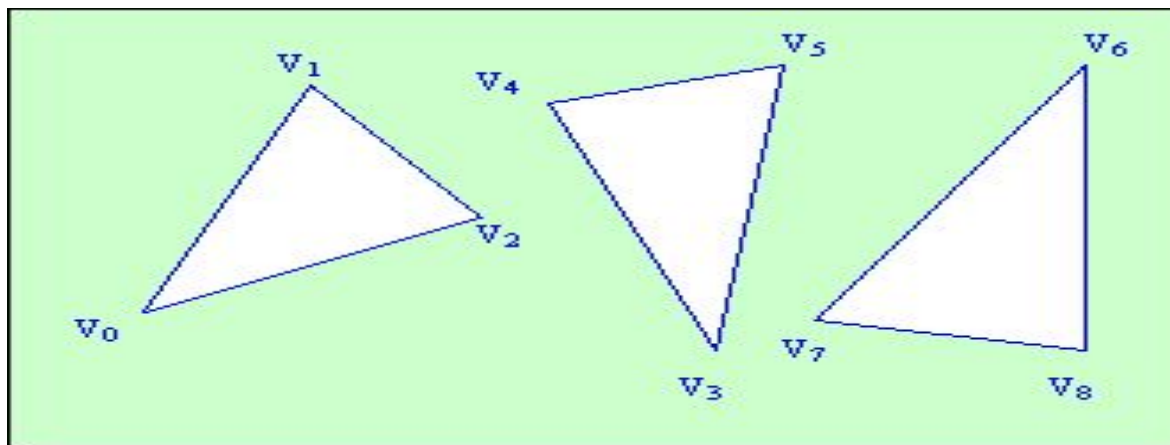


Розв'язування трикутників



Розв'язування трикутників

Розв'язати трикутник — означає за відомими його сторонами і кутами знайти невідомі його сторони і кути.

Задачі на розв'язання трикутників поділяються на такі види:

1. Розв'язання трикутника за відомими стороною і двома кутами.
2. Розв'язання трикутника за відомими двома сторонами і кутом між ними.
3. Розв'язання трикутника за відомими двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них.
4. Розв'язання трикутника за відомими трьома сторонами.

Розв'язання трикутника за відомими стороною і двома кутами

План розв'язання:

- 1
 - Знаходимо третій кут трикутника, враховуючи, що сума всіх внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° .
 - Записуємо теорему синусів для цього трикутника і, обираючи попарно співвідношення сторін і протилежних до них кутів, знаходимо дві інші сторони трикутника.

Приклад (за стороною і прилеглими до неї кутами)

Дано: $BC=a$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$.

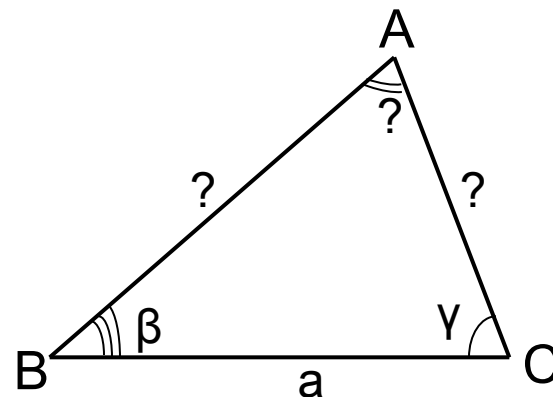
Знайти: AC , AB , $\angle A$.

Розв'язання

1. $\angle A=180^\circ-(\beta+\gamma)$,
2. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}; \quad AC = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$3. \quad \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \gamma}; \quad AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin A}$$



Розв'язання трикутника за відомими двома сторонами і кутом між ними

План розв'язування:

- За теоремою косинусів знаходимо третю сторону.
- За наслідком із теореми косинусів знаходимо косинуси невідомих кутів трикутника, а по можливості і самі кути.

Зверніть увагу!

Це можна зробити і за допомогою теореми синусів.

Приклад *(за двома сторонами і кутом між ними)*

Дано: $BC=a$, $AC=b$, $\angle C=\gamma$.

Знайти: AB , $\angle A$, $\angle B$.

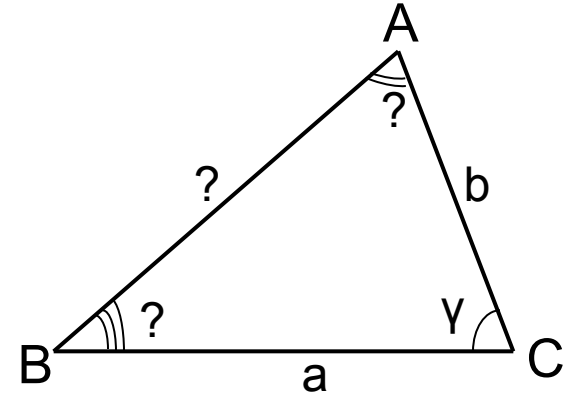
Розв'язання

1. За теоремою косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

$$2. \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$3. \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C).$$



Розв'язання трикутника за відомими двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

План розв'язування:

- За теоремою синусів знаходимо кут, протилежний до другої відомої сторони.

3 При цьому зверніть увагу, що одному і тому ж значенню синуса кута відповідають два кути — гострий і тупий, суміжний із цим гострим кутом. Враховуйте, що проти більшої сторони лежить більший кут.

- Знаходимо третій кут трикутника.
- За теоремою синусів знаходимо третю сторону трикутника.

Зверніть увагу!

Ця задача може мати два розв'язки.

Приклад (за двома сторонами і кутом, протилежним одній з них)

Дано: $BC=a$, $\angle A=\alpha$, $AC=b$.

Знайти: AB , $\angle C$, $\angle B$.

Розв'язання

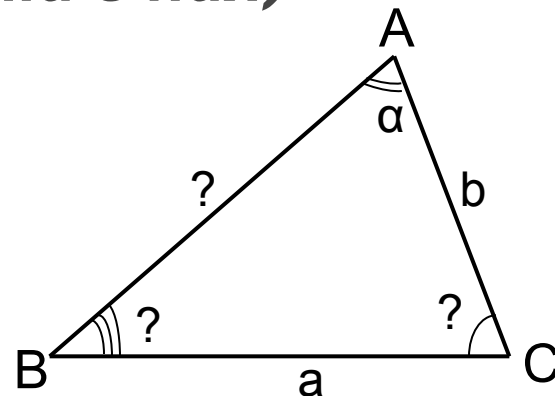
1. За теоремою синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \quad \sin B = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

Увага! З рівності $\sin B = \frac{b \sin \alpha}{a}$, як правило, знаходять два значення кута B , тому задача може мати два розв'язки.

2. $\angle C = 180^\circ - (\alpha + \angle B)$,

3. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}; \quad AB = \frac{a \sin C}{\sin \alpha}$



Розв'язання трикутника за відомими трьома сторонами

План розв'язування:

4

- За наслідком із теореми косинусів знаходимо один із кутів трикутника.
- За теоремою синусів знаходимо два інших кути трикутника.

Приклад (за трьома сторонами)

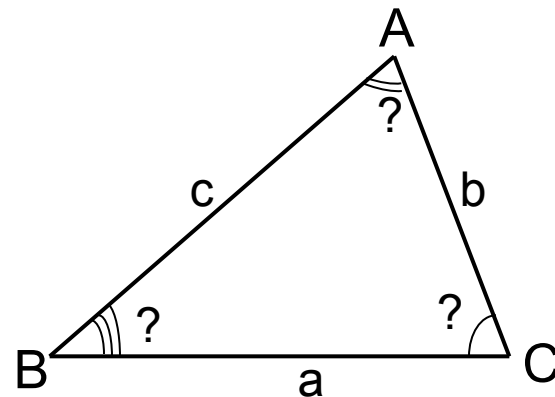
Дано: $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$.

Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання

1. За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



Увага! З цієї рівності, як правило, знаходять два значення кута B, тому задача може мати два розв'язки.

$$2. \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3. \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$

Розв'язування задач

Рівень А.

Задача 1.

Дві сторони трикутника дорівнюють 1 см і $\sqrt{2}$ см, а кут між ними 45° .
Знайдіть третю сторону трикутника.

Розв'язання.

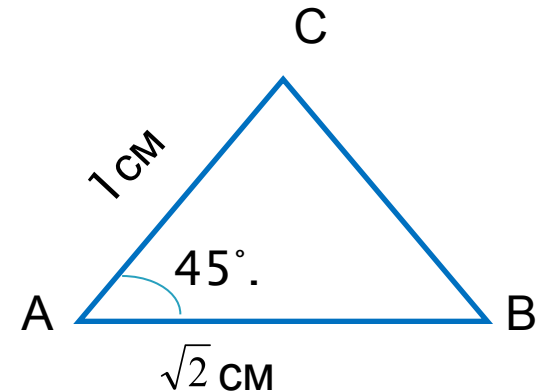
Нехай $AC=1$ см, $AB=\sqrt{2}$ см, тоді $\angle A=45^\circ$
Використовуючи теорему косинусів маємо:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cos A.$$

$$BC^2 = 2 + 1 - \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 5$$

$$BC = \pm \sqrt{5}$$

- $\sqrt{5}$ не задовольняє умові задачі. Отже, $BC = \sqrt{5}$ см



Відповідь: $\sqrt{5}$ см

Розв'язування задач

Задача 2.

Знайди кут М трикутника MNK, якщо $MN = 8$ см, $NK = 7$ см, $MK = 3$ см.

Розв'язання.

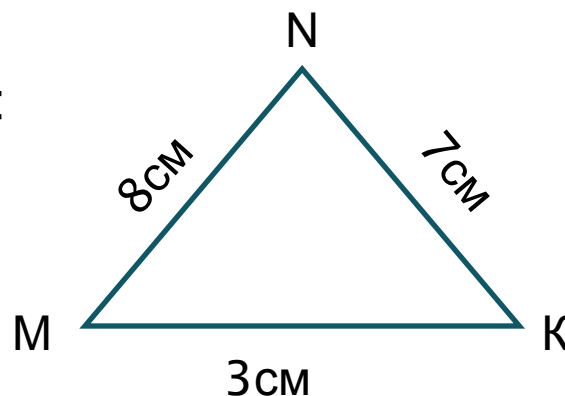
Використовуючи теорему косинусів маємо:

$$NK^2 = MN^2 + MK^2 - 2MN \cdot MK \cdot \cos M;$$

$$49 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos M;$$

$$48 \cos M = 24;$$

$$\cos M = 24/48 = 1/2, \text{ тоді } \angle M = 60^\circ$$



Відповідь: 60°

Розв'язування задач

Рівень Б.

Задача 3.

Одна зі сторін паралелограма на 1 см довша за іншу, а діагоналі дорівнюють 7 см і 11 см. Знайди сторони паралелограма.

Розв'язання.

Нехай одна сторона дорівнює x см, тоді інша $(x+1)$ см.

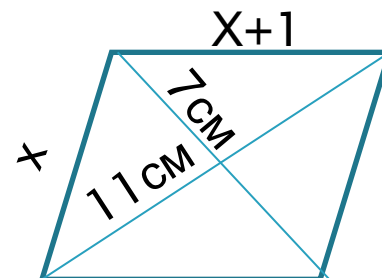
За властивістю діагоналей маємо: $7^2 + 11^2 = 2x^2 + 2(x+1)^2$

$$49 + 121 = 2x^2 + 2x^2 + 4x + 2$$

$$4x^2 + 4x - 168 = 0$$

$$x^2 + x - 42 = 0 \quad \text{За теоремою Вієта} \quad X_1 = 6, X_2 = -7$$

$X = -7$ – не задовольняє умови задачі, тому $x = 6$, $x+1 = 7$. Отже, одна сторона паралелограма дорівнює 6 см, а інша – 7 см.



Відповідь: 6 см, 7 см.

Розв'язування задач

Рівень В.

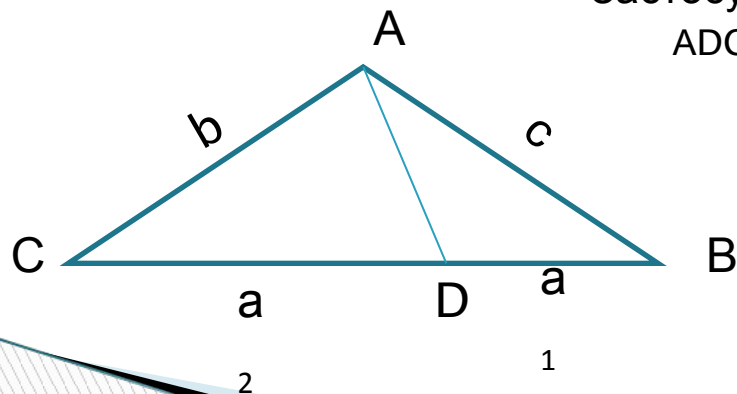
▣ Задача (теорема Стюарта)

Якщо a, b, c – сторони трикутника ABC і точка D ділить сторону BC на відрізки $BD = a_1$, $CD = a_2$

$$AD^2 = \frac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a}$$

▣ Розв'язання. Нехай $\angle ADC = \alpha$, тоді $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$

Застосувавши теорему косинусів для трикутників ADC і ADB маємо:



$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \alpha;$$

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos(180^\circ - \alpha);$$

$$b^2 = AD^2 + a_2^2 - 2AD \cdot a_2 \cdot \cos \alpha (1);$$

$$c^2 = AD^2 + a_1^2 - 2AD \cdot a_1 \cdot \cos \alpha (2).$$

Розв'язування задач

- Помноживши рівність (1) на a_1 , а рівність (2) на a_2 і почленно додавши маємо:

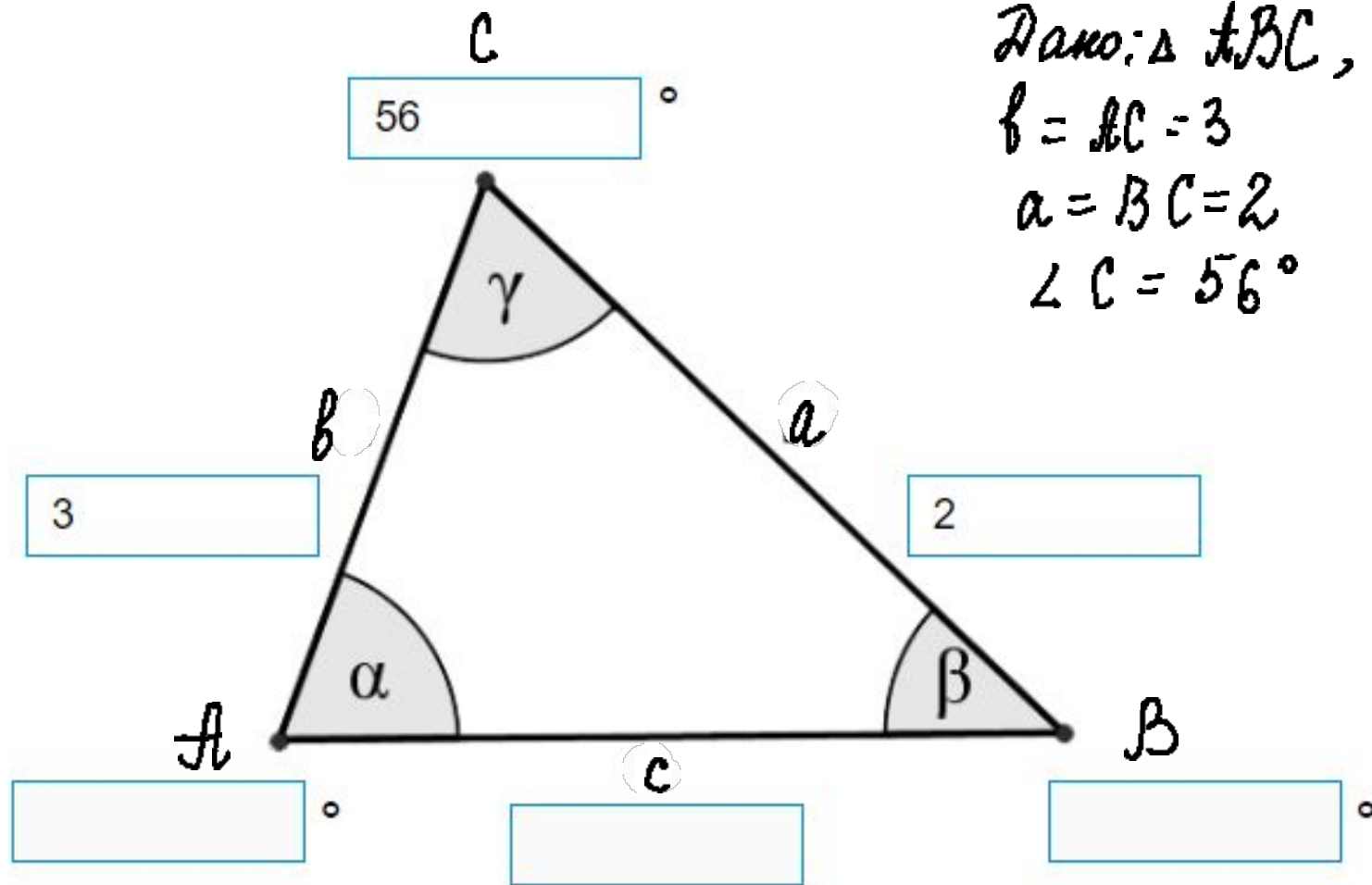
$$\begin{aligned} a_1 b^2 + a_2 c^2 &= AD^2 \cdot a_1 + CD^2 \cdot a_1 - 2AD \cdot CD \cdot a_1 \cdot \cos \alpha + AD^2 \cdot a_2 + DB^2 \cdot a_2 + 2AD \cdot DB \cdot a_2 \cdot \cos \alpha = \\ &= AD^2 \cdot (a_1 + a_2) + a_2^2 a_1 - 2AD \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha + a_1^2 a_2 + 2AD \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha = aAD^2 + a_1 a_2 (a_2 + a_1) = \\ &= aAD^2 + a_1 a_2 a_3. \end{aligned}$$

$$AD^2 = \frac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a}$$

- Отже:

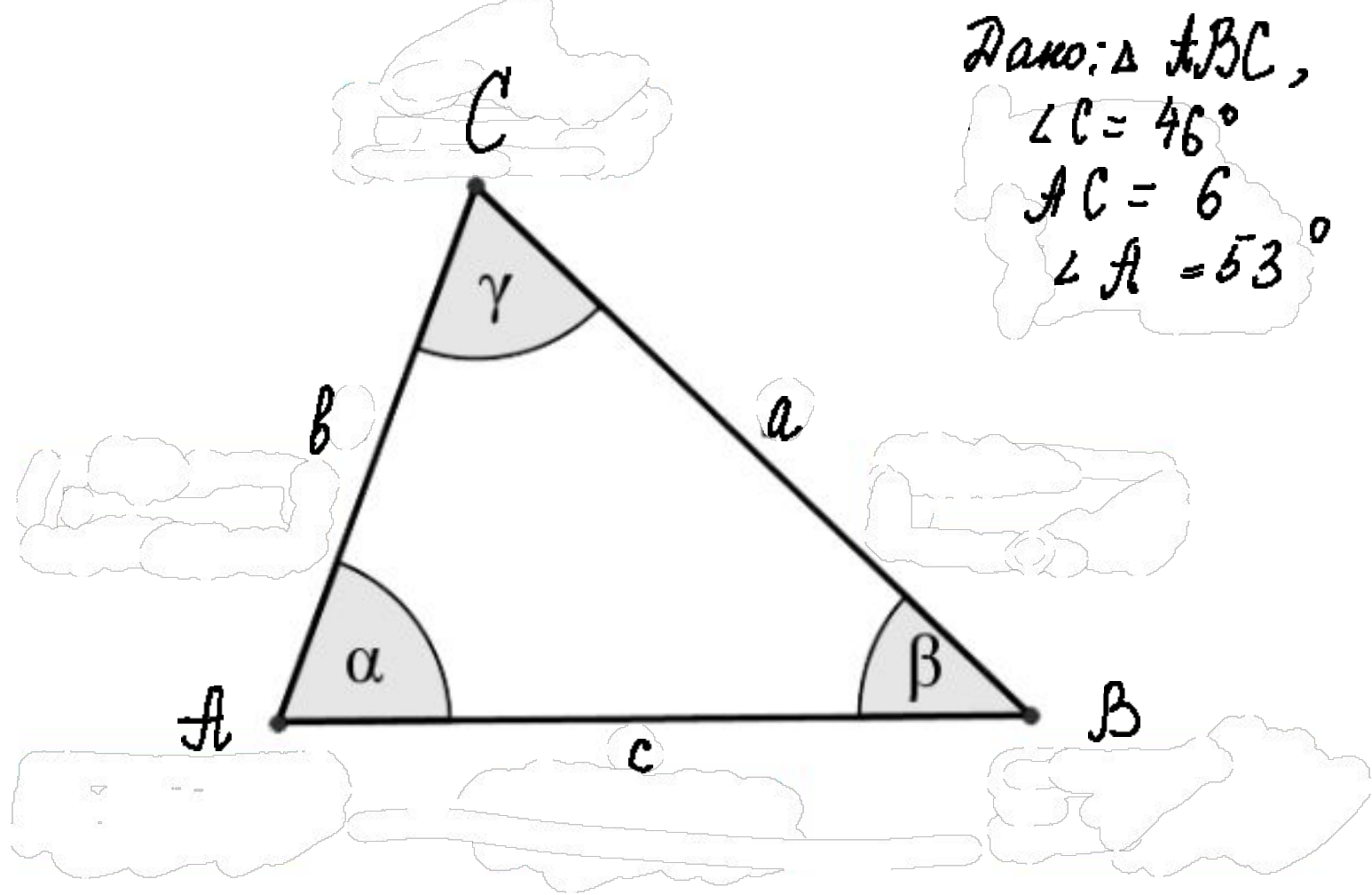
- Що і треба було довести.

Дано: $\triangle ABC$,
 $b = AC = 3$
 $a = BC = 2$
 $\angle C = 56^\circ$



Розв'язати трикутник

Дано: $\triangle ABC$,
 $\angle C = 46^\circ$
 $AC = 6$
 $\angle A = 53^\circ$



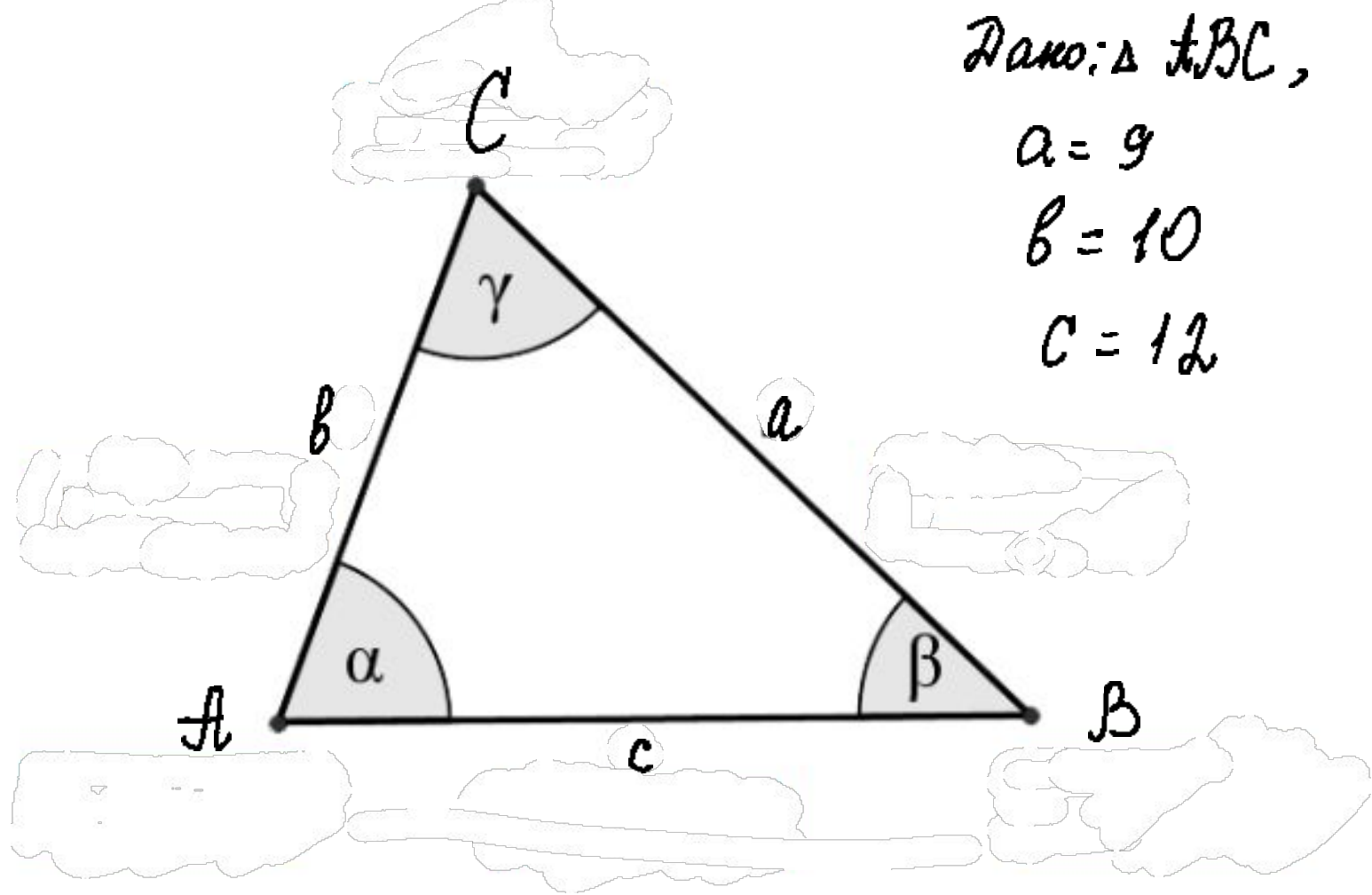
Розв'язати трикутник

Дано: $\triangle ABC$,

$$a = 9$$

$$b = 10$$

$$c = 12$$



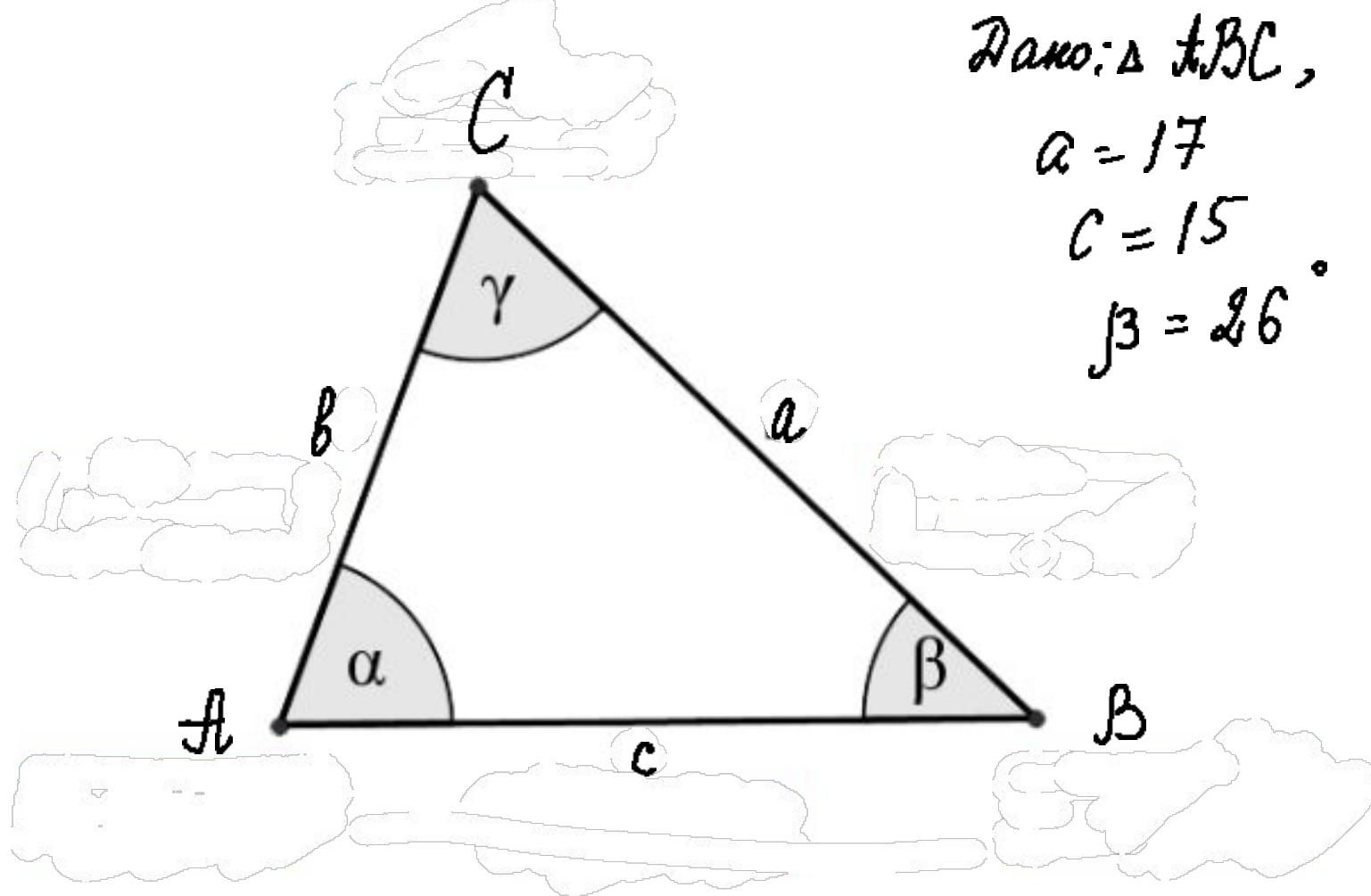
Розв'язати трикутник

Дано: $\triangle ABC$,

$$a = 17$$

$$c = 15$$

$$\beta = 26^\circ$$



Розв'язати трикутник