

**Условная вероятность. Правило
умножения вероятностей.
Формула полной вероятности.
Формула Байеса.**

Разобраться и написать конспект по презентации,
решить задачи на последнем слайде.

Просмотреть видеоразбор примера задачи:

<https://www.youtube.com/watch?v=jRWjeledEVM>

Прислать на почту конспект и решенные задачи.

Работу не позже 26 ноября до 21.00

Условная вероятность

- Вероятность события A при условии того, что событие B произошло, называется **условной** вероятностью и обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$

Пример 1.

Пусть пять студентов вытягивают на экзамене один билет из пяти, причем один из них - очень лёгкий. Какова вероятность для того, кто идёт третьим, вытащить удачный билет?

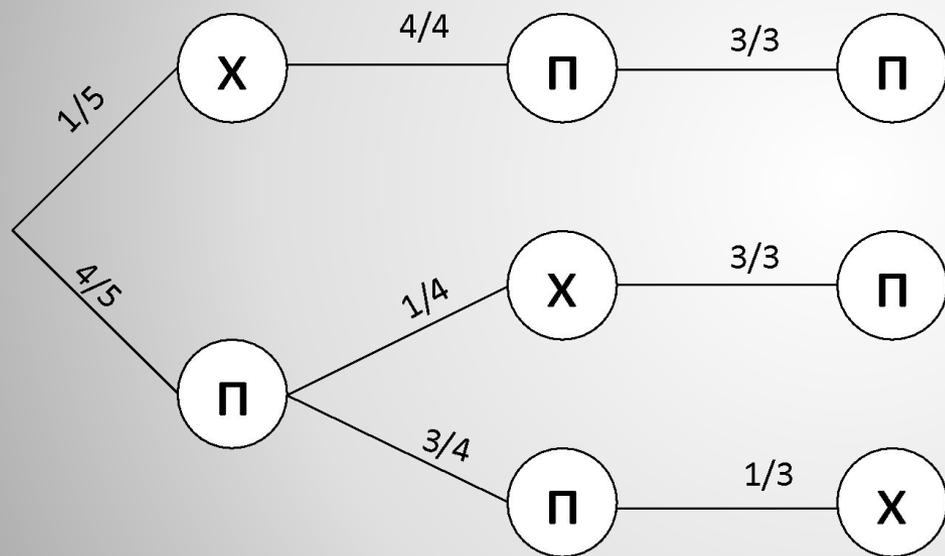
Решение.

Очевидно, что эта вероятность зависит от того, что попало предыдущим студентам, и вытянуть удачный билет третий студент может только в том случае, когда его не взяли двое предыдущих:

$$P_{\overline{A \cdot B}}(C)$$



Пусть пять студентов вытягивают на экзамене один билет из пяти, причем один из них очень лёгкий. Какова вероятность для того, кто идёт третьим, вытащить удачный билет?



Итого студент возьмет хороший билет

$$) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Теорема умножения для независимых событий

*Вероятность произведения
двух
независимых событий **A** и **B**
равна
произведению их
вероятностей.*

ЗАДАЧА Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решени

е.
Обозначим $C = \{A \text{ выиграет белыми}\};$
 $D = \{A \text{ выиграет черными}\};$

$p(C) = 0,52; p(D) = 0,3; \text{ события независимы};$

$$p(C \cdot D) = p(C) \cdot p(D) = 0,52 \cdot 0,3 = 0,156$$

ОТВЕТ: 0,156

Формула полной вероятности

Для вычисления полной вероятности события A нужно перечислить все условия H_i , при которых может наступить A , и перемножить вероятности этих условий на соответствующие им условные вероятности.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)$$

Причем сумма вероятностей гипотез должна быть равна 1, т.е.

$$\sum P(H_i) = 1$$

Формула Байеса

Рассмотрим событие A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, образующих полную группу. Если событие A уже произошло, то вероятность событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ можно определить по формуле **Байеса**

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}$$

Задача 1

- Два автомата производят одинаковые детали. Производительность первого автомата в два раза больше производительности второго. Вероятность производства отличной детали у первого автомата равна 0,60, а у второго 0,84. Наудачу взятая для проверки деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

- Событие A - деталь отличного качества.

Гипотезы:

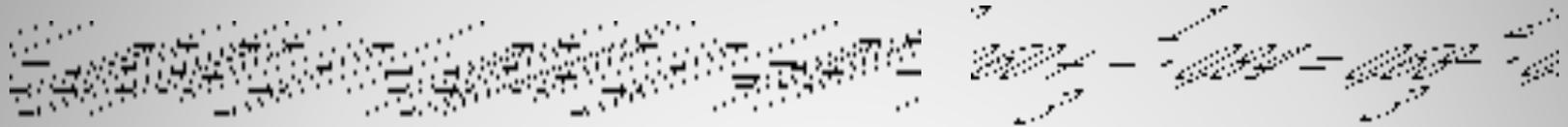
- B_1 – деталь произведена первым автоматом, так как этот автомат производит деталей в два раза больше второго.

- B_2 – деталь изготовлена вторым автоматом,

- Условные вероятности того, что деталь произведена первым автоматом, а вторым

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, вычисляем по формуле полной вероятности:

Решение



- Вероятность того, что взятая деталь изготовлена первым автоматом, вычисляется по формуле Байеса:

$$\frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$$

Задача 2

- Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 4:1. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,2; для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

Решение

Событие A - машина заехала на заправку.

Гипотезы: H_1 - это грузовая машина, $P(H_1) = \frac{4}{5} = 0,8$

H_2 - это легковая машина, $P(H_2) = \frac{1}{5} = 0,2$

Условные вероятности: $P(A / H_1) = 0,2$; $P(A / H_2) = 0,3$

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайным образом выбранная из общего потока машина заедет на бензоколонку

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,22$$

Искомую вероятность найдём по формуле Байеса

$$P(H_1 / A) = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,22} = \frac{8}{11} \approx 0,727$$

Ответ: 0,727

Теорема

Если событие A может произойти только вместе с одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события A

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A)$$

Формула полной вероятности

Пример

В цехе работают **20** станков.

Из них **10** марки А, **6** марки В, и **4** марки С.

Вероятности того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны **0,9**, **0,8** и **0,7**.

Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь будет браком?

Пример

События

A = «Наугад выбранная деталь будет с браком»

H1 = «Деталь обработана на станке марки А»

H2 = «Деталь обработана на станке марки В»

H3 = «Деталь обработана на станке марки С»

Пример

Всего в цехе 20 станков

$$P(H_1) = 10/20 = 1/2 = 0,5$$

$$P(H_2) = 6/20 = 3/10 = 0,3$$

$$P(H_3) = 4/20 = 1/5 = 0,2$$

Условные вероятности

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P_{H_2}(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$P_{H_3}(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Пример

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + \\ &\quad + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \\ &\quad + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = \\ &= 0,05 + 0,06 + 0,06 = 0,17 \end{aligned}$$

Решить самостоятельно:

1) Три студентки живут в одной комнате и по очереди моют посуду. Вероятность разбить тарелку для первой студентки равна 0.03, для второй 0.01, для третьей - 0.04. На кухне раздался звон разбитой тарелки. Найти вероятность того, что третья студентка мыла тарелку.

2) На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460—на 2-м и 340 - на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го — 0,02, для 3-го — 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?