



**БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**



УНИВЕРСИТЕТ



кафедра информационно- телекоммуникационных систем и технологий

**Дисциплина Анализ информационной безопасности
телекоммуникационных систем**

**Тема 2 Методы помехоустойчивого приема дискретных
сообщений**

**СОХРАНИМ ЛУЧШЕЕ!
ПРИУМНОЖИМ ДОСТИГНУТОЕ!
СДЕЛАЕМ ЭТО ВМЕСТЕ!**



**профессор
Белов Сергей Павлович**

Основной целью настоящей темы является изучение особенностей обработки передаваемых сигналов в приемном устройстве при обеспечении условий, позволяющих извлечь из поступающего на его вход сигнала возможно большее количество необходимой информации. В связи с этим рассматривается задача выбора оптимального способа обработки сигналов и выработки при этом соответствующих критериев. Данная задача составляет содержание теории статистических решений. Особое внимание уделено рассмотрению существующих критериев, используемых при решении задачи оптимального различения двух сигналов на фоне помех типа белого шума. Оценивается помехоустойчивость оптимального когерентного и некогерентного приема двоичных сигналов с различными видами модуляции и рассматриваются структурные схемы оптимальных приемников при использовании каналов телекоммуникационных систем с различными видами помех, включая интерференционные.

Лекция №1 Общие сведения об оптимальном приеме сообщений

ВОПРОСЫ

1. Сущность основной задачи приема сигналов при наличии помех.
2. Критерии качества приема сигналов.

ЦЕЛЬЮ лекции является изучение общих сведений об оптимальном приеме сообщений.

Задачи лекции: изложение особенностей решения задачи приема сигналов при наличии помех.

Литература:

- 1 Белов, С.П., Жилияков, Е.Г. Анализ информационной безопасности телекоммуникационных систем: Учебно-методический комплекс. : <http://pegas.bsu.edu.ru/course/view.php?id=8360>
Белгород, 2015 год.
- 2 Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение СПб, Киев, 2003 год.

Вопрос 1 Сущность основной задачи приема сигналов при наличии помех.

Результатом воздействия помех является частичная или полная потеря информации, переносимой полезным сигналом. Приемное устройство, осуществляя обработку входного сигнала, являющегося суммой полезного сигнала и помехи, должно обеспечить извлечение из принятого сигнала возможно большего количества необходимой информации.

Основная задача приемника состоит в том, чтобы на основании принятой реализации решить наилучшим в каком-то определенном смысле способом, имеется ли данный сигнал в данной реализации (задача обнаружения или различения), или каковы параметры полезного сигнала (задача восстановления.) В связи с этим должны быть выработаны критерии, позволяющие по принятому сигналу оптимальным способом решить поставленную задачу.

Задача выбора оптимального способа обработки сигналов и выработки при этом соответствующих критериев составляет содержание теории статистических решений. Некоторые положения этой теории приводятся ниже. С целью наглядного представления положений теории статистических решений введены геометрические понятия пространства принимаемого сигнала (пространства наблюдений).

Пусть отсчеты принимаемого сигнала, являющегося суммой полезного сигнала и помехи, осуществляются в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . Отсчетные значения принятого сигнала y_1, y_2, \dots, y_n называют выборочными значениями, а их совокупность — выборкой. Число n выборочных значений называют размером или объемом выборки.

Вопрос1 Сущность основной задачи приема сигналов при наличии помех

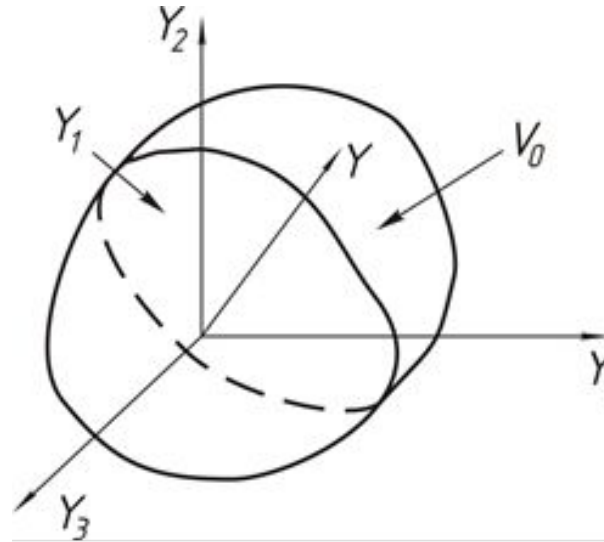


Рисунок 1 Трехмерное пространство

Совокупность выборочных значений представляют геометрически в виде радиус-вектора Y в n -мерном пространстве, где y_1, y_2, \dots, y_n — координаты конца вектора. Так как величины y_1, y_2, \dots, y_n случайны, то вектор Y также является случайным вектором. Множество возможных значений вектора Y составляет пространство наблюдений V . На рисунке 1 показан случай трехмерного пространства ($n = 3$). Общая вероятность попадания конца вектора Y в произвольную точку пространства

$$\int_V w(y) \cdot dy = 1 \quad (1)$$

По аналогии вводят понятия вектора полезного сигнала и вектора помех и соответственно им понятие пространства полезного сигнала и пространства помех

Вопрос1 Сущность основной задачи приема сигналов при наличии помех

После нахождения вектора принятого сигнала Y мы не можем однозначно судить о векторе полезного сигнала X . Речь может идти только об апостериорной плотности вероятности $w(X/Y) = w(x_1, x_2 \dots x_n / y_1, y_2 \dots y_n)$, т. е. условной плотности вероятности X , если задан вектор Y .

Вычисление апостериорной плотности вероятности можно выполнить с помощью формулы Байеса

$$w(X/Y) = w(X) \cdot w(Y/X) / w(Y) \quad (2)$$

где $w(X)$ — априорная плотность вероятности вектора X ;
 $w(Y)$ — безусловная плотность вероятности вектора Y ;
 $w(Y/X)$ — условная плотность вероятности Y , если задан X .

Безусловная плотность вероятности $w(Y)$ определяется соотношением

$$w(Y) = \int_{V_x} w(X) \cdot w(Y/X) \cdot dX, \quad (3)$$

где V_x обозначает, что интегрирование осуществляется в пространстве сигнала X .

Подставляя значение $w(Y)$ из (3) в (2), получим

$$w(X/Y) = [w(X) \cdot w(Y/X)] / \int_{V_x} w(X) \cdot w(Y/X) \cdot dX \quad (4)$$

Вопрос1 Сущность основной задачи приема сигналов при наличии помех

Если вектор X может иметь конечное число возможных значений x_1, x_2, \dots, x_r с априорными вероятностями $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_r)$, то формула (4) принимает вид:

$$p(X/Y) = [p(X) \cdot w(Y/X)] / w(Y) = p(X) \cdot w(Y/X) / \sum_{j=1}^r p(x_j) \cdot w(Y/x_j) \quad (5)$$

где $p(X/Y)$ — апостериорная вероятность вектора X , если задан вектор Y ;
 $p(X)$ — априорная вероятность вектора X .

Следовательно, для нахождения искомой апостериорной вероятности (или плотности вероятности) необходимо знать $P(X)$ или $w(X)$, т. е. априорные характеристики полезного сигнала, и $w(Y/X)$, определяемые априорными характеристиками полезного сигнала и помехи, а также характером их композиции.

Для определения апостериорных вероятностей $p(X/Y)$ или плотностей вероятностей $w(X/Y)$ необходимо знать $w(Y/X)$, которая при заданном значении Y будет зависеть только от X :

$$w(Y/X) = L(X) \quad (6)$$

Функция $L(X)$ называется функцией правдоподобия. В зависимости от того, является ли X дискретной или непрерывной величиной, функция правдоподобия $L(X)$ может принимать конечное или бесконечное множество значений.

Вопрос 2 Критерии качества приема сигналов.

Рассмотрим основные критерии, используемые при решении задачи оптимального приема на примере обнаружения сигналов. Заметим, что задача различения двух сигналов (характерная для систем передачи цифровой информации, дискретных систем телеуправления и т.п.) мало чем отличается от случая обнаружения в принципиальном отношении.

Задача обнаружения, как отмечалось, состоит в том, чтобы в результате обработки принятого сигнала Y установить, содержится ли в нем полезный сигнал X или нет.

Пусть принимаемый сигнал является суммой полезного сигнала и помехи

$$Y(t) = x(t) + \zeta(t)$$

Полезный сигнал может принимать два значения: x_1 и x_0 с априорными соответственно вероятностями $p(x_1)$ и $p(x_0)$. Так как сигнал X наверняка имеет одно из этих двух значений, то справедливо соотношение

$$p(x_1) + p(x_0) = 1. \tag{7}$$

Таким образом, возможны две взаимно исключающие альтернативные гипотезы: в принятом сигнале содержится полезный сигнал (гипотеза H_1) и отсутствует полезный сигнал (гипотеза H_0). Для дискретных систем передачи двух сигналов гипотезы звучали бы следующим образом: в принятом сигнале содержится сигнал x_1 (гипотеза H_1) или сигнал x_0 (гипотеза H_0).

Вопрос 2 Критерии качества приема сигналов.

Как видите, ранее сделанное замечание об отсутствии принципиальных различий между задачами обнаружения и различия двух сигналов справедливо. Решающее устройство приемника по данным выборки должно установить, какая из этих гипотез является истинной.

В геометрической интерпретации составленная задача может быть сформулирована следующим образом. Пространство принятых сигналов V условно разбивается на две части (рисунок 1): область V_1 , соответствующую принятию гипотезы H_1 о том, что $X = x_1$ и область V_0 , соответствующую принятию гипотезы H_0 о том, что $X = x_0$. Это значит, что если вектор принятого сигнала окажется в пределах области V_1 , то принимается гипотеза H_1 . Если же вектор сигнала Y окажется в области V_0 , то принимается гипотеза H_0 .

В этих условиях могут иметь место два значения апостериорной вероятности $p(X/Y)$: $p(X_1/Y)$ — условная вероятность наличия полезного сигнала X при данном значении выборки Y , $p(X_0/Y)$ — условная вероятность отсутствия X при данном значении выборки Y . Аналогично можно рассматривать два значения функции правдоподобия $L(X)$: $L(x_1) = w(Y/x_1)$ — условная плотность вероятности выборки Y при наличии полезного сигнала X ; $L(x_0) = w(Y/x_0)$ — условная плотность вероятности выборки Y при отсутствии X .

Отношение функций правдоподобия: $\lambda = L(x_1)/L(x_0) = w(Y/x_1)/w(Y/x_0)$ принято называть отношением правдоподобия.

Вопрос 2 Критерии качества приема сигналов.

Для выбора гипотезы H_1 или H_0 должно быть взято за основу определенное правило принятия решений.

Выбор правила принятия решения в математическом отношении сводится к оптимальному разбиению пространства принимаемых сигналов V на области V_1 и V_0 .

Для того чтобы выбрать то или иное правило принятия решения, необходимо руководствоваться определенными критериями.

2.1 Критерий максимума правдоподобия

Этот критерий формулируется следующим образом: наиболее правдоподобно то значение параметра X , для которого функция правдоподобия $L(X)$ максимальна.

В соответствии с этим критерием в случае двухальтернативной ситуации обнаружения сигнала сравниваются два значения функции правдоподобия — $L(x_1)$ и $L(x_0)$ и принимается та гипотеза, которой соответствует большее значение функции правдоподобия. Если, например, $L(x_1) > L(x_0)$, то принимается гипотеза H_1 . Если же $L(x_1) \leq L(x_0)$, то принимается гипотеза H_0 .

Этот критерий можно записать в следующем виде через отношение правдоподобия:

если $\lambda = L(x_1) / L(x_0) > 1$, то $x = x_1$; (8)

при $\lambda = L(x_1) / L(x_0) \leq 1$, то $x = x_0$.

Вопрос 2 Критерии качества приема сигналов.

Таким образом, в соответствии с данным критерием методика принятия решения сводится к следующему: вычисляются функции правдоподобия $L(x_1)$ и $L(x_0)$, определяется отношение правдоподобия λ и в зависимости от того, больше, равно или меньше λ единицы, принимается соответствующая гипотеза.

Практическое достоинство данного критерия заключается в том, что при его применении не требуется знания априорных вероятностей $p(x_1)$ и $p(x_0)$ сигнала X .

2.2 Критерий максимума апостериорной вероятности

По этому критерию при полученном значении выборки Y принимается та гипотеза, при которой апостериорная вероятность $p(X/Y)$ максимальна.

Для случая двухальтернативной ситуации сравниваются два значения апостериорной вероятности: $p(x_1/Y)$ и $p(x_0/Y)$. Рассматривается отношение этих величин и правило принятия решения записывается в виде:

если
$$p(x_1/Y) / p(x_0/Y) > 1, \quad \text{то } x = x_1;$$
 (9)

если
$$p(x_1/Y) / p(x_0/Y) \leq 1, \quad \text{то } x = x_0.$$

Используя формулу Байеса (2), выразим отношение апостериорных вероятностей через отношение функций правдоподобия

$$p(x_1/Y) / p(x_0/Y) = [p(x_1) \cdot L(x_1)] / [p(x_0) \cdot L(x_0)] = [p(x_1) / p(x_0)] \cdot \lambda \quad (10)$$

Вопрос 2 Критерии качества приема сигналов

Тогда критерий максимума апостериорной вероятности (9) может быть следующим образом выражен через отношение правдоподобия:

если $[p(x_1) / p(x_0)] \cdot \lambda > 1$, то $x = x_1$;
(11)

если $[p(x_1) / p(x_0)] \cdot \lambda \leq 1$, то $x = x_0$.

Соотношения (11) можно представить в виде:

если $\lambda > p(x_0) / p(x_1)$, то $x = x_1$;

если $\lambda \leq p(x_0) / p(x_1)$, то $x = x_0$;

где λ_0 — пороговое значение отношения правдоподобия.

Таким образом, процедура принятия решения согласно критерию максимума апостериорной вероятности такая же, как и согласно критерию максимума правдоподобия. Отличие заключается лишь в том, что в первом случае отношение правдоподобия сравнивается с единицей, а во втором случае — с отношением априорных вероятностей $p(x_0)/p(x_1)$. При наличии априорных данных $p(x_1)$ и $p(x_0)$ целесообразно применять критерий максимума апостериорной вероятности, так как при этом имеется возможность пользоваться дополнительной информацией, позволяющей точнее решить задачу обнаружения сигнала. Следует отметить, что критерий максимума правдоподобия является оптимальным с информационной точки зрения.

ВОПРОС 2 Критерии качества приема сигналов

2.3 Критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова)

Согласно данному критерию принимается та гипотеза, при которой обеспечивается минимум общей ошибки принятия решения.

При решении задачи обнаружения сигнала могут иметь место ошибки двух родов:

1) при отсутствии полезного сигнала вектор принятого сигнала Y оказывается в области V_1 и принимается в соответствии с этой гипотеза H_1 ,

2) при наличии полезного сигнала вектор Y оказывается в области V_0 и принимается гипотеза H_0 .

Первая ошибка называется ошибкой первого рода, или «ложной тревогой». Вторая ошибка называется ошибкой второго рода, или «пропуском сигнала». Количественно ошибки первого и второго родов оцениваются условными вероятностями α и β ошибочных решений о наличии полезного сигнала, когда в действительности он отсутствует, и об отсутствии сигнала, когда в действительности он имеется:

$$\alpha = P(Y \in V_1 / x_0) = \int w(Y / x_0) dY;$$

$$\beta = P(Y \in V_0 / x_1) = \int_{V_0} w(Y / x_1) dY;$$

Общая безусловная вероятность ошибочного решения определяется выражением

$$P_{ош} = p(x_0) \cdot \alpha + p(x_1) \cdot \beta \quad (13)$$

ВОПРОС 2 Критерии качества приема сигналов

Критерий идеального наблюдателя минимизирует общую ошибку, определяемую выражением (13).

Следовательно, условие оптимального решения по критерию идеального наблюдателя имеет вид

$$P_{ош} = p(x_0) \cdot \alpha + p(x_1) \cdot \beta = \min. \quad (14)$$

Подставим в (13) из (12) значения ошибок первого и второго родов после ряда преобразований получим:

если $w(Y / x_1) / w(Y / x_0) = \lambda > p(x_0) / p(x_1) = \lambda_0$, то $x = x_1$; то $x = x_1$;

если $w(Y / x_1) / w(Y / x_0) = \lambda \leq p(x_0) / p(x_1) = \lambda_0$, то $x = x_0$. то $x = x_0$.

Таким образом, правила решения, соответствующие критериям идеального наблюдателя и максимума апостериорной вероятности совпадают. Отличие заключается лишь в исходных условиях.

2.4 Критерий Неймана — Пирсона

Данный критерий основан на том, что ошибки первого и второго родов не одинаково опасны, причем ошибка первого рода приводит к таким последствиям, что ее вероятность необходимо ограничить некоторой очень малой величиной. Вторую ошибку желательно при этом обеспечить минимальной.

ВОПРОС 2 Критерии качества приема сигналов

Исходя из этого, критерий Неймана — Пирсона можно сформулировать следующим образом: наилучшим решением является такое, при котором обеспечивается наименьшая вероятность ошибки второго рода при заданной допустимой вероятности ошибки первого рода.

Итак, согласно критерию Неймана — Пирсона должно быть обеспечено

$$\beta = \int_{V_0} w(Y / x_1) dY = \min$$

$$\alpha = \int_{V_0} w(Y / x_0) dY = \varepsilon$$

где ε — наперед заданная величина.

Не вдаваясь в детали, связанные с промежуточными выкладками, окончательное правило принятия решения согласно критерию Неймана-Пирсона может быть записано в виде:

если $w(Y / x_1) / w(Y / x_0) = \lambda > \lambda_0$, то $x = x_1$;
если $w(Y / x_1) / w(Y / x_0) = \lambda \leq \lambda_0$, то $x = x_0$,

где пороговое значение λ_0 определяется из равенства

$$\alpha = \int_{\lambda_0}^{\infty} w(\lambda / x_0) d\lambda = \varepsilon$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под пространством наблюдения, пространством полезного сигнала и пространством помехи?
2. Что понимается под выборкой и объемом выборки?
3. Что такое функция правдоподобия и отношение правдоподобия?
4. Что такое ошибки первого и второго родов и как они количественно оцениваются?
5. Как количественно оценивается полная ошибка принятия решения?
6. Как зависят ошибки первого и второго родов от порогового уровня?
7. В чем состоит сущность задачи обнаружения сигнала?
8. В чем заключается сущность критерия максимума правдоподобия и каковы его достоинства?
9. В чем заключается сущность критерия максимума апостериорной вероятности и каковы его преимущества перед критерием максимума правдоподобия?
10. В чем заключается сущность критерия идеального наблюдателя?
11. В чем заключается отличие критерия идеального наблюдателя от критерия максимума апостериорной вероятности; что общего у этих критериев?
12. В чем заключается сущность критерия Неймана—Пирсона и в каких случаях целесообразно этот критерий применять?
13. Что понимается под риском?
14. В чем заключается сущность критерия минимального риска?
15. В чем заключается сущность минимаксного критерия?