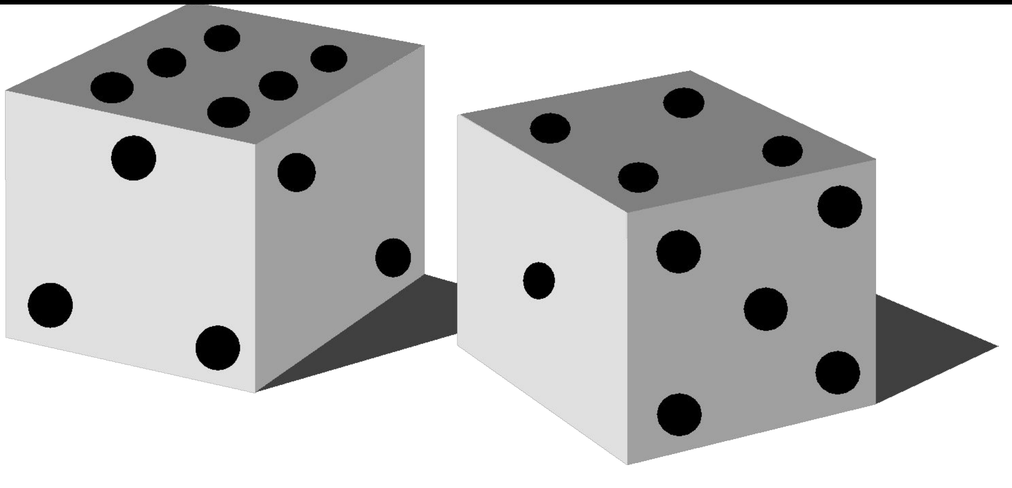
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА



Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ, випадові явища, випадкові величини, їх властивості та операції над ними

Математична статистика – математична наука, що розробляє математичні методи систематизації та використання статистичних даних для наукових і практични висновків

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Випадковою подією (просто подією) називається будь-який факт, який в результаті випробування може відбутися чи не відбутися

Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, …

ПРИКЛАДИ

1) A {випала парна кількість очок};
2) B {випала кількість очок, кратна 3};
3) C {випало більше 4 очок}

Під випробуванням (експериментом) мається на увазі виконання певного комплексу умов, в яких спостерігається те або інше явище, фіксується той чи інший результат

ПРИКЛАДИ

1) підкидання грального кубика;
2) складання екзамену;
3) постріл із гвинтівки;
4) хімічний експеримент і тд.

ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Серед усіх можливих подій, які, по волі випадку, в результаті досліду відбуваються, або не відбуваються, виділяють елементарні результати (елементарні події)

Елементарні результати – це події, що мають наступні властивості:

1) вони є взаємовиключними, в результаті випробування відбувається лише одна з них;

2) для будь-якої події (можливої в результаті досліду), по насталій елементарній події, можна визначити відбулась вона чи ні;

Елементарні події позначають ω *або* ω_i

Сукупність всіх елементарних подій називають простором елементарних подій

Простір елементарних подій позначають $\Omega = \{\omega\}$

Будь-яку підмножину множини Ω називають подією

Подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається одна з елементарних подій, що входять в A

ТИПИ ПОДІЙ

Вірогідна	**Випадкова**	**Неможлива**
обов’язково відбувається внаслідок певного випробування (ранок після ночі, каміння падає вниз, вода підвищує температуру при нагріванні і тд)	може відбутися чи не відбутися внаслідок випробування (знайти скарб, в школі відмінили заняття, бутерброд впав ікрою вниз)	ніяк не може відбутися внаслідок даного випробування (людина народжується старою і молодшає з кожним днем, день народження 30 лютого, ви вдало складаєте іспит з ТЙМС)

ПРИКЛАД

Задача: Розглянемо кубик, на гранях якого написані цифри 1, 7, 0, 1, 2, 4. Досвід полягає в тому, що кидаємо кубик і дивимося, яка цифра з'явиться на верхній межі.

Елементарними подіями є:

ω_0 - випадання цифри «0»;
ω_1 - випадання цифри «1»;
ω_2 - випадання цифри «2»;
ω_4 - випадання цифри «4»;
ω_7 - випадання цифри «7».

Простір елементарних результатів: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$\mathrm{A} = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

Припустимо, в результаті досвіду з'явилася цифра 7.

В цьому випадку відбулися події B і C, а подія A не відбулося

Події називаються <u>сумісними</u>, якщо поява однієї не виключає появи іншої. В іншому випадку події називаються <u>несумісними</u>

A і B – несумісні події ; B і C – сумісні події

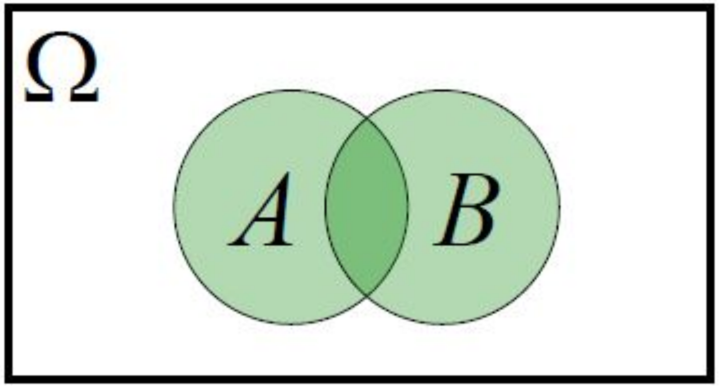
Неможливим для даного експерименту є подія, яка полягає у тому, що з'явиться цифра 5.

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Означення

<u>Сумою подій А і В</u> називається подія

$$C = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A \ \ або \ \ \omega \in B\}$$



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

C=A+B или $C = A \cup B$

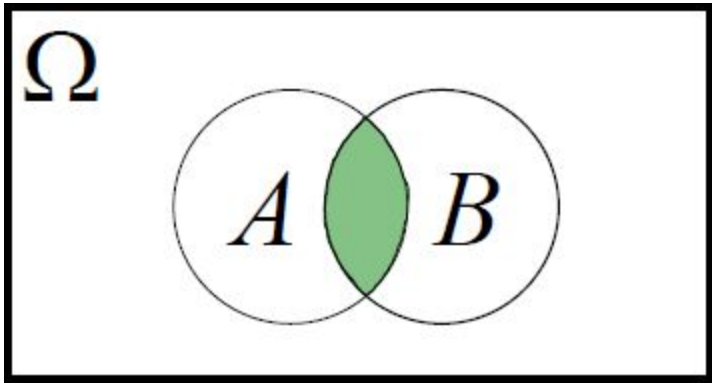
Подія А + В відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія А або подія В або і А і В одночасно

Означення

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

<u>Добутком подій А и В називається подія</u>

$$C = \{\omega \in \Omega \quad : \quad \omega \in A \quad i \quad \omega \in B\}$$



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

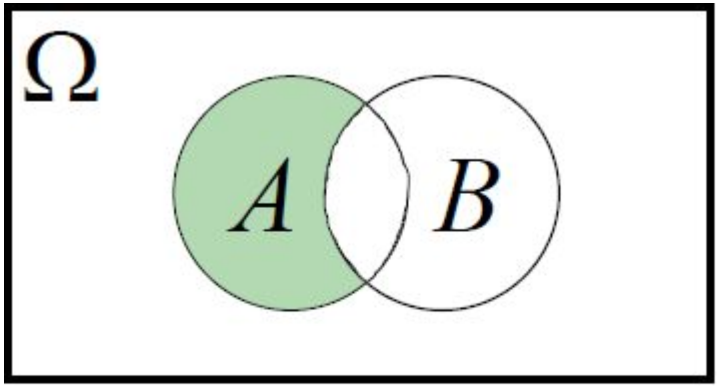
C=AB або $C = A \cap B$

Подія AB відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбуваються події A і B.

Означення

Різницею подій А і В називається подія

$$C = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A \ \ i \ \ \omega \notin B\}$$



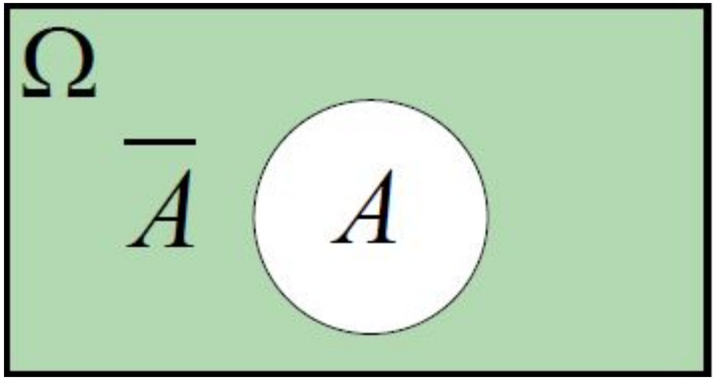
ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

C=A-B або $C = A \setminus B$

Подія A\B відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A відбувається

Означення

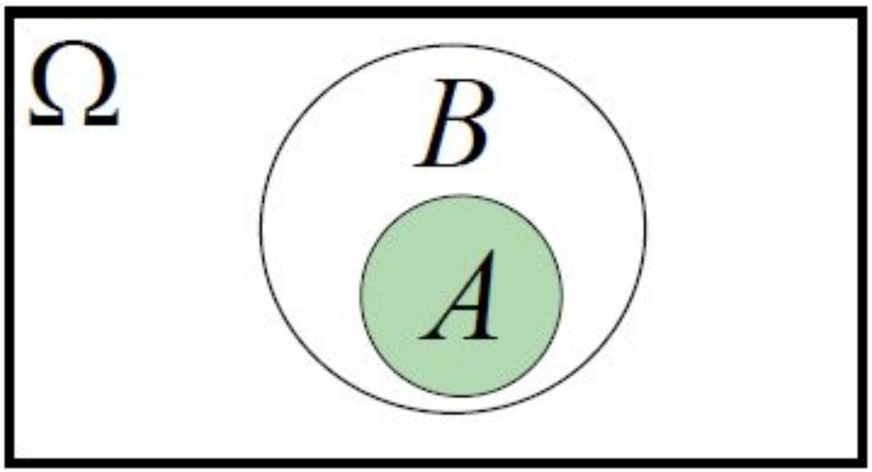
Подія $\Omega \setminus A$ називається <u>протилежною</u> подією до А



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ $\overline{A}$

$$A \cdot \overline{A} = \Theta \qquad A + \overline{A} = \Omega$$

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ



$$A \subset B$$

В є наслідком події А

Якщо кожна поява події А супроводжується появою В, то пишуть А ⊂ В
Якщо А ⊂ В, то кожна елементарна подія,
Що входить у А, міститься в події В.

ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Виникнення теорії ймовірностей як науки відноситься до середини 17 століття. Перше визначення ймовірності було дано Бернуллі

<u>Ймовірність</u> – ступінь впевненості в тому, що подія відбудеться і ставлення до достовірності як частини до цілого

<u>ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ</u>

КЛАСИЧНЕ

ГЕОМЕТРИЧНЕ

АКСІОМАТИЧНЕ

СТАТИСТИЧНЕ

Класичне визначення ймовірності сформульовано в курсі лекцій Лапласа

ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Нехай простір елементарних подій Ω складається з скінченого числа рівноможливих елементарних результатів

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$$

Довільну подію А можна уявити $A = \{\omega_{i1}; \omega_{i2}; \ldots; \omega_{ik}\}$,

$1 \le i1 < i2 < \ldots < ik \le k$.

Подія А відповідає k елементарним результатам.

Означення
(класичне означення ймовірності)

<u>Ймовірністю події А</u> називається число, рівне відношенню числа елементарних результатів, які сприяють появі події А до загальної кількості елементарних результатів

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N}}$$

Властивості КЛАСИЧНОГО ОЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Кожній елементарній події відповідає тільки один елементарний результат (із n)

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Події Ω відповідає n елементарних результатів

$$P(\Omega) = 1$$

Неможливій події не відповідає жодного результату

$$P(\Theta) = 0$$

Властивості КЛАСИЧНОГО ОЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

$$0 \le P\left(A\right) \le 1, \quad \forall A \in \Omega$$

$$P\left(A+B\right) = P(A) + P(B), \quad \forall A, B \subset \Omega : \quad A \cap B = \Theta$$

$$\textit{Якщо} \quad P(A) = 0, \quad \textit{то} \quad A = \Theta$$

ЗАУВАЖЕННЯ

Класичне означення ймовірності може застосовуватися лише в тих випадках, коли:

1)простір елементарних результатів складається з скінченого числа елементарних результатів;

2) елементарні результати рівноймовірні.

ПРИКЛАД

Задача: Розглянемо кубик, на гранях якого написані цифри 1, 7, 0, 1, 2, 4. Досвід полягає в тому, що кидаємо кубик і дивимося, яка цифра з'явиться на верхній межі.

Елементарними подіями являються:

ω_0 - випадання цифри «0»;
ω_1 - випадання цифри «1»;
ω_2 - випадання цифри «2»;
ω_4 - випадання цифри «4»;
ω_7 - випадання цифри «7».

Простір елементарних результатів: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$\mathrm{A} = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

В даному досвіді події не рівноймовірні, так як появі цифри 1 відповідає 2 грані, появі інших цифр по одній грані. До даної моделі можна застосувати класичне визначення ймовірності, якщо на гранях з цифрами 1 зробити додаткові позначки, наприклад 1 'і 1" і замість елементарної події ω1 розглянути дві елементарні події ω1 'і ω1". В цьому випадку простір елементарних подій буде мати вигляд

$$\Omega = \left\{\omega_0; \omega_{1'}; \omega_{1''}; \omega_2; \omega_4; \omega_7\right\}$$

$A = \left\{\omega_0; \omega_2; \omega_4\right\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \left\{\omega_{1'}; \omega_{1''}; \omega_7\right\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \left\{\omega_2; \omega_7\right\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

Експеримент	Число можливих результатів експерименту (n)	Подія А	Кількість вдалих результатів для цієї подіх (m)	Ймовірність настання події А P(a)=m/n
Кидаємо монету	2	Випав «Герб»	1	1/2
Витягаємо екзаменаційний білет	24	Витягнули білет №5	1	1/24
Кидаємо кубик	6	На кубику випало парне число	3	1/2
Граємо в лоторею	250	Виграли, купивши один білет	10	1/25

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Геометрична інтерпретація ймовірності була запропонована англійським математиком Венном

Геометричне означення ймовірності застосовується в тих випадках, коли є нескінченне число рівноможливих випадків.

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Найбіль поширені 3 моделі

1 Маємо відрізок [А, В]. Кидаємо в нього точку. теоретично точка може потрапити в будь-яку точку X відрізка [А, В].

Простір елементарних подій складається з нескінченного числа елементарних результатів, отже класичне означення ймовірності застосувати не можна.

Ймовірністю події А, що складається в тому, що при киданні точки на відрізок [А, В] вона потрапить на відрізок [З, Д] $\subset$ [А, В],називається число,яке визначається за формулою

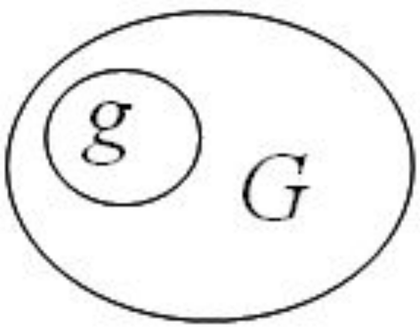
$$\boxed{P(A)=\frac{\text{довжина }[\text{С, Д}]}{\text{довжина }[\text{А,В}]}=\frac{|СД|}{|AB|}}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

2 Нехай на площині OXY задана замкнута обмежена область G з гладкою або кусочно-гладкою межею. кожній такій області можна поставити у відповідність число S (G) - площа області. Кидаємо точку в область G. Елементарне подія - точка попаде в точку P області G. Простір елементарних результатів складається з нескінченного числа рівноймовірно результатів

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область G вона потрапить в замкнуту обмежену область з гладкою або кусочно гладкої кордоном, називається число, яке визначається за формулою

$$g \subset G$$



$$\boxed{P(A) = \frac{\text{площа g}}{\text{площа G}} = \frac{S(g)}{S(G)}}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

3 Нехай в задано замкнутий обмежене тіло T з гладкою або кусочно-гладкою межею. Йому можна поставити у відповідність число V (T) - обсяг тіла.

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область T вона потрапить в область $t \subset T$ називається число, яке визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{об'єм t}}{\text{об'ємT}} = \frac{V(t)}{V(T)}$$

Всі три визначення можна звести до одного, якщо замість числових характеристик області вжити термін міра області - mes

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область D вона потрапить в область $d \subset D$ називається число, яке визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{mes(d)}}{\text{mes(D)}}$$

Властивості ГЕОМЕТРИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Міра області, відповідна елементарного події, дорівнює нулю. $P(\omega)=0$

Сприятливим областю для події Ω є вся область D $P(\Omega)=1$.

Сприятливим області для неможливого події немає

$$P(\Theta)=0$$

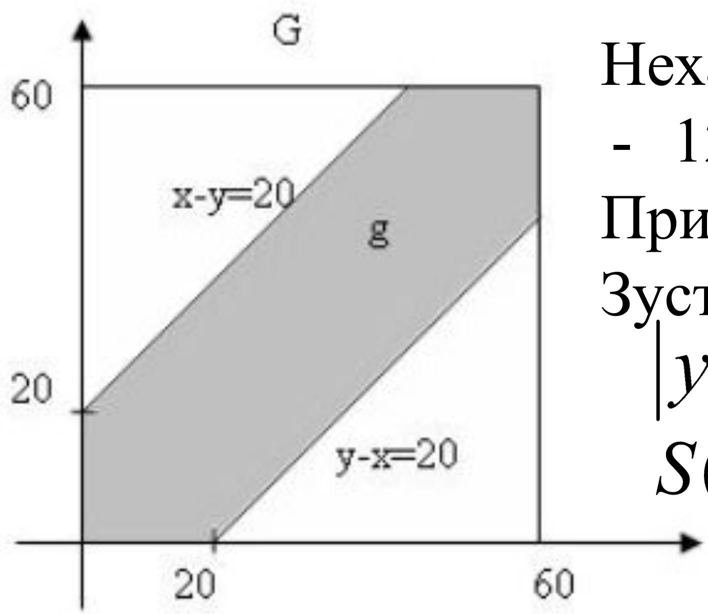
$$0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \in \Omega$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \quad \forall A, B \subset \Omega : \quad A \cap B = \Theta$$

Якщо $P(A)=0, \quad \textit{mo} \quad A=\Theta$

Задача: Двоє друзів домовилися зустрітися між 12 і 13 годинами дня. Прийшовши першим чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен навмання вибирає час свого приходу від 12 до 13 годин.

Розв'язання



Нехай час прибуття одного з них –

- 12 год. x хв.; другого – 12 год. y хв.

При цьому $0 \le x \le 60; \quad 0 \le y \le 60$

Зустріч відбудеться, якщо:

$$|y - x| \le 20 \Rightarrow x - 20 \le y \le x + 20$$

$$S(G) = 3600$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Статистичне визначення ймовірності є наслідком обробки результатів різних спостережень і поклало початок науці математична статистика

Проведемо серію з N дослідів. Як часто з'явиться подія A? (Наприклад, кидаємо монету кілька разів. Скільки разів при киданні монети з'явиться «герб»?)

Нехай N_A - число появ події A в серії з N дослідів.

Означення

(статистичне означення ймовірності)

Частотою (відносної частотою) появи події A в серії з N дослідів називається число, яке дорівнює відношенню числа появ події A в серії з N дослідів до загальної кількості дослідів

$$\boxed{\nu_A = \frac{N_A}{N}}$$

ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТОТИ

$$0 \le \nu_A \le 1 \quad (\text{т.к.} \quad 0 \le N_A \le N)$$

$$\nu_\Omega = 1 \quad (m.к. \quad N_\Omega = N)$$

$$\nu_\Theta = 0 \quad (m.к. \quad N_\Theta = 0)$$

$$\nu_{A+B} = \nu_A + \nu_B, \quad \forall A, B \subset \Omega: \quad A \cap B = \Theta$$

Якщо $\nu_A = 0$, *то* не *випливає*, *що* $A = \Theta$

Наприклад, якщо кинули монету 3 рази і кожен раз випало «решка», то частота появи «герба» в даній серії дослідів дорівнює нулю, але подія не є неможливим

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Досліди показують, що при великих N частота vA в різних серіях випробувань виявляється приблизно однаковими, тобто існує деяке значення p (A), зване ймовірністю події A, біля якого групуються зазначені частоти

$$P(A) \approx \nu_A = \frac{N_A}{N}$$

Так як при проведенні експериментів або збору інформації можливі похибки, то зазвичай проводять кілька серій дослідів (наприклад k серій), в яких число випробувань одно N1, N2, ..., Nk. Опрределяют частоту появи події в кожній серії і під ймовірністю розуміють число

$$P(A) \approx \frac{\nu_A^1 + \nu_A^2 + \ldots + \nu_A^k}{k}$$

ТЕОРЕМИ МНОЖЕННЯ

Нехай заданий імовірнісний простір(Ω, F, P)

Теорема

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншого, за умови що перше відбулося

$$\forall A, B \in F: \quad \begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \end{aligned}$$

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \quad P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

ПРИКЛАД

Задача: В урні лежать 12 білих, 8 червоних і 10 синіх куль. На удачу виймають 2 кулі. Яка ймовірність, що вийняті кулі різних кольорів, якщо відомо, що серед них не виявилося синього кулі?

Розв’язання

Так як відомо, що сині кульки не можуть виймались, то всього існує n = 20 можливих варіантів результату досвіду.

Подія Ai – i-й вийнята кулька біла;

Bi – i-й вийнята кулька червона.

$i = 1,2$

Якщо 1-им виймуть білу кулю, а 2-м червоний, то ймовірність такої події

$$P(C) = P(A_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$$

Если 1-ым вынут красный шар, а 2-ым белый, то вероятность такого события

$$P(C) = P(A_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$$

ПРИКЛАД

Так як порядок вилучення куль не має значення, нас влаштовують обидві події. Тоді враховуючи несумісних подій C і D, отримуємо

$$P = P(C + D) = P(C) + P(D) = \frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19} + \frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{48}{95}$$

Означення

Події A і B називаються <u>незалежними</u>, якщо

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$$

Означення

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються <u>попарно незалежними</u>, якщо $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j$

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, F, P)
Нас цікавить подія A, яке може наступити при появі одного з несумісних подій A1, A2, ..., An, що утворюють повну групу

Означення

Сукупність подій {A1, A2, ..., An} називається <u>повною групою подій</u>, якщо:

1) події A1, A2, ..., An попарно незалежні, тобто

$$A_i \cdot A_j = \Theta \quad \forall i \neq j$$

2) $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$$

В результаті експерименту обов'язково відбувається одна з подій Ai, i = 1,2, ..., n.
Події A1, A2, ..., An називаються <u>гіпотезами.</u>

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай відомі ймовірності подій $A_i, \quad i = \overline{1, n}$ та умовні ймовірності $P(A/A_1), \ P(A/A_2), ..., P(A/A_n)$

Як знайти ймовірність події А?

Теорема

(формула повної ймовірності)

Якщо події А1, А2, ..., Аn утворюють повну групу подій, то для будь-якої події А справедлива формула повної ймовірності

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + ...$$
$$... + P(A_n) \cdot P(A/A_n)$$

Ймовірності р (Аk) називаються <u>апріорними ймовірностями</u> гіпотез, що обчислюються до твору досвіду

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Формула повної ймовірності застосовується у випадках, коли досвід з випадковим результатом розпадається на два етапи: на першому етапі «розігруються» умови досвіду, а на другому - його результат.

Уявимо Ситуацію:

Досвід проведений. В результаті настало подія А. Як зміняться ймовірності гіпотез? Тобто як знайти апостеріорні ймовірності гіпотез

$$P(A_1 / A), \quad P(A_2 / A), \ldots, P(A_n / A)$$

Теорема (формула Байесса)

Припустимо, що в результаті випробування подія А сталося. Тоді ймовірність гіпотез А1, А2, ..., Аn можна обчислити

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A / A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(A / A_j)}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$A_i, \quad i = \overline{1, n}$$

ПРИКЛАД

Задача: По об'єкту проводиться 2 постріли. Ймовірність влучення при першому пострілі дорівнює 0,5; при другому - 0,7. Імовірність руйнування об'єкта при одному попаданні дорівнює 0,4; при двох влучань - 0,8. Знайти ймовірність руйнування об'єкту при двох пострілах.

Розв’язання

Позначимо B1 і B2 попадання відповідно при 1-му і 2-му пострілі. Введемо гіпотези A2 два попадання при двох пострілах,

A1 - одне влучення при двох пострілах,

A0 - жодного попадання при двох пострілах.

Подія A1 відбудеться, якщо трапиться одне влучення при 1-му або 2-му пострілі, тобто $\mathrm{A}_1 = \underline{B_1} \cdot \underline{B_2} + B_1 \cdot B_2$

аналогічно $\mathrm{A}_2 = B_1 \cdot B_2, \quad A_0 = B_1 \cdot B_2$

Вважаючи B1 і B2 незалежними, отримаємо

$$P(A_1) = 0{,}5 \quad P(A_2) = 0{,}35 \quad P(A_0) = 0{,}15$$

$$P(A / A_1) = 0{,}4 \quad P(A / A_2) = 0{,}8 \quad P(A / A_0) = 0 \Rightarrow P(A) = 0{,}48$$