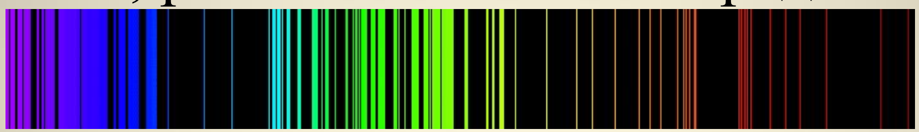
Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Закономерности атомных спектров

Излучение атомов различных элементов состоит из отдельных спектральных линий, расположенных в определенном порядке.



На рисунке представлен спектр железа.

В спектре простейшего атома – водорода длина волны, частота и циклическая частота спектральных линий определяются сериальными формулами:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\lambda}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad \nu = R_{\nu}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad \omega = R_{\omega}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

$R_{\lambda} = 1,097\cdot 10^{7}$ м$^{-1}$, $R_{\nu} = cR_{\lambda} = 3,29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, $R_{\omega} = 2\pi R_{\nu} = 2,07\cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ – постоянные Ридберга,

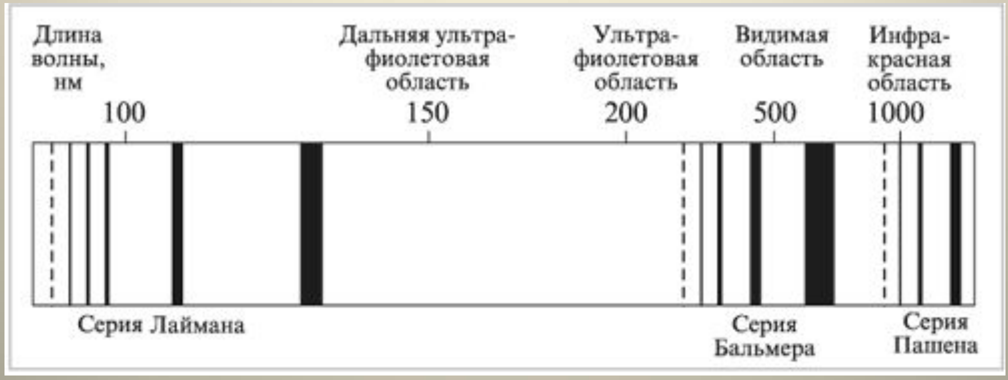
λ, ν, ω – длина волны, частота и циклическая частота спектральных линий в спектре атома водорода, соответственно.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Спектральные линии с одинаковым числом n=1,2,3,… и различными m=n +1, n +2,… образуют спектральную серию, носящую имя исследователя, который обнаружил ее в спектре атома водорода.

Спектральные серии атома водорода.

Значение n	Наименование серии	Значение m
1	Серия Лаймана в ультрафиолетовой области спектра	2,3,4,…
2	Серия Бальмера в видимой области спектра	3,4,5,…
3	Серия Пашена в инфракрасной области спектра	4,5,6,…
4	Серия Брэккета в инфракрасной области спектра	5,6,7,…



Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

При увеличении *m* длина волны уменьшается, а частота линий увеличивается и достигает предельного значения **границы серии** R_ν / n^2 **(при** $m \to \infty$ **).**

Головная линия серии – линия, соответствующая наименьшей частоте (наибольшей длине волны) в серии при переходе с уровня n + 1 на уровень n.

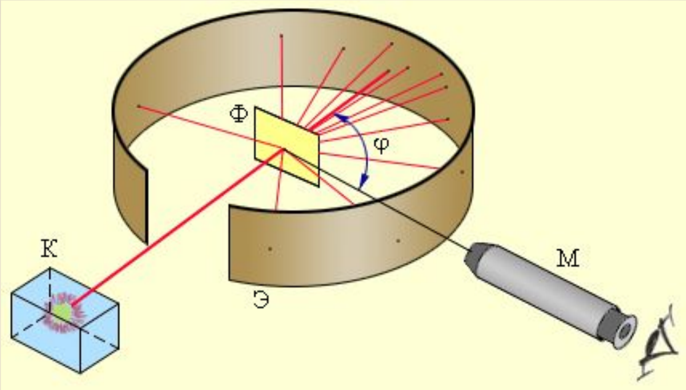
Спектр поглощения атома водорода при нормальных условиях содержит только одну серию – серию Лаймана. Аналогичный вид имеют и спектры **водородоподобных** ионов (атомов других элементов таблицы Менделеева с зарядом ядра *Ze*, у которых удалены все электроны, кроме одного). Это ионы He^+, Li^{++} и Be^{+++}.

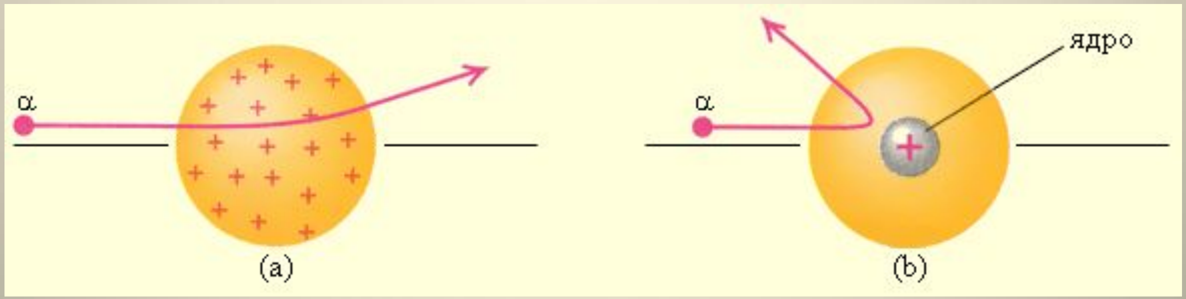
Z = 1 соответствует атому водорода.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Ядерная модель атома.

Опыт Резерфорда по рассеянию а- частиц на золотой фольге





Было установлено, что в атоме (размером $\sim 10^{-10}$м) имеется ядро (размером $\sim 10^{-15}$м), в котором сосредоточена вся масса атома (99,4%) и предложена планетарная модель строения атома.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Вокруг ядра с зарядом Ze (Z–порядковый номер элемента в системе Менделеева, e–заряд электрона) под действием сил электростатического притяжения по круговым (или эллиптическим) орбитам подобно планетам вокруг Солнца движутся электроны, образуя электронную оболочку атома.

Модель несостоятельна: **движение электрона** по круговой орбите **происходит с нормальным ускорением**, поэтому он постоянно излучает электромагнитные волны и теряет свою энергию. В результате через короткое время электрон упадет на ядро и атом перестанет существовать.

Выход из сложившейся ситуации предложил Нильс Бор, который дополнил модель атома Резерфорда двумя постулатами.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Постулаты Бора

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):

В атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) орбиты (состояния), находясь на которых электрон не излучает электромагнитные волны. Из всех возможных орбит электрона разрешенными являются только те, для которых момент импульса электрона кратен величине $\hbar = h/2\pi$, т.е. для которых выполняется условие **(правило квантования):** $L_n = n\hbar$, где n=1,2,3,…

L_n–момент импульса электрона на n - ой орбите, n - главное квантовое число, m – масса электрона, – скорость электрона на n–ой орбите радиусом r_n, $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Для круговых орбит, которые рассматриваются в дальнейшем,

$$L_n = m v_n r_n = n\hbar$$

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Второй постулат Бора (правило частот).
Любое изменение энергии атома связано со скачкообразным переходом из одного стационарного состояния в другое, при этом атом испускает или поглощает фотон, энергия которого определяется выражением $\hbar\omega = h\nu = |E_2 - E_1|$ (правило частот).
Энергия фотона равна модулю разности энергий стационарных состояний электрона до (E_1) и после (E_2) перехода. Переход из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией сопровождается *излучением* фотона. Обратный процесс возможен только при *поглощении* фотона.
Набор возможных дискретных частот $\nu = (E_1 - E_2)/h$ кванто-вых переходов и определяет линейчатый спектр излучения атома водорода, состоящего из отдельных спектральных линий, расположенных в определенном порядке.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Второй закон Ньютона для электрона в водородоподобном ионе

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Вместе с первым постулатом Бора для круговых орбит

$$mv_n r_n = n\hbar$$

получается система из двух уравнений, решая которую, можно найти радиусы орбит электронов и их линейные и угловые скорости.

Радиусы разрешенных круговых орбит в модели Бора для водородоподобного иона:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Zme^2}n^2 = r_1\frac{n^2}{Z}$$

n – номер орбиты, ε_0- электрическая постоянная, *m* - масса электрона, *e* - заряд электрона, $\hbar$ - постоянная Планка.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Состояние атома с $n=1$ называется основным. Радиус первой орбиты электрона при Z=1 (атом водорода) называется боровским радиусом и обозначается a: $r_1 = a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 53$ пм $= 5{,}3\cdot 10^{-11}$ м. Он является единицей длины в атомной физике. Тогда

$$r_n = r_1 \cdot n^2 = a \cdot n^2$$

т.е. радиусы орбит для стационарных состояний атома водорода равны соответственно a, $4a$, $9a$

Скорость электрона на орбите с номером ***n*** в водородоподобном ионе**:**

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{1}{n} = v_1\frac{Z}{n} = 2{,}18\cdot 10^6\frac{Z}{n}\ \text{м/с}$$

где 2180 км/с – скорость электрона на первой орбите в атоме водорода.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Угловая скорость электрона на орбите с номером *n*:

$$\omega_n = \frac{Z^2 m e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3} = \omega_1 \frac{Z^2}{n^3},$$

ω_1 – угловая скорость электрона на первой орбите.

Полная энергия электрона на орбите с номером *n* в водородоподобном ионе складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии в электростатическом поле ядра:

$$T = \frac{m v_n^2}{2} = \frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{m e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{Z^2}{n^2} = \frac{1}{2}\left|E_{\text{пот}}\right|,$$

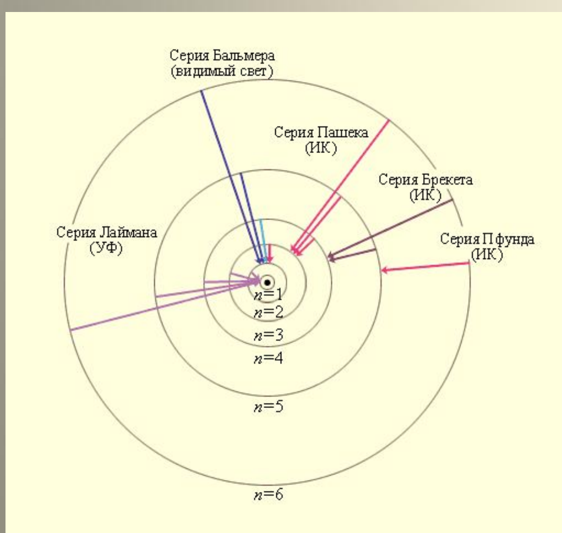
$$E_{\text{пот}} = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\text{n}}} = -\frac{m e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{Z^2}{n^2}.$$

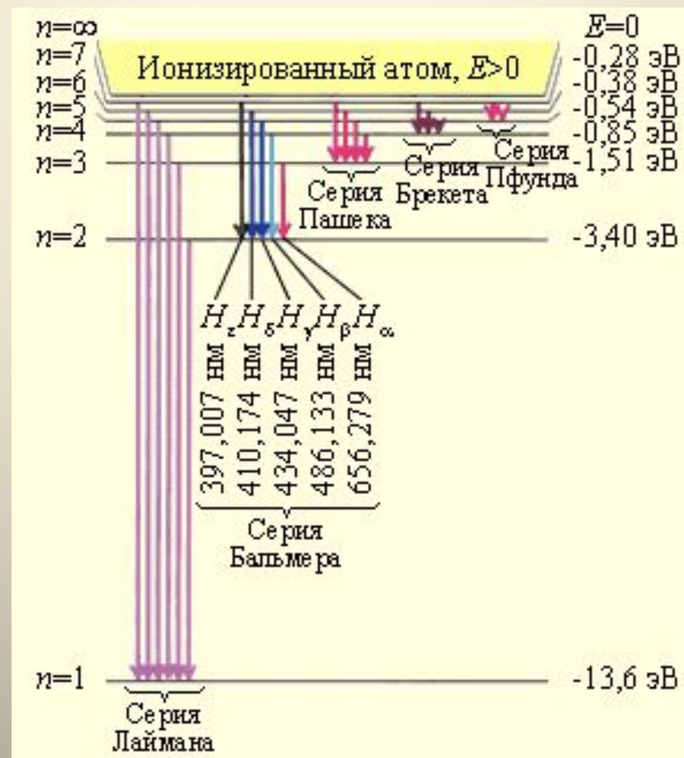
$Z = 1$ соответствует атому водорода. Полная энергия электрона равна

$$E = T + E_{\text{пот}} = -\frac{m e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{Z^2}{n^2}.$$

5. Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Состояние с номером *n*=1 и энергией $E_1 = -13{,}6$ эВ, называется **основным**, остальные значения соответствуют возбужденным состояниям. Энергетические уровни атома водорода представлены на схемах





Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Полная энергия электрона отрицательна и соответствует ограниченному движению электрона в пространстве по стационарной орбите. Переходы электрона с одной орбиты (энергетического уровня) на другую приводят к образованию спектральных серий Лаймана, Бальмера, Пашена. При увеличении номера орбиты *n* энергия электрона возрастает и при $n \to \infty$ становится равной нулю. Если энергия электрона $E \geq 0$, то его движение является неограниченным - он оторвался от ядра атома водорода и произошла ионизация атома. Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома (водородоподобного иона) - **энергия ионизации** E_i:

$$E_i = \frac{Z^2 m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = 2{,}16 \cdot 10^{-18}$$

Энергия возбуждения – минимальная энергия, которую необходимо сообщить атому водорода (водородоподобному иону), чтобы электрон из основного состояния перешел в возбужденное.

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Энергия связи данного состояния – энергия, необходимая для удаления электрона из атома (водородоподобного иона), находящегося в данном возбужденном состоянии.

Потенциал ионизации - ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для ионизации атома (водородоподобного иона):

Энергия ионизации, выраженная в электрон-вольтах, численно равна потенциалу ионизации.

$$U_i = \frac{E_i}{e} = 13,6Z^2$$

Первый потенциал возбуждения U_1 - наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом водорода (водородоподобным ионом) перевести его в первое возбужденное состояние:

$n=1$, $m=2$

$U_1 = \frac{3}{4}Z^2 U_i = 10,2Z^2$ В. Для атома водорода ($Z=1$) $U_1=10,2$В

$$eU_1 = 2\pi\hbar c Z^2 R_\lambda \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4} 2\pi\hbar c Z^2 R_\lambda = \frac{3}{4} Z^2 E_i,$$

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Вывод формулы Бальмера в теории Бора

Рассматривая первый постулат Бора для перехода водородоподобного иона с орбиты под номером *m* на орбиту с номером *n* для энергии излучаемого фотона $E_{ф} = E_m - E_n$, получим:

$$E_{ф} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{Z^2 m e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

откуда $\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_{\lambda}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{Z^2 m e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2 c\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$ где $R_{\lambda} = \frac{Z^2 m e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2 c\hbar^3}$

Волны де Бройля.

Волны де Бройля

Двойственная природа света

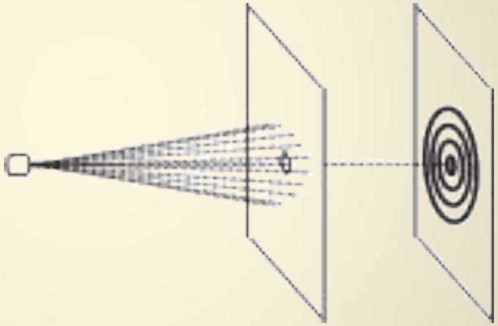
Волновые свойства света - в явлениях интерференции, дифракции, дисперсии.

Поток фотонов - в фотоэффекте, эффекте Комптона и др.

Нобелевский лауреат 1927 г. герцог Луи де Бройль (1892-1987) предположил, что такой дуализм присущ всем микрочастицам – электронам, протонам, атомам. Наряду с корпускулярными, они обладают и волновыми свойствами.

Волны де Бройля.

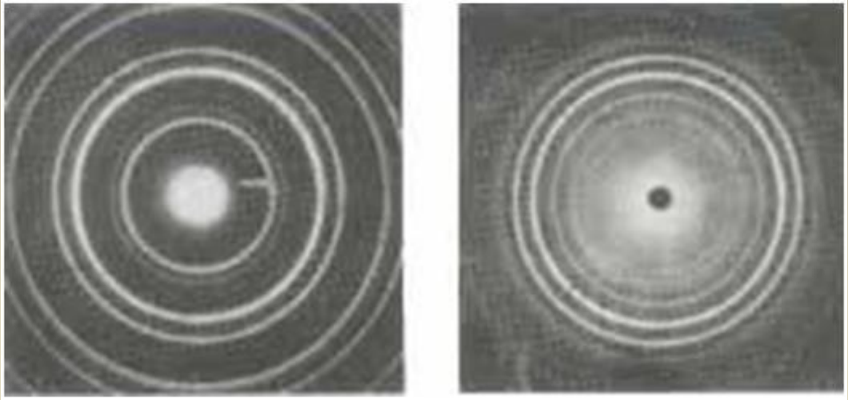
Волновые свойства электрона были впервые обнаружены в 1927 году. Наиболее наглядными явились опыты Дж.П.Томсона по рассеянию электронов на золотой фольге, схема которых изображена на рисунке



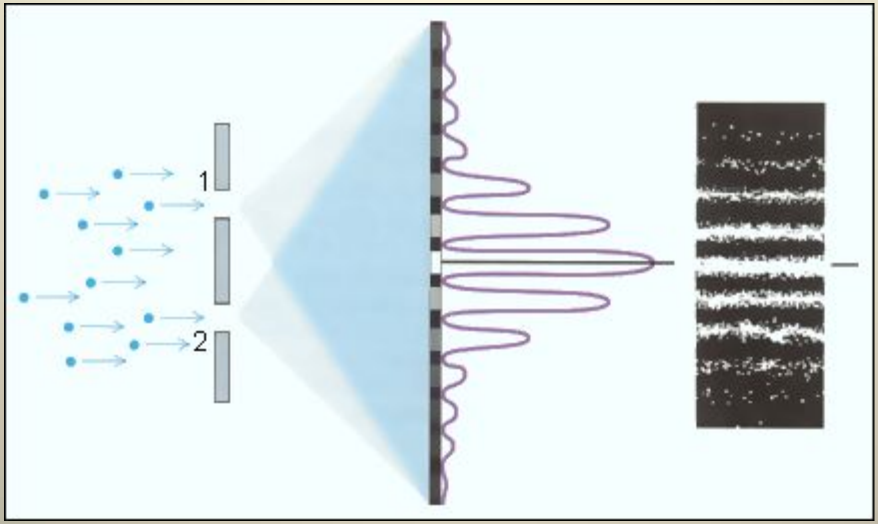
Опыты Дж.П.Томсона по рассеянию электронов

Волны, связанные со свободно движущимися частицами - волны де Бройля.

Волны де Бройля.



Дифракционная картина от пучка электронов на золотой фольге (слева) и рентгеновских лучей на оксиде циркония (справа)



Дифракция электронов на двух щелях

Волны де Бройля.

Для определения длины волны, частоты и циклической частоты микрочастицы де Бройль использовал соответствующие соотношения для энергии и импульса фотона:

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \quad \text{и} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, а $\vec{k}$ –волновой вектор, $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\vec{n}$ – $\vec{n}$ единичный вектор в направлении распространения волны); $\hbar$ – постоянная Планка. Длина волны де Бройля определяется выражением

$$\lambda_Б = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}$$

как для релятивистских, так и для нерелятивистских частиц с импульсом . В релятивистском случае, выразив импульс частицы p через ее полную энергию с помощью соотношения $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, найдем, что

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}$$

Волны де Бройля.

Воспользовавшись соотношением для кинетической энергии $E_{кин} = E^2 - mc^2$, получим формулу: $\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_{кин}(E_{кин} + 2mc^2)}}$, выражающую дебройлевскую длину волны частицы через ее кинетическую энергию. В предельном случае нерелятивистской частицы, когда отношение $\frac{T}{mc^2} << 1$, получаем выражение для дебройлевской длины волны в нерелятивистском приближении: $\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$.

Зависимость длины волны де Бройля заряженной частицы, прошедшей ускоряющую разность потенциалов U, имеет вид: $\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2qmU}}$, где *m* –масса частицы; *q* –заряд частицы.

Первый постулат Бора можно объяснить, используя волны де Бройля. $mv_n r_n = n\hbar$, поэтому $r_n = n\frac{h}{2\pi m v_n}$, $2\pi r_n = n\lambda$. Это соотношение показывает, что стационарными являются лишь те орбиты, на которых укладывается целое число волн де Бройля.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Поскольку микрочастица является волной, определить траекторию ее движения, т.е. одновременно задать ее положение и импульс, не представляется возможным. Неопределенность движения микрочастицы ограничивается соотношениями:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Здесь $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – неопределенности координат *x,y,z*, $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ неопределенности проекций импульса частицы на координатные оси; $\hbar$ –постоянная Планка. Эти соотношения носят название соотношений неопределенностей Гейзенберга.

Таким образом, произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка

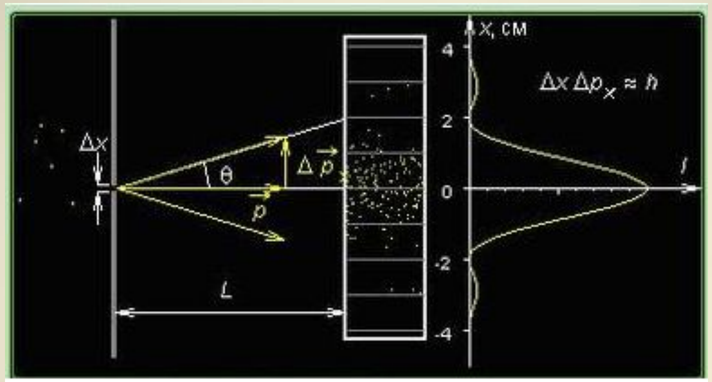
Соотношения неопределенностей Гейзенберга

Вернер Гейзенберг, 1933 год
1901-1976

Научная сфера:	один из создателей квантовой механики Нобелевская премия по физикеНобелевская премия по физике (1932)
Альма-матер:	Мюнхенский университет
Научный руководитель:	Арнольд Зоммерфельд
Известные ученики:	Карл фон Вайцзеккер Эдвард Теллер Феликс Блох Рудольф Пайерлс

Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Соотношение неопределенностей можно «получить», рассматривая дифракцию электронов на щели



Более 85 % всех электронов, прошедших через щель, попадут в центральный дифракционный максимум. Угловая полуширина θ этого максимума находится из условия $\Delta x \sin\theta = \lambda$. Можно считать, что при пролете через щель электрон приобретает дополнительный импульс в перпендикулярном направлении. Пренебрегая 15 % электронов, которые попадают на фотопластинку за пределами центрального максимума, можно считать

$$\Delta p_x = p\sin\theta = p\frac{\lambda}{\Delta x} = p\frac{2\pi\hbar}{p\Delta x}, \text{ откуда } \quad \Delta x\,\Delta p_x = 2\pi\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Следовательно, чем меньше неопределенность одной из величин (x, y, z или p_x, p_y, p_z), тем больше неопределенность другой. Эти соотношения ограничивают точность **одновременного** измерения координат и соответствующих проекций импульса частицы.

Если точнее измерить координату микрочастицы *x*, т.е. уменьшать неопределенность Δx, то поскольку процесс измерения обязательно сопровождается неконтролируемым воздействием на микрочастицу со стороны «измерительного прибора», это воздействие увеличивает неопределенность p_x проекции импульса: $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$. Таким образом, чем точнее определена координата *x* ($\Delta x \to 0$), тем менее точно определена проекция p_x ($\Delta p_x \to \infty$), и наоборот.

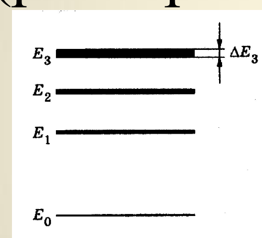
7. Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

В квантовой механике существует также соотношение неопределенностей для энергии и времени: $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$, где ΔE – неопределенность энергии некоторого состояния системы; Δt - промежуток времени, в течение которого оно существует (измеряется).

Это означает, что чем короче время существования какого-либо состояния системы, тем больше неопределенность значения энергии этого состояния. Энергетические уровни (дискретные значения энергии) E_1, E_2, E_3 и т.д. имеют некоторую ширину, зависящую от среднего времени пребывания системы в состояниях, соответствующих этим уровням энергии. «Размытость» уровней приводит к неопределенности энергии излучаемого фотона (ΔE) и его частоты ($\Delta\nu$) при переходе системы с одного энергетического уровня на другой: $\Delta E = \Delta(h\nu) = h\Delta\nu = \Delta(\hbar\omega) = \hbar\Delta\omega$. Это проявляется в естественной ширине наблюдаемых спектральных линий.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

В расчетах вместо точной формулировки используют приближен-ный вариант записи: $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar$ и $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$, что позволяет полу-чать оценки по порядку величины. Для оценок наименьших возможных значений физических величин (например, энергии) обычно полагают, что $\Delta x \sim L$ (размер системы) и $\Delta p_x \sim p_x$.



Естественная ширина энергетических уровней

Невозможность одновременно точного определения координаты и соответствующей составляющей импульса не связана с несовершен-ством методов измерения или измерительных приборов, а является следствием двойственной корпускулярно–волновой природы микро-частиц. Для описания этих свойств частиц потребовалось создание квантовой механики, поскольку в рамках классической физики это оказалось невозможным.

Примеры решения задач

Задача 1. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оцените минимальные линейные размеры атома.

Решение. Если атом имеет линейные размеры $\square$, то электрон атома будет находиться в пределах области с неопределенностью $\Delta x \sim \square$ и соотношение неопределенности примет вид: $\square \cdot \Delta p_x \sim \square$, откуда

$$\Delta p_x \sim \frac{\square}{\square}.$$

Неопределенность импульса Δp_x равна по порядку величины самому импульсу p, то есть $p \sim \Delta p_x \sim \frac{\square}{\square}$. Отсюда $\square \sim \frac{\square}{p} = \frac{\square}{\sqrt{2mE_{\text{кин}}}} \sim 10^{-10}$ м.

где $E_{\text{кин}}$ - кинетическая энергия электрона.

Примеры решения задач

Задача 2. Электрон с кинетической энергией 4 эВ локализован в области размером 1 мкм. Оцените с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости $(\Delta v/v)$.

Решение. Неопределенность координаты электрона будем считать равной размерам области локализации электрона: $\Delta r \sim \ell$, а неопределенность его импульса $\Delta p = m\Delta v$. Тогда, исходя из соотношения неопределенностей для координаты и импульса частицы $\Delta r \Delta p \sim \hbar$, получим для неопределенности модуля скорости электрона $\Delta v \sim \hbar/ml$, где m - масса электрона. По условию задачи $T << mc^2$, откуда $v = \sqrt{2T/m}$. Для относительной неопределенности модуля скорости электрона получаем оценку $\Delta v/v \sim \hbar/l\sqrt{2mT} \approx 10^{-4}$.

Примеры решения задач

Задача 3. Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимальную энергию электрона в атоме водорода и его эффективное расстояние от ядра.

Решение. Запишем энергию электрона в атоме водорода как сумму его кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

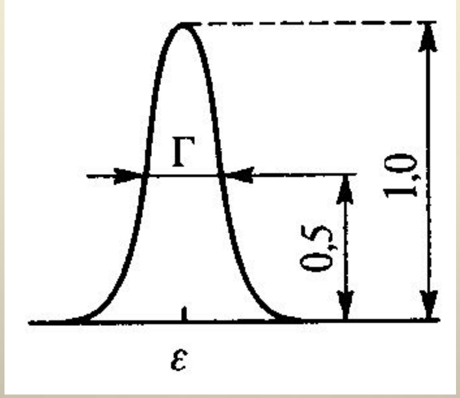
где *m, e* - масса и заряд электрона, соответственно, *r* - его расстояние от ядра, ε_0 - электрическая постоянная. Предположим, что неопределенность проекции импульса электрона на некоторую ось (например, на ось *x*) равняется по порядку величины модулю самого импульса электрона *p*, то есть $\Delta p_x \sim p$, а неопределенность соответствующей координаты Δx по порядку величины равняется *r*, тогда с помощью соотношения неопределенностей для координаты и импульса частицы ($\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar$) получим оценку $p \sim \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \frac{\hbar}{r}$, и формула для энергии примет вид $E \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Дифференцируя это выражение по радиусу и приравнивая производную к нулю,

находим: $r_{\text{eff}} \sim \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м, $E_{\min} \sim -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = -13,6$ эВ.

Примеры решения задач

Задача 4. Используя соотношение неопределенности энергии и времени, найдите естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 10^{-8} с, а длина волны излучения - 600 нм.

Решение. При переходе атомов из возбужденного состояния в основное существует некоторая неопределенность в энергии испускаемых фотонов, т.к. энергия возбужденного состояния определена неточно, и имеет конечную ширину Г. В соответствии с соотношением неопределенности для энергии и времени, $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$



Конечная ширина энергетического уровня

Примеры решения задач

Ширина Γ энергетического уровня возбужденного состояния связана со средним временем жизни атома в этом состоянии соотношением $\Gamma \cdot \tau \sim \hbar$.

Вследствие конечной ширины уровня энергии возбужденного состояния энергия фотонов, испускаемых атомами, также имеет разброс, равный ширине энергетического уровня $\Delta E \sim \Gamma \sim \dfrac{\hbar}{\tau}$.

Поскольку энергия фотона связана с длиной волны соотношением

$$E_{\text{ф}} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda},$$

то разбросу ΔE $\left(\Delta E << E_{\text{ф}}\right)$ энергии соответствует разброс $\Delta\lambda$ длин волн $:\left(\Delta\lambda << \lambda\right)$

$$\left|\Delta E\right| = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

Входящий в это выражение конечный интервал длин волн и есть естественная ширина спектральной линии $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2\pi c\tau} = 2\cdot 10^{-14}$ м.

Относительная неопределенность длины волны равна $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \dfrac{\lambda}{2\pi c\tau} \sim 10^{-7}$.