Луганський державний медичний університет

Медична та біологічна фізика
1 семестр

Лекція 1

Елементи диференційного числення функції однієї та багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференційні рівняння.

Лектор – проф. Стрижаченко Олександр Володимирович

План лекції

- Визначення похідної
- Похідна та диференціал.
- Таблиця похідних.
- Необхідна умова диференційованості.
- Геометричний сенс похідної.
- Фізичний сенс похідної.
- Основні правила обчислення похідних.
- Невизначений інтеграл.
- Методи інтегрування.
- Диференційні рівняння.

Похідна

Похідною функції *f(x)* у точці *x=a* називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу коли аргумент *x* наближається до точки *a*

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Приклад

$$\boxed{f(x) = \sin x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$= (\cos a) \lim_{x \to a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = (\cos a) \lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a$$

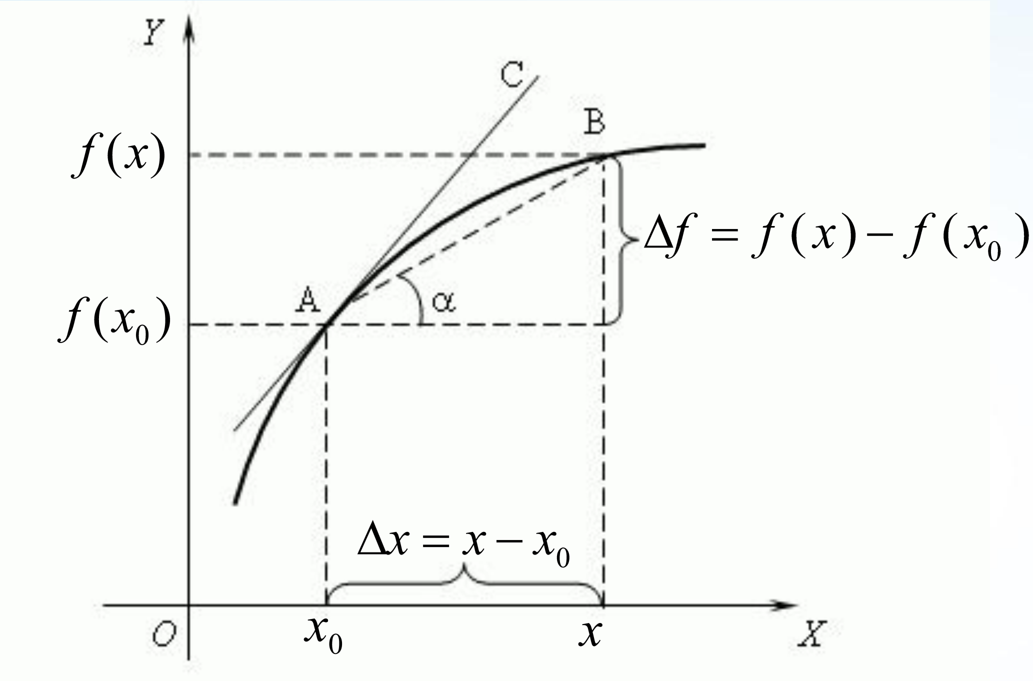
$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Таблиця похідних

$$(const)' = 0$$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	

Геометричний сенс похідної



Якщо існує границя кутового коефіцієнту січної AB при *x* ----> x_0, то пряму AC, яка проходить через точку A і має кутовий коефіцієнт *k*, що дорівнює цій границі, називають в цьому випадку граничним положенням січної або дотичною у точці (x_0,*f*(x_0)) графіка функції.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = k$$

Похідна функції у заданій точці співпадає з тангенсом кута нахилу дотичної до графіку цієї функції в заданій точці.

Фізичний сенс похідної

Нехай матеріальна точка здійснює прямолінійний рух і *x(t)* – її координата, яка відлічується від певної точки на прямій, що прийнята за початок координат. Середня швидкість руху за проміжок часу, що пройшов з моменту t_0 до моменту t , дорівнює

$$v_{cp} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Границя середньої швидкості при t ---> t_0 називається у механіці миттевою швидкістю. За визначенням похідної, миттева швидкість

$$v = \lim_{t \to t_0} v_{cp} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Ця інтерпретація узагальнюється на швидкість зміни будь-якої фізичної величини.

Основні правила обчислення похідних

- Похідна суми.
- Похідна різниці.
- Похідна добутку.
- Похідна відношення (частки).
- Похідна складної функції.

Правила диференціювання

Похідна постійної функції дорівнює нулю, тобто

C ′ = 0,   де C – константа.

Похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних, тобто

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Похідна добутку знаходиться за правилом:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Зауваження. Формула диференціювання добутку може бути легко узагальнена на випадок великої кількості множників. Наприклад,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

Правила диференціювання

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$, де C – константа.

постійний множник виноситься за знак похідної

Похідна відношення знаходиться за правилом:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \left(v(x) \neq 0\right).$$

Похідна складної функції

Розглянемо складну функцію

$$F(x) = f(\varphi(x)).$$

Якщо існують похідні

$$\varphi'(x_0),\ f'(\varphi(x_0)),$$

то її похідна визначається за формулою

$$\boxed{F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).}$$

Дифференциал

На практиці зазвичай прийнято записувати всі формули, до яких входить похідна або диференціал, не вводячи спеціального позначення для фіксованої точки *a*, а використовують для неї традиційне позначення *x* . В цьому випадку неявно вважається наявність ще одного символу для позначення незалежної змінної, який не пишеться. Це дозволяє записати останню формулу у вигляді рівності

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Таблиця диференціалів

$d(\mathrm{const}) = 0$	$\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$	$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x}\ln a\ dx$	$\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{dx}{x\ln a}$

$d(\sin x) = \cos x\, dx$	$d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\mathrm{sh}\, x) = \mathrm{ch}\, x\ dx$
$d(\cos x) = -\sin x\, dx$	$d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{sh}\, x\ dx$
$\mathrm{d}(\mathrm{tg}\, x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$	$d(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$d(\mathrm{th}\, x) = \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$
$d(\mathrm{ctg}\, x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$	$d(\mathrm{arcctg}\, x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$	$d(\mathrm{cth}\, x) = -\dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}$

Похідні вищих порядків

Введемо поняття похідної другого порядку функції $f(x)$. Похідну від першої похідної функції $f(x)$, тобто $(y')'$ будемо називати похідною другого порядку (тоді y' - похідна першого порядку) і будемо її позначати y'' або $f''(x)$. Далі $(y'')' = y''' = f'''(x)$ - це похідна третього порядку, … а

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)}$$ - це похідна n-го порядку.

Функції багатьох змінних

Визначення функції двох змінних

Визначення. Якщо кожній парі *(x,y)* значень двох незалежних одна від одній змінних величин *x* і *y* з певної множини *D* відповідає єдине значення величини *z*, а кожному *z* відповідає хоча б одна пара *(x,y)*, то ми говоримо, що *z* є функцією двох незалежних змінних *x* і *y*, яка визначена у *D*.

Позначення

При цьому пишуть:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y).$$

Якщо парі чисел $(x_0, y_0) \in D$ відповідає число $z_0 \in L$,

то пишуть $$z_0 = f(x_0, y_0)$$

Або $$z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

z_0 називається окремим значенням функції

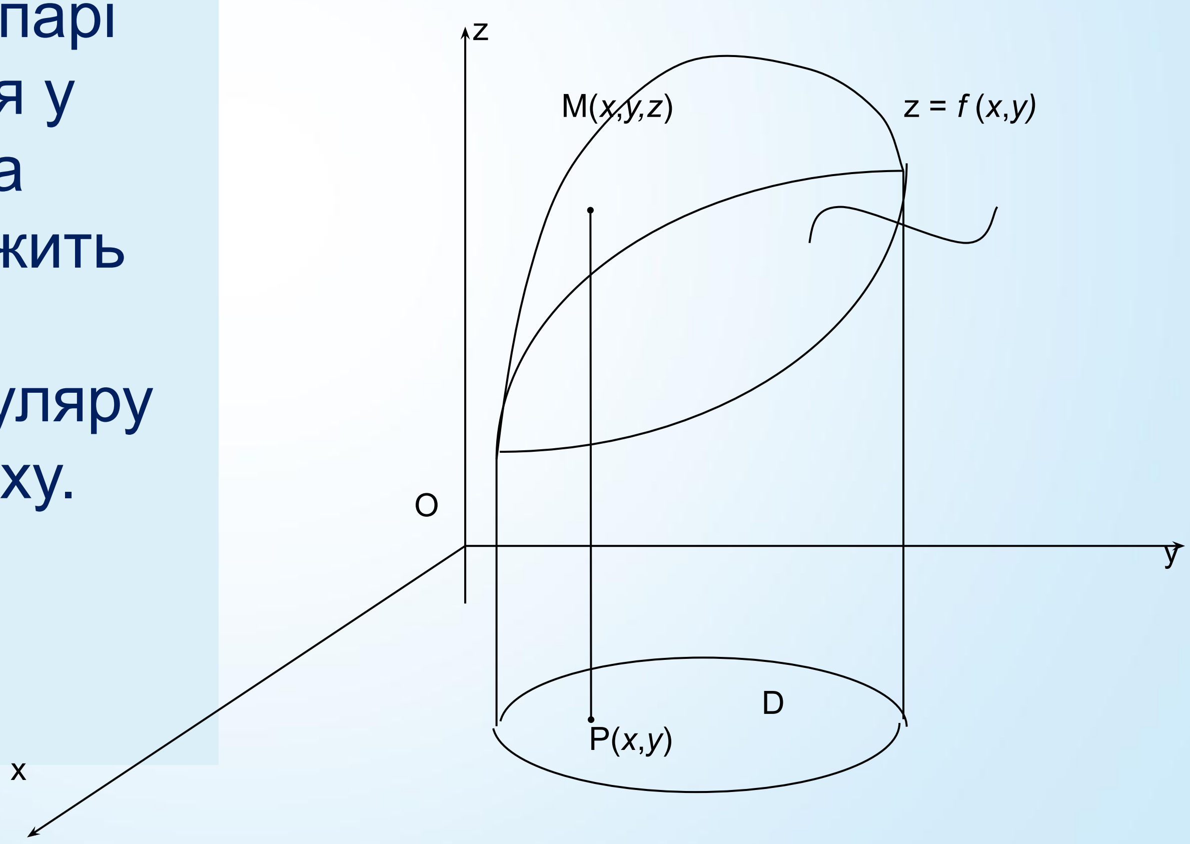
при $x = x_0, y = y_0.$

Графік функції 2-х змінних

Геометричне місце точок, координати яких задовільнять рівнянню $z = f(x,y)$, називається *графіком функції двох змінних*.

Графік функції

Функцію двох змінних можна відобразити графічно. Кожній парі (x, y)∈D ставиться у відповідність точка M(x, y,z), що належить графіку функції і є кінцем перпендикуляру PM до площини Oxy.



Частинні похідні

Частинна похідна (першого порядку) функції $z = f(x, y)$ по змінній x по

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

Аналогічно позначається частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

Приклад

Знайдемо частинні похідні функції

$$z = 4x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$$

Отримуємо

$$z'_X = 8xy - 3x^2 y - 2xy^2,$$

$$z'_Y = 4x^2 - x^3 - 2x^2 y.$$

Первісна. Невизначений інтеграл.
Заміна змінної в невизначеному інтегралі. Формула інтегрування по частинам.

Основні визначення

Визначення 1. Функція $F(x)$ називається первісною по відношенню до функції $f(x)$ на певному проміжку, якщо на цьому проміжку функція $F(x)$ диференційована і задовільніє умові $F'(x) = f(x)$ або, що є таким самим, $dF(x) = f(x)dx$.

Основні визначення, приклади

Операція переходу до первісної має свою назву - невизначене інтегрування і позначається: $\int f(x)dx$

Визначення. Сукупність всіх первісних функції $f(x)$ називається її невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $C \in R$, а вираз $f(x)dx$ називаєть ся підінтегральним виразом, $f(x)$ - підінтегральною функцією.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C.$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C_1 \end{cases}.$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C_1 \end{cases}.$

Таблиця невизначених інтегралів

Окремі випадки

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Основні правила обчислення інтегралів

1. $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Доведення.

$$\left(\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \right)' = \left(\int f(x)\,dx \right)' \pm \left(\int g(x)\,dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

2. $\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Доведення.

$$\left(\int af(x)\,dx \right)' = af(x)$$

$$a\left(\int f(x)\,dx \right)' = af(x)$$

Основні правила обчислення інтегралів

Теорема. (Заміна змінних у невизначеномуінтегралі)

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на X,а $x = \varphi(t)$, $t \in T$, $\varphi(t) \in C^1(T)$, (тобто $\varphi(t)$неперервна разом з $\varphi'(t)$і $\varphi(t)$має зворо тню функцію), тоді інтеграл $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доведення. Покажемо, що ліва і права частини мають рівні похідні по одному й тому ж аргументу.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \frac{d}{dt}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \cdot \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x).$$

Таким чином, інтеграли у лівій і правій частинах рівні.

Інтегрування частинами

Інтегруваннячастинами.

За правилом диференціювання добутку

$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$,звідки

$\int udv = uv - \int vdu$

Останнє співвідношення називається

формулою інтегрування частинами.

Класи функцій, що інтегруються частинами

$$J = \int P_n(x)\begin{Bmatrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}\, x\\ \mathrm{arcctg}\, x\end{Bmatrix}dx\,,$$

де $P_n(x)$ - багаточлен.

$$dv = P_n(x)\,dx,\; u = \arcsin x\;\; (\arccos x;\; \mathrm{arctg}\, x;\; \mathrm{arcctg}\, x).$$

Класи функцій, що інтегруються частинами

$$4.\ J = \int P_n(x)(\ln x)^k\,dx\ ,$$

де $P_n(x)$ - багаточлен.

$$dv = P_n(x)\,dx,\ u = (\ln x)^k$$

Диференційні рівняння

- Визначення диференційного рівняння (ДР). Загальний та частинний розв’язок ДР.
- ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
- ДР з розділеними змінними. Алгоритм розв’язку
- Однорідні ДР. Алгоритм розв’язку
- Лінійні ДР. Алгоритм розв’язку методом Бернуллі

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

- Лінійні однорідні ДР

Диференційні рівняння

Визначення

Рівняння, що пов'язують незалежну змінну x з невідомою функцією y(x) і її похідними до певного порядку n включно, називається диференційним рівнянням n-ого порядку.

Приклади

диференційне рівняння

1-го порядку

$$y' + 2y = x^2$$

2-го порядку

$$y'' = xy$$

3-го порядку

$$y''' + 2y' = 0$$

Диференційні рівняння

ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ n-ОГО ПОРЯДКУ

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

F – певна функція від n+2 змінних, $n \geq 1$

x – незалежна змінна, y(x) – функція, яку шукаємо

$y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ - її похідні

Визначення

Диференційне рівняння n-ого порядку називається розв'язаним відносно старшої похідної, якщо воно має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Диференційні рівняння

Визначення

Розв’язком диференційного рівняння (1) називається функція y(x), яка має похідні до n-ого порядку включно, і така, що її підстановка у рівняння (1) перетворює його у тотожність

Приклад

Розв’язком рівняння $y' = 2y$ є функция

$$y(x) = e^{2x}$$

$$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$y = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2e^{2x} = 2e^{2x}$$

Диференційні рівняння

Задача щодо знаходження розв'язку певного диференційного рівняння називається **задачою інтегрування** даного диференційного рівняння

График розв'язку диференційного рівняння називається **інтегральною кривою**

Визначення

Загальним розв'язком диференційного рівняння (1) n-ого порядку називається такий його розв'язок

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

який є функцією змінної x та n довільних незалежних сталих $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Диференційні рівняння 1 порядку

ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ 1-ОГО ПОРЯДКУ

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

ДИФЕРЕНЦІЙНЕ РІВНЯННЯ 1-ОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ РОЗВ'ЯЗАНЕ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

f – певна функція двох змінних

Диференційні рівняння з розділеними змінними

ДИФЕРЕНЦІЙНЕ РІВНЯННЯ З РОЗДІЛЕНИМИ ЗМІННИМИ

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (5)$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$ - ЗАГАЛЬНИЙ ІНТЕГРАЛ

Приклад

рівняння з розділеними змінними

$$e^x dx + (y-1)dy = 0$$

загальний інтеграл

$$\int e^x dx + \int (y-1)dy = 0 \Rightarrow e^x + \frac{y^2}{2} - y = c$$

Диференційні рівняння з розділеними змінними

ДИФЕРЕНЦІЙНЕ РІВНЯННЯ З РОЗДІЛЕНИМИ ЗМІННИМИ

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0 \quad \textbf{(6)}$$

Рівняння (6) зводится до рівняння (5) шляхом почленного ділення на $Q_1(y)\cdot P_2(x) \neq 0$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$ **- ЗАГАЛЬНИЙ ІНТЕГРАЛ**

Приклад

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x},\, y(4) = 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = c_1 - \ln|x| = \ln c - \ln|x|$$

$$y = \frac{c}{x}$$ - загальний розв'язок

$$y(4) = 1 \Rightarrow \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$ - частинний розв'язок

Лінійні диференційні рівняння 1-ого порядку

Визначення

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x) \qquad \textbf{(9)}$$

де p(x) і g(x) – задані функції

Особливість: функція у і її похідна y' входять у рівняння окремо одна від іншої

МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГ РІВНЯННЯ (9)

МЕТОД БЕРНУЛЛІ

МЕТОД ЛАГРАНЖА

Приклад

$$\boxed{y' + \frac{2y}{x} = 5x^2}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2}{x} uv = 5x^2 \Rightarrow u' \cdot v + u(v' + \frac{2}{x} v) = 5x^2$$

$$v' + \frac{2}{x} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{x^2}} \qquad u' \cdot \frac{1}{x^2} = 5x^2 \Rightarrow u' = 5x^4 \Rightarrow \boxed{u = x^5 + c}$$

$$\boxed{y = (x^5 + c)\frac{1}{x^2} = x^3 + \frac{c}{x^2}}$$

Лінійні однорідні диференційні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0} \quad (4)$$

p, q – дійсні числа

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ (4)

$$\boxed{y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)} \quad (5)$$

$y_1(x), y_2(x)$ - частинні розв'язки (4)

c_1, c_2 - довільні числа

Лінійні однорідні диференційні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами

МЕТОД ЕЙЛЕРА

Розв'язок рівняння (4) будемо шукати у вигляді:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x}, \ \lambda \text{ - невідоме число}}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \ \ y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Підставимо розв'язок у рівняння (4):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$$

Отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Лінійні однорідні диференційні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \quad \textbf{(6)}$$

Виподок 1:

$$D = p^2 - 4q > 0$$

λ_1, λ_2 - два різних дійсних кореня рівняння (6)

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

- розв’язки рівняння (4)

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$\boxed{y_o(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}} \quad \textbf{(7)}$$

Лінійні однорідні диференційні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \quad \textbf{(6)}$$

Випадок 2:

$$D = p^2 - 4q = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$ - розв'язки рівняння (6)

$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$ - розв'язки рівняння (4)

$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}$

$$\boxed{y_o(x) = c_1 x e^{-\frac{p}{2}x} + {}_2 \qquad {}^{-\frac{p}{2}x}} \quad \textbf{(8)}$$

Лінійні однорідні диференційні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \quad \textbf{(6)}$$

Випадок 3: $D = p^2 - 4q < 0$

$\lambda_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm i\sqrt{-\dfrac{D}{4}}$ - два різних комплексних розв'язка рівняння (6)

$$\boxed{\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{-\frac{D}{4}}}$$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$

- розв'язки рівняння (4)

$$\boxed{y_o(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)} \quad \textbf{(9)}$$

Приклад

$$\boxed{y'' - 2y' + 2y = 0}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$y_1 = e^x \sin x, \qquad y_2 = e^x \cos x$$

$$y_{oo}(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

Література

1. Минорский В.П.
   «Сборник задач по высшей математике».
   «Наука», 1971, 852 с.
2. Стрижаченко А.В. та ін.
   «Высшая математика и статистика».
   Харьков, НФаУ, 2017, 232 с.

3. Гобуненко Б.Ф. та ін.
   «Теорія ймовірностей і статистичні методи обробки результатів спостережень».
   Харків, НФаУ, 2002, 188 с.

4. Гмурман В.Е.
   «Теория вероятностей и математическая статистика».
   Учебное пособ. для вузов. 1998, 479 с.

5. Гмурман В.Е.
   «Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистики».
   Учебное пособ. для вузов. 1998, 400 с.

Дякую за увагу