей с помощью интегралов
4. Пятиминутка.
5. Устная работа.
6. Практикум.
7. Программируемый контроль.
8. Домашнее задание.
9. Список использованных источников.

ПОВТОРИМ!

1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Другими словами нахождение первообразной – это обратное действие нахождения производной.

2. $F(x)+C$, где C произвольная постоянная (любое число), называется семейством первообразных.

3. Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
a	$a \cdot x + C$		$\sin x$	$-\cos x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$		$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
e^x	$e^x + C$		$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
			$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$

Правила нахождения первообразных

$$f(x) \pm g(x) = F(x) \pm G(x) + C$$

$$kf(x) = kF(x) + C$$

$$f(kx + b) = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$

Найди ошибку в вычислении первообразных

1) $f(x) = x^5$

$$F(x) = 5x^4 + C$$

A light green square containing a large, dark gray question mark.

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + C$$

2) $f(x) = 6x$

$$F(x) = \frac{1}{7}x^7$$

A light green square containing a large, dark gray question mark.

$$F(x) = 3x^2 + C$$

3) $f(x) = x^4$

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5$$

A light green square containing a large, dark gray question mark.

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + C$$

Найдите первообразную функции

1) $f(x) = 2x$

?

1) $F(x) = x^2 + C$

2) $f(x) = 2 \sin x + e^x$

?

2) $F(x) = -2 \cos x + e^x + C$

3) $f(x) = 25x^4 - 3$

?

3) $F(x) = 5x^5 - 3x$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

?

4) $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

5) $f(x) = (3x + 1)^4$

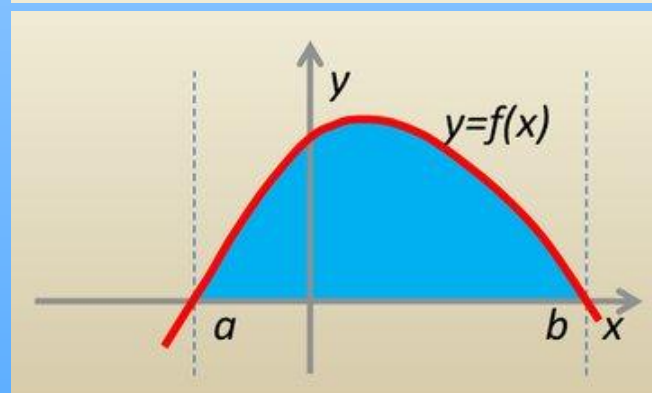
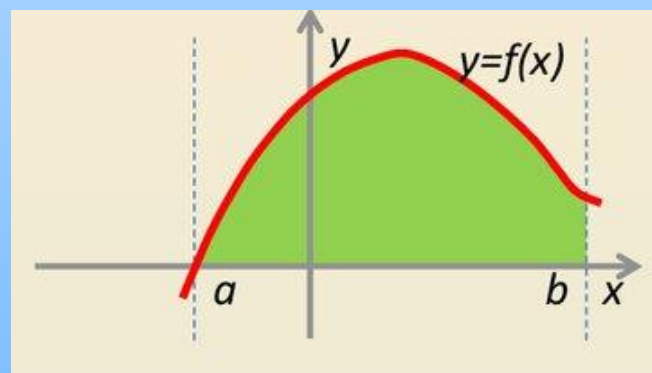
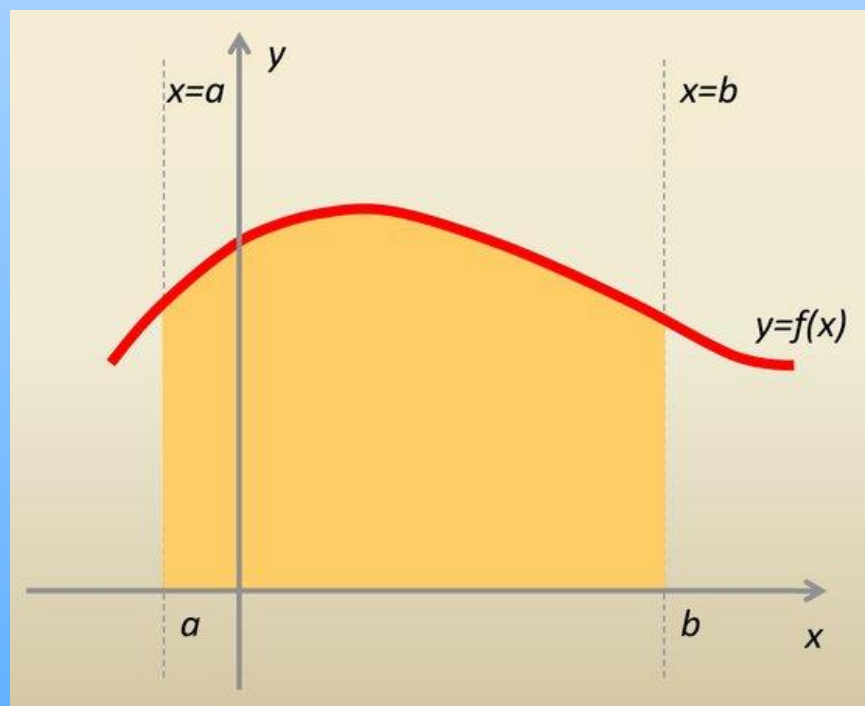
?

5) $F(x) = \frac{1}{15} (3x + 1)^5 + C$



Понятие о криволинейной трапеции. Определённый интеграл

Фигура, ограниченная неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функцией $y=f(x)$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ называется
криволинейной трапецией.



Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле:

$$S = F(b) - F(a)$$

Где $F(x)$ – первообразная функции $y=f(x)$

Вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, то есть к интегрированию функции $f(x)$.

Определение

Разность $F(b)-F(a)$ называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают:

Верхний предел
интегрирования

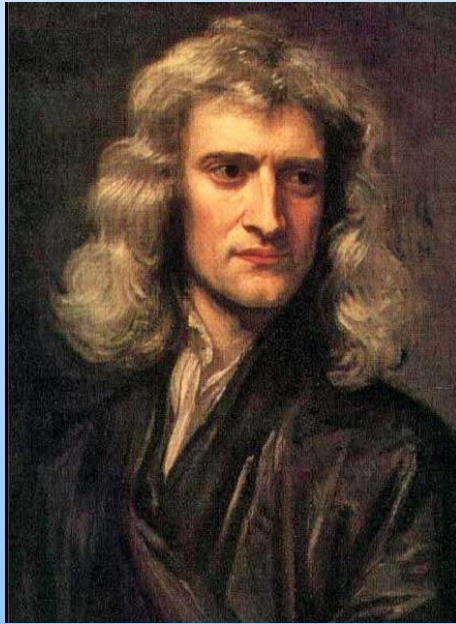
Нижний предел
интегрирования

$$\int_a^b f(x) dx$$

Подынтегральная
функция

Подынтегральное
выражение

Формула Ньютона - Лейбница



Исаак НЬЮТОН
1642-1727

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Таким образом:



Готфрид Лейбниц
1646-1716 гг.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл интеграла

Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

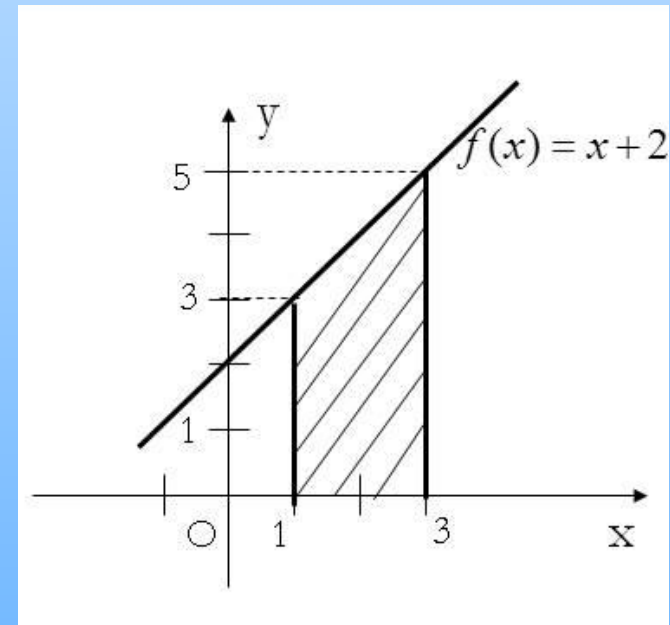
Пример

Вычислить интеграл, если график функции $y=f(x)$ изображён на рисунке

Проверь себя!

?

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} + 6 - \left(\frac{1^2}{2} + 2 \right) = \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = 4 + 4 = 8 (\text{кв.ед}) \end{aligned}$$



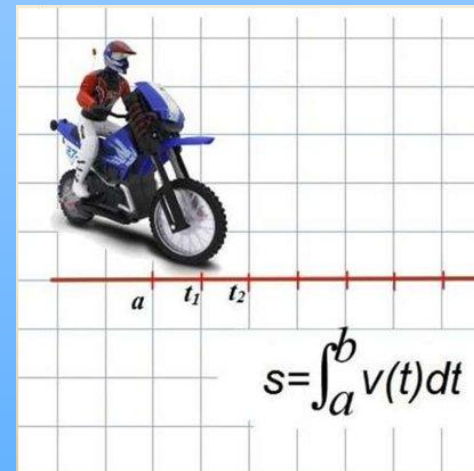
Физический смысл интеграла

При прямолинейном движении перемещение S численно равно определённому интегралу зависимости скорости V от времени t

Пример

Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v=3t^2-4t+1$, (время измеряется в секундах, скорость – в см/с). Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t=0$)?

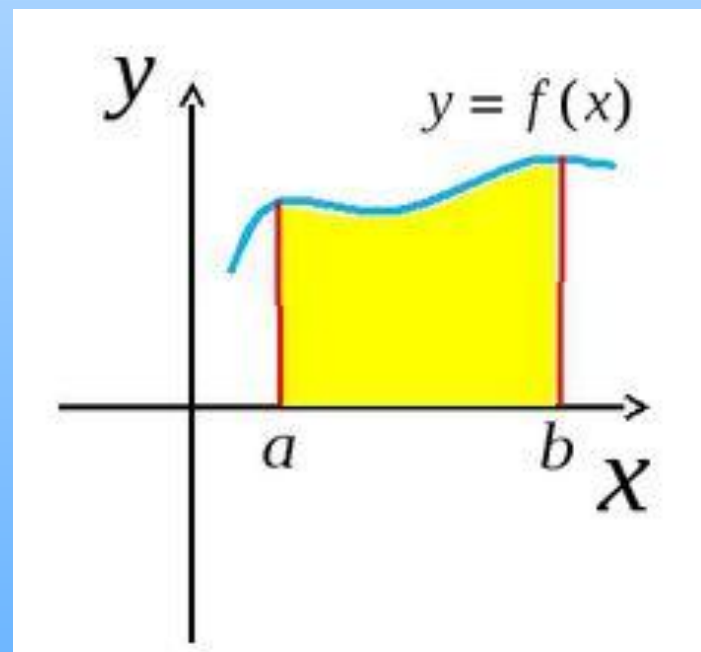
$$s = \int_a^b v(t) dt = \int_0^3 (3t^2 - 4t + 1) dt = (t^3 - 2t^2 + t) \Big|_0^3 = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 = 27 - 18 + 3 = 12(\text{см})$$



Вычисление площадей с помощью интегралов

1. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу осью OX и по бокам отрезком $[a;b]$

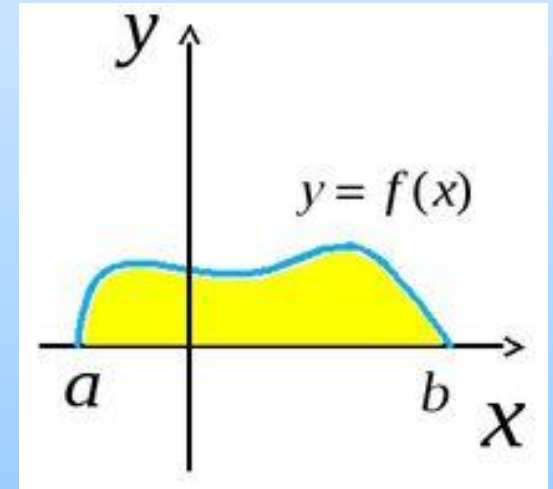
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



2. Фигура, ограниченная сверху только графиком функции $y=f(x)$ и снизу осью OX

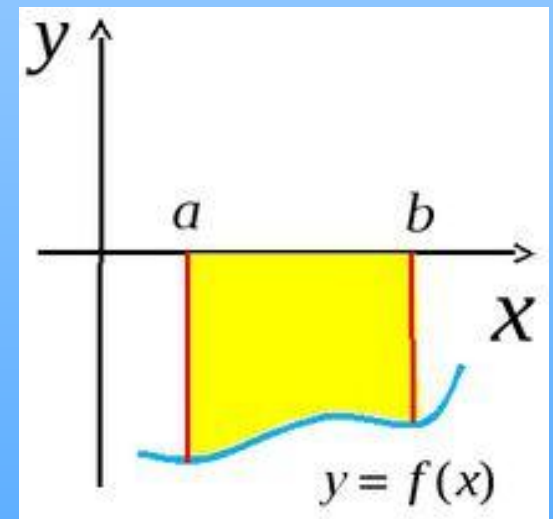
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Точки a и b находим из уравнения $f(x) = 0$



3. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху осью OX , снизу графиком функции $y=f(x)$ и по бокам отрезком $[a;b]$

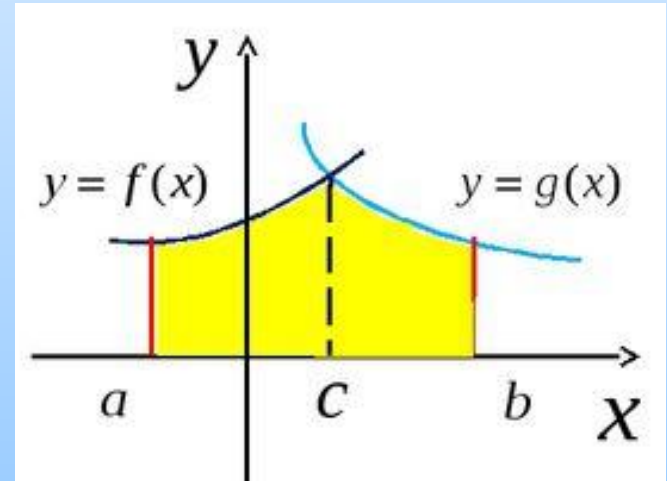
$$S = -\int_a^b f(x) dx$$



4. Фигура, ограниченная сверху двумя графиками функций $y=f(x)$ и $g(x)$, снизу осью OX и по бокам отрезком $[a;b]$

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

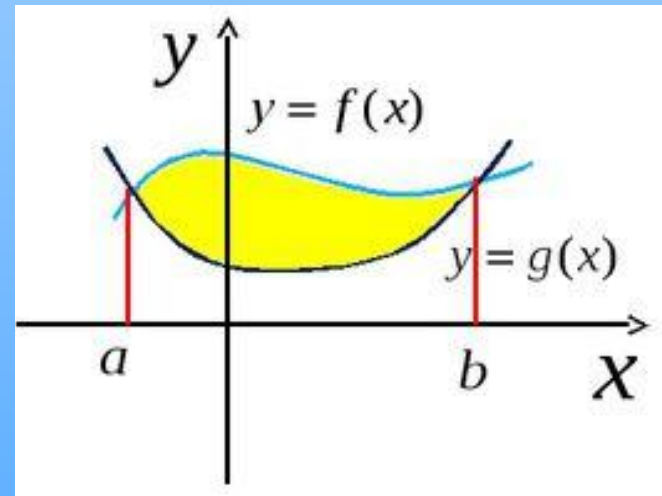
Точку C находим из уравнения $f(x)=g(x)$



5. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу графиком функции $y=g(x)$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Точки a и b находим из уравнения $f(x)=g(x)$



Пятиминутка!

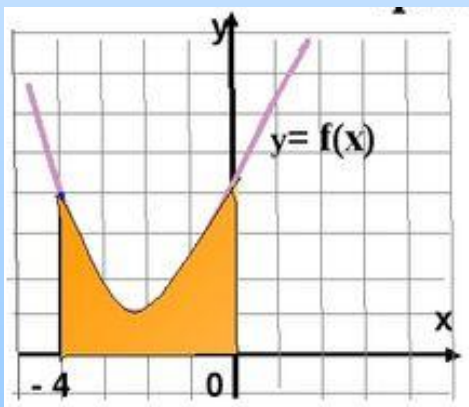
Как я устал!!!
Всё учишь и
учишь

А для меня
урок всегда
праздник!



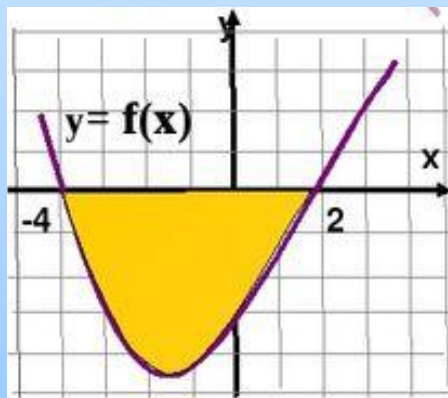
Устная работа

Выразите, с помощью интеграла площади фигур, изображённых на рисунке



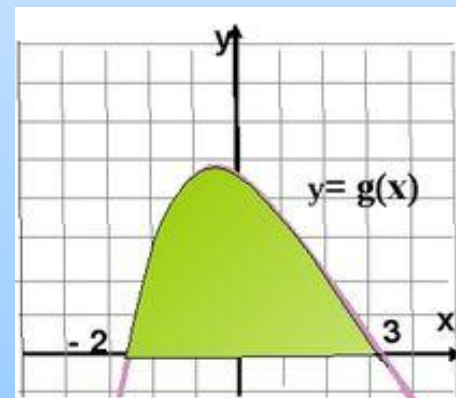
?

$$S = \int_{-4}^0 f(x) dx$$



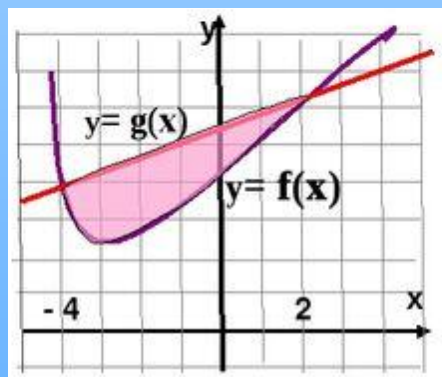
?

$$S = -\int_{-4}^2 f(x) dx$$



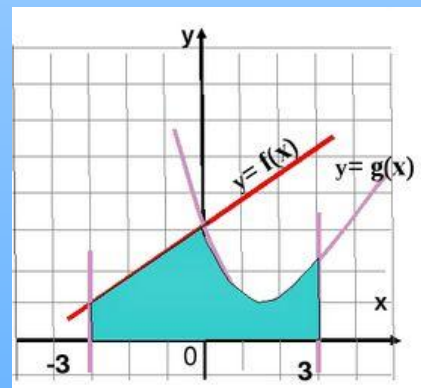
?

$$S = \int_{-2}^3 g(x) dx$$



?

$$S = \int_{-4}^2 g(x) dx - \int_{-4}^2 f(x) dx$$



?

$$S = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx$$



ПРАКТИКУМ

Задание №1

Найти площадь криволинейной трапеции,
изображённой на рисунках

1)



Решение

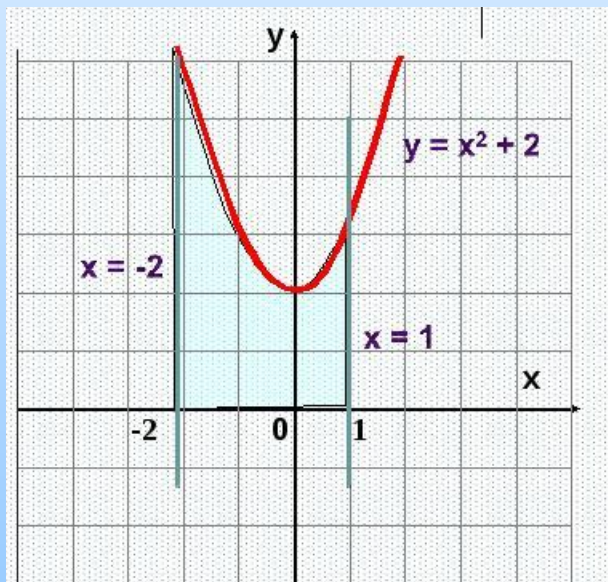
Используя формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Получаем:

$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

2)

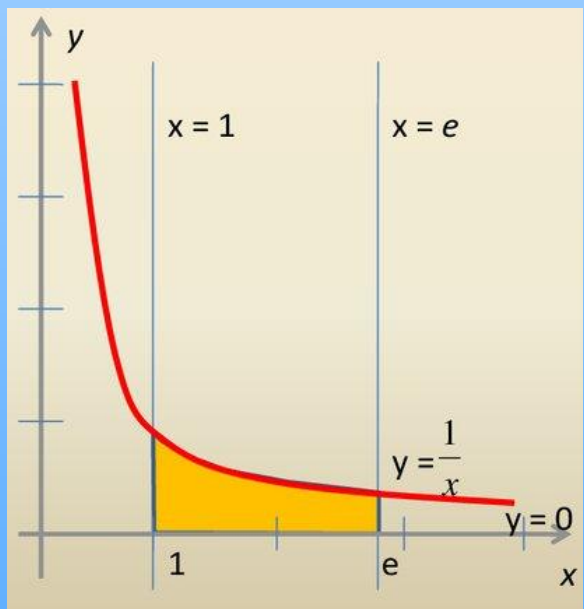
Решение

?

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\
 &= \frac{1^3}{3} + 2 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) \right) = \\
 &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9 \text{ (кв.ед)}
 \end{aligned}$$

Решение

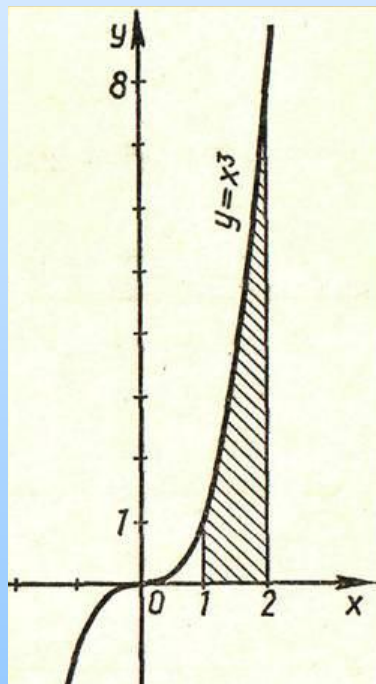
3)



?

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \\
 &= \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1 \text{ (кв.ед)}
 \end{aligned}$$

4)



?

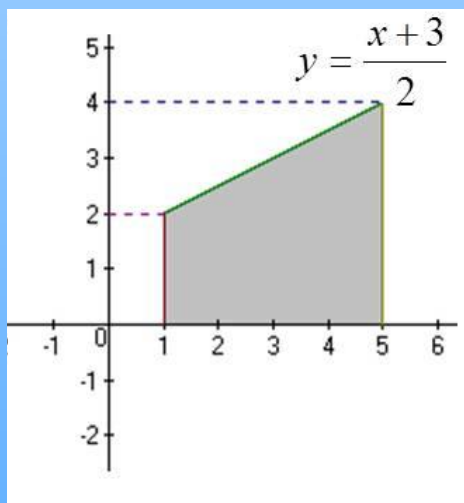
Решение

$$S = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (кв.ед)}$$

Решение

5)



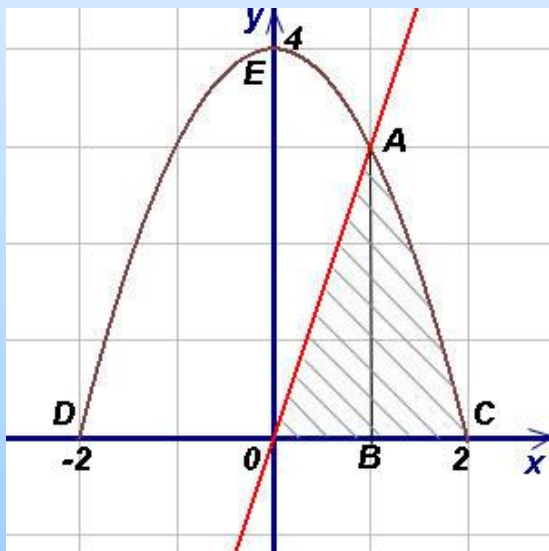
?

$$S = \int_1^5 \frac{x+3}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^5 =$$

$$= 1 + 3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 4 - \frac{1}{4} - \frac{6}{4} =$$

$$= 4 - \frac{7}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ (кв.ед)}$$

6)



$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 0$$

находится в I четверти

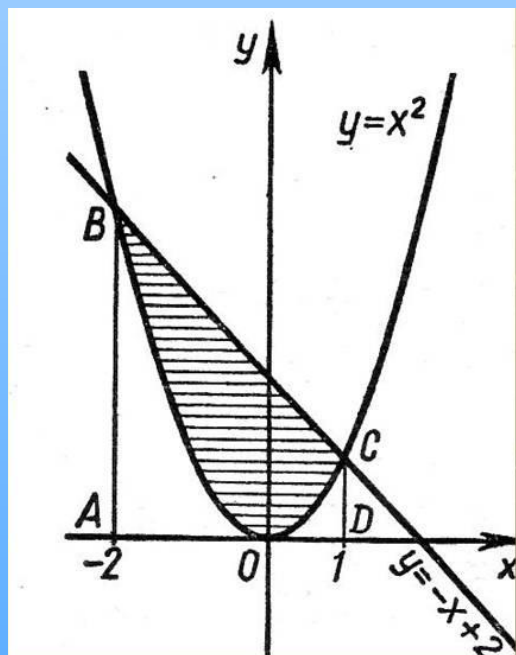
Решение

?

$$S = \int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} + \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6} \text{ (кв.ед)}$$

7)



Решение

?

$$S = \int_{-2}^1 (-x + 2) dx - \int_{-2}^1 x^2 dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} + 6 - 3 = 4\frac{1}{2} \text{ (кв.ед)}$$



Программируемый контроль

ЗАДАНИЕ №1

Задания		Ответы			
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями					
1 Вариант	2 Вариант	1	2	3	4
$y=x^2+2, y=x+2$	$y=-x^2+4, y=-x+4$	7	1/6	2/3	1/3
$y=\sin 2x, y=0, x=0, x=\pi/4$	$y=\cos 2x, y=0, x=-\pi/4, x=\pi/4$	2	-1	1/2	1
$y=-2/x, y=2, x=-4, x=-1$	$y=-1/x, y=1, x=-3, x=-1$	$6-4\ln 2$	$2-\ln 3$	$2\ln 2$	$2-3\ln 2$



Правильные ответы

1 Вариант: 2,3,1

2 Вариант: 2,4,2

ЗАДАНИЕ №2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (схематично изобразив графики функций).

1) $y = 6 + x - x^2$, $y = 6 - 2x$

2) $y = 2x^2$, $y = x + 1$

3) $y = 1 - x$, $y = 3 - 2x - x^2$

4) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

?

Ответ: 1) 4,5 2) 9/8 3) 4,5 4) 1/3

ЗАДАНИЕ №3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями и осью ОХ, если

1) $y = 6 \cdot (x - x^2)$ 2) $y = 7x - x^2 - 10$

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
2. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
3. Дайте определение неопределённого интеграла.
4. Как проверить результат Какое действие называется интегрированием?
5. интегрирования?
6. Дайте определение определённого интеграла.
7. Сформулируйте теорему Ньютона-Лейбница.
8. Перечислите свойства интеграла.
9. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?
10. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.

Домашнее задание

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, предварительно сделав рисунок

1) $y = x^2$ ($x \geq 0$), $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$

2) $y = x^2 - 4x + 8$, $y = 3x^2 - x^3$, если $x \in [-2; 3]$

3) $y = 3x + 1$, $y = 9 - x$

4) $y = -x - 4x^2 + 4$, $y = 10$, $x = -3$, $x = 0$

5) $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$

6) $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$

7) $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$



Подведём итоги

1. Познакомились с понятиями криволинейной трапеции и определённого интеграла.
2. Научились вычислять по формуле Ньютона-Лейбница площадь криволинейной трапеции, используя знания о первообразной и правила её вычисления.
3. Закрепили изученное в ходе выполнения практических заданий.
4. Проверили усвоение изученного материала



Список используемых источников

- 1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник. /М.: Просвещение, 2014г. – 463с.**
- 2. Ткачёва М.В. Алгебра и начала математического анализа. Тематические тесты. 11 класс. (базовый и профильный уровни). /М.: Просвещение, 2010. - 64 с.**
- 3. Федорова Н.Е., Ткачева М.В. Изучение алгебры и начал математического анализа в 11 классе. Книга для учителя. /М.: Просвещение, 2009 - 159 с.**
- 4. Федорова Н.Е., Ткачева М.В. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы. /3-е изд., перераб. - М.: Просвещение, 2017 - 172 с.**
- 5. Шабунин М.И. и др. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс. (Базовый и угл. уровни). /8-е изд. - М.: Просвещение, 2017. - 208с.**

Список использованных источников иллюстраций

1. <https://en.ppt-online.org>
2. <http://900igr.net>
3. <https://myslide.ru>
4. <http://uslide.ru/matematika>

**Видео создано с использованием ресурсов канала
Youtube**

<https://www.youtube.com/watch?v=y1B3mupfIRE>

