Формула полной вероятности

Теорема

Вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события А, т.е.

$$\mathbf{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)$$

События H_i – ***гипотезы***

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$$

Задача 1.

Пусть имеются три одинаковые урны с таким составом шаров:
- 2 белых и 1 черный;
- 3 белых и 2 черных;
- 1 белый и 3 черных.

Какова вероятность того, что извлеченный из произвольно взятой урны шар - белый?

Событие А — *«извлечен белый шар»*

H_i – *«извлечен шар из i-ой урны»*

$P(H_i) = \frac{1}{3}$,

$P_{H_1}(A) = \frac{2}{3}$, $P_{H_2}(A) = \frac{3}{5}$ и $P_{H_3}(A) = \frac{1}{4}$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \ldots = \frac{91}{180}$$

Задача 2.

Имеются 4 партии ламп по 10, 20, 30 и 40 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равны для каждой партии соответственно 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из 100 данных ламп проработает заданное время?

Событие А — *«лампа проработает заданное время»*

H_i – *«лампа из i-ой партии»*

$P(H_1) = 0{,}1,\ P(H_2) = 0{,}2,\ P(H_3) = 0{,}3,\ P(H_4) = 0{,}4$

$P_{H_1}(A) = 0{,}6,\ \ P_{H_2}(A) = 0{,}7,\ \ P_{H_3}(A) = 0{,}8,\ P_{H_4}(A) = 0{,}9$

$P(A) = \ 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + \ \ 0{,}4 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}8$

Задача 3.

15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса каждый, причём вопросы не повторяются. Студент знает 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на 1 вопрос билета и на один дополнительный вопрос.

Событие А — *«студент сдал экзамен»*

H_1 – *«знал оба вопроса»*
H_2 – *«знал 1-й вопрос и не знал 2-й»*
H_3 – *«не знал 1-й вопрос и знал 2-й»*
H_4 – *«не знал оба вопроса»*

$$P(H_1) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29}, \quad P_{H_1}(A) = 1$$

$$P(H_2) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{24}{28}$$

$$P(H_3) = \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29}, \quad P_{H_3}(A) = \frac{24}{28}$$

$$P(H_4) = \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29}, \quad P_{H_4}(A) = 0$$

Задача 7.

В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 – с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок при выстреле из винтовки с оптикой поразит мишень, равна 0,95, а без оптики – 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: он стрелял из винтовки с оптикой или без?

Событие А — *«стрелок поразил цель»*

$P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$

$P_{H_1}(A) = 0{,}95$

$P_{H_2}(A) = 0{,}8$

H_1 – *«стрелял из оптической винтовки»*
H_2 – *«стрелял из простой винтовки»*

$$P_A(H_1) = \frac{19}{43} \qquad P_A(H_2) = \frac{24}{43}$$

Домашнее задание на 07.12.23:

1. Три фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 40%, вторая – 35%, третья – 25%. Брак для первой фабрики составляет 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Купленное стекло оказалось бракованным. Найти вероятность, что купленное стекло сделано: а) на первой фабрике; б) на второй фабрике.

2. Имеются два одинаковых по виду ящика, в которых лежат одинаковые по размеру кубики. В первом ящике 4 белых и 6 черных, во втором – 3 белых и 7 черных. Из наудачу выбранного ящика извлекли кубик, который оказался белым. Найти вероятность, что кубик извлечен из первого ящика.