



Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
кафедра начертательной геометрии и инженерной
графики

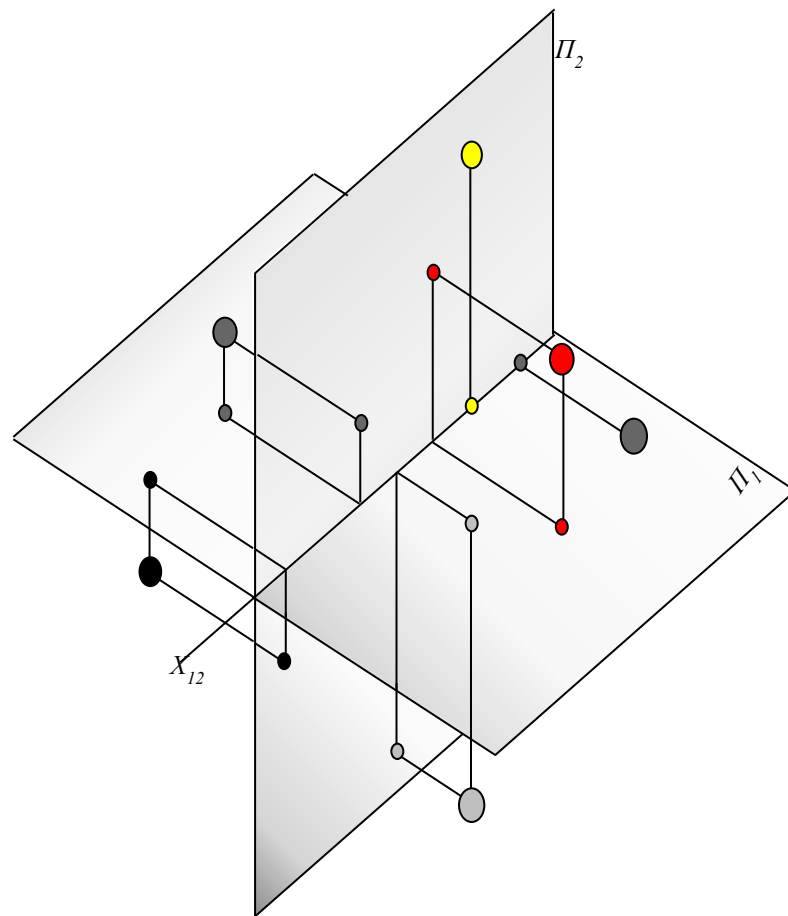
Начертательная геометрия

Тема 1

Методы проецирования

Проекции точки

Проекции прямой

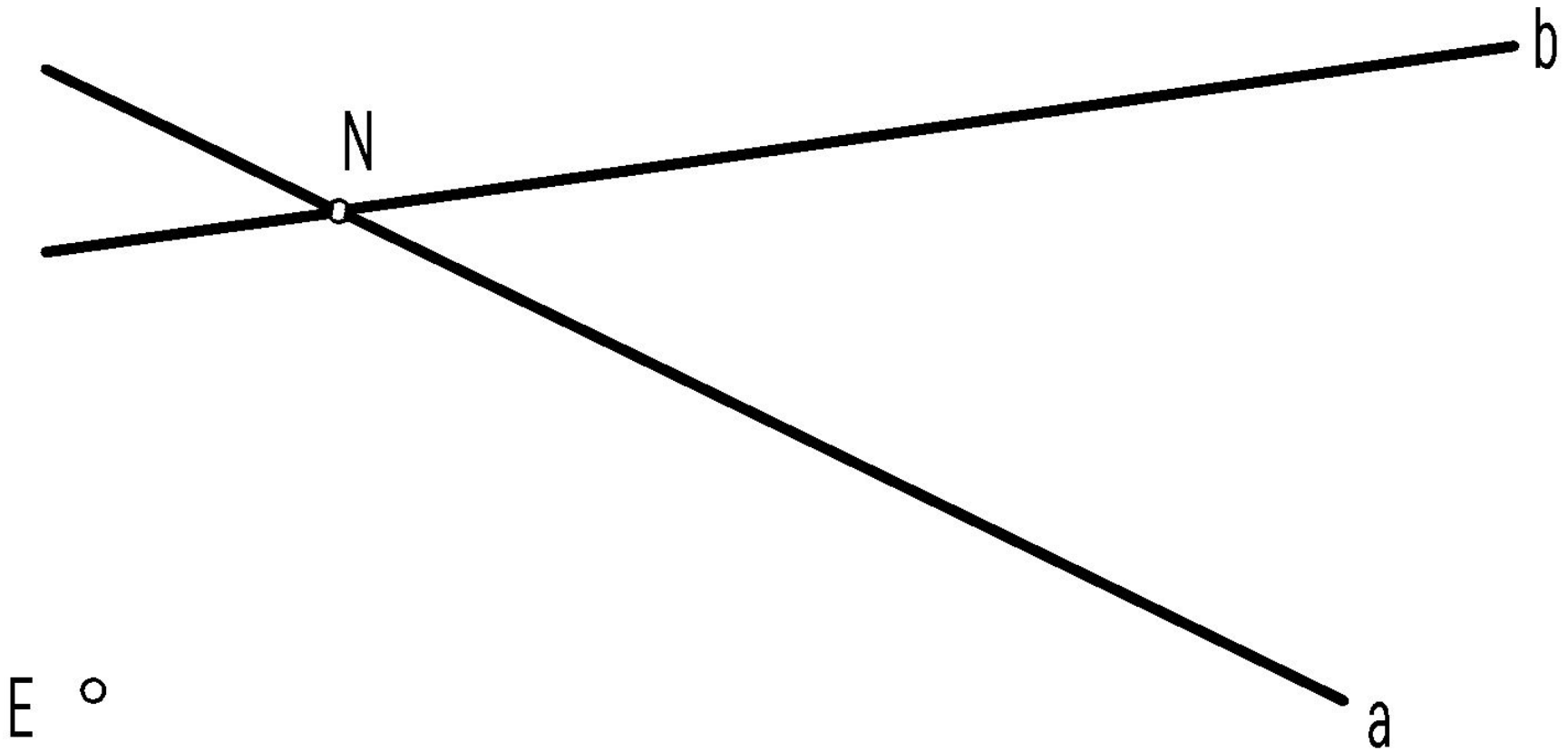


- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

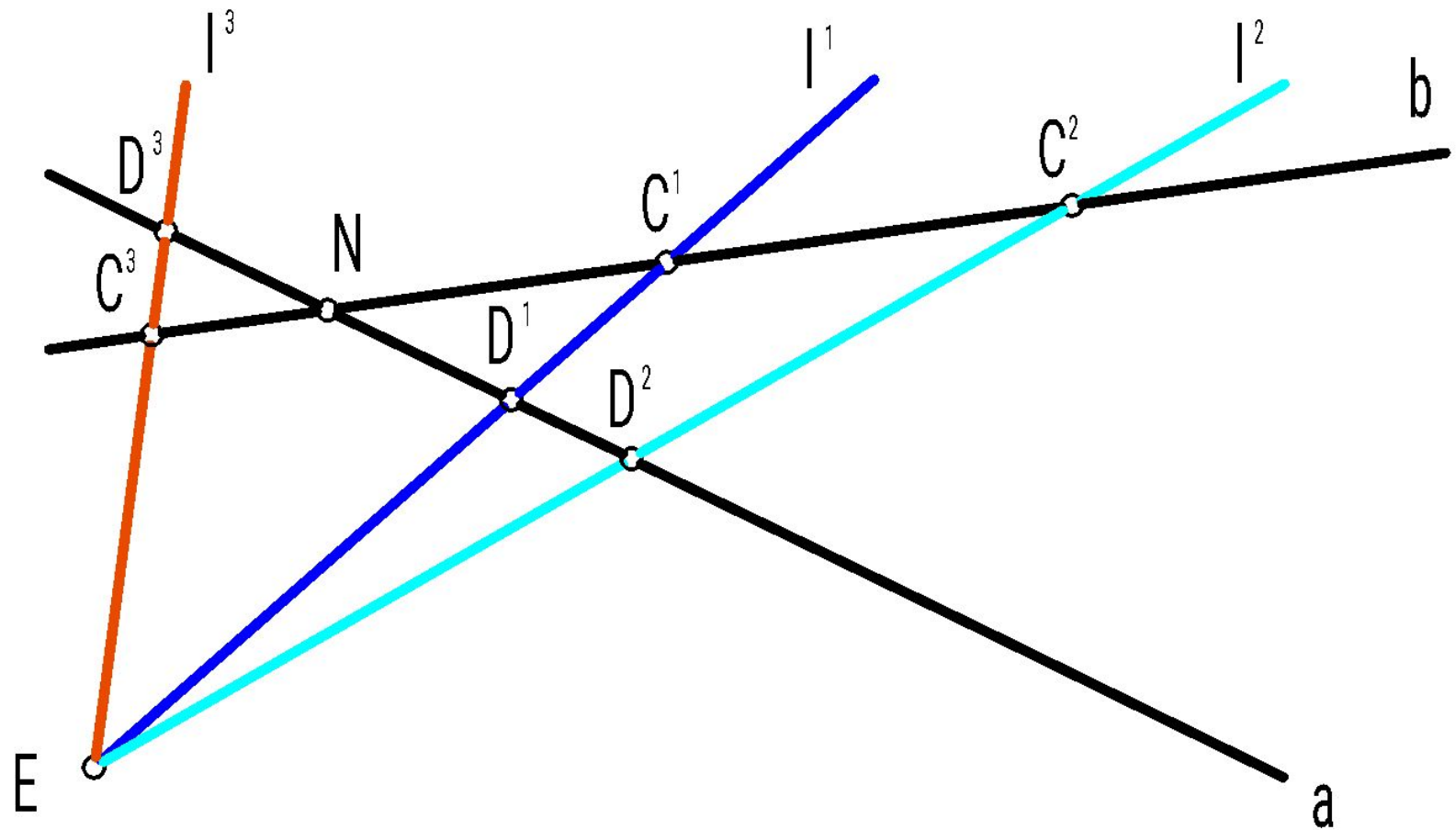
**Базовые
геометрические
элементы
начертательной
геометрии**

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь. Толщины и объема нет.

Проективное пространство

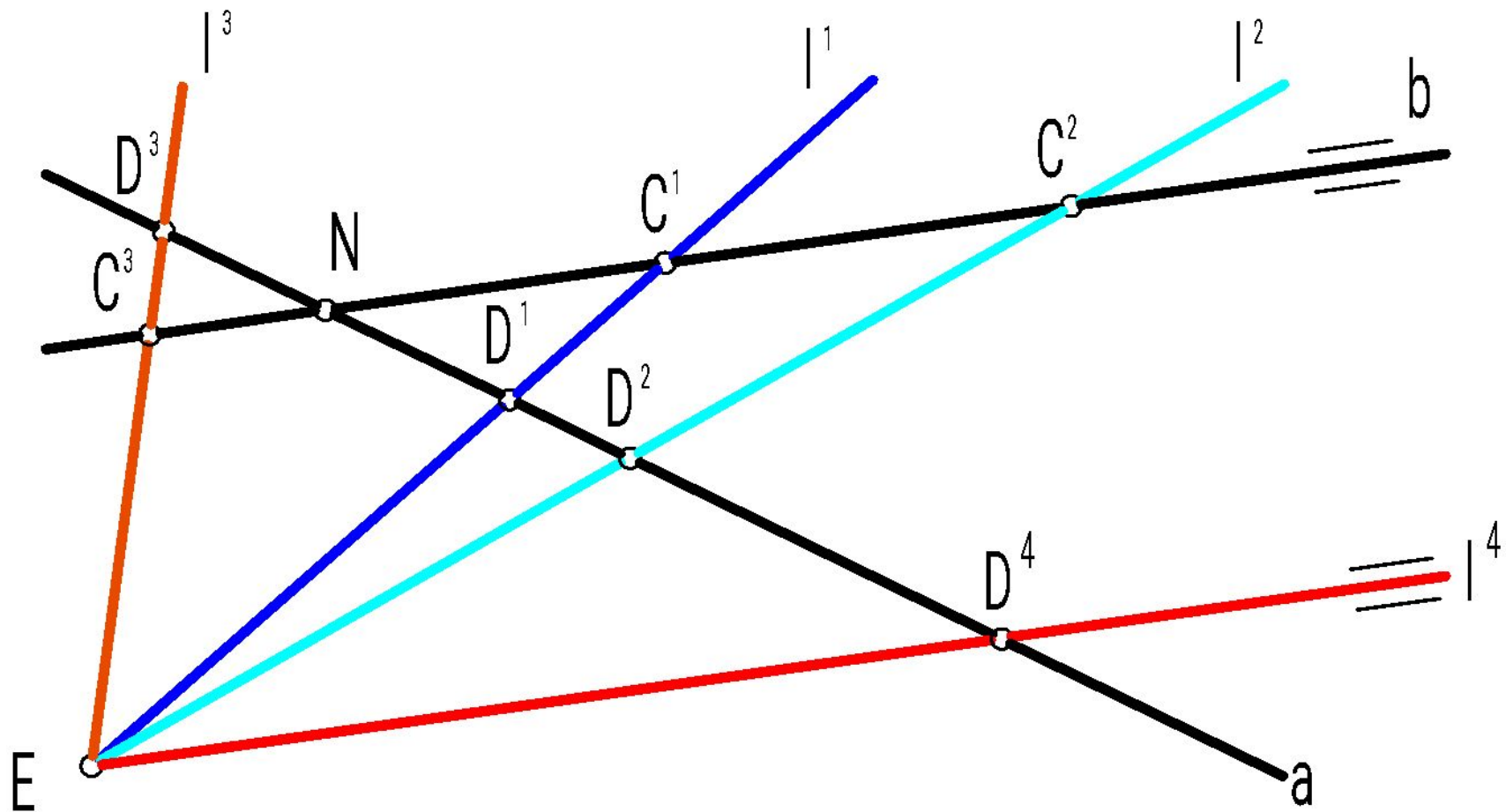


В плоскости заданы две пересекающиеся
прямые a и b и точка E .



В этой же плоскости через точку E проведем прямые l^1, l^2, l^3 пересекающие прямые a и b .

в точках D^1, D^2, D^3 и C^1, C^2, C^3 соответственно.
В результате получаем однозначное соответствие точек D^1, D^2, D^3 прямой a точкам C^1, C^2, C^3 прямой b .



Через точку E проведем прямую l^4 параллельно прямой b .

$$l^4 \cap a = D^4; \quad l^4 \parallel b \Rightarrow \text{~~red } l^4 \cap b~~}$$

Точке D^4 прямой a нет соответствующей точки C^4 прямой b .

Евклидово пространство неоднородно

Для устранения неоднородности
Евклидова пространства

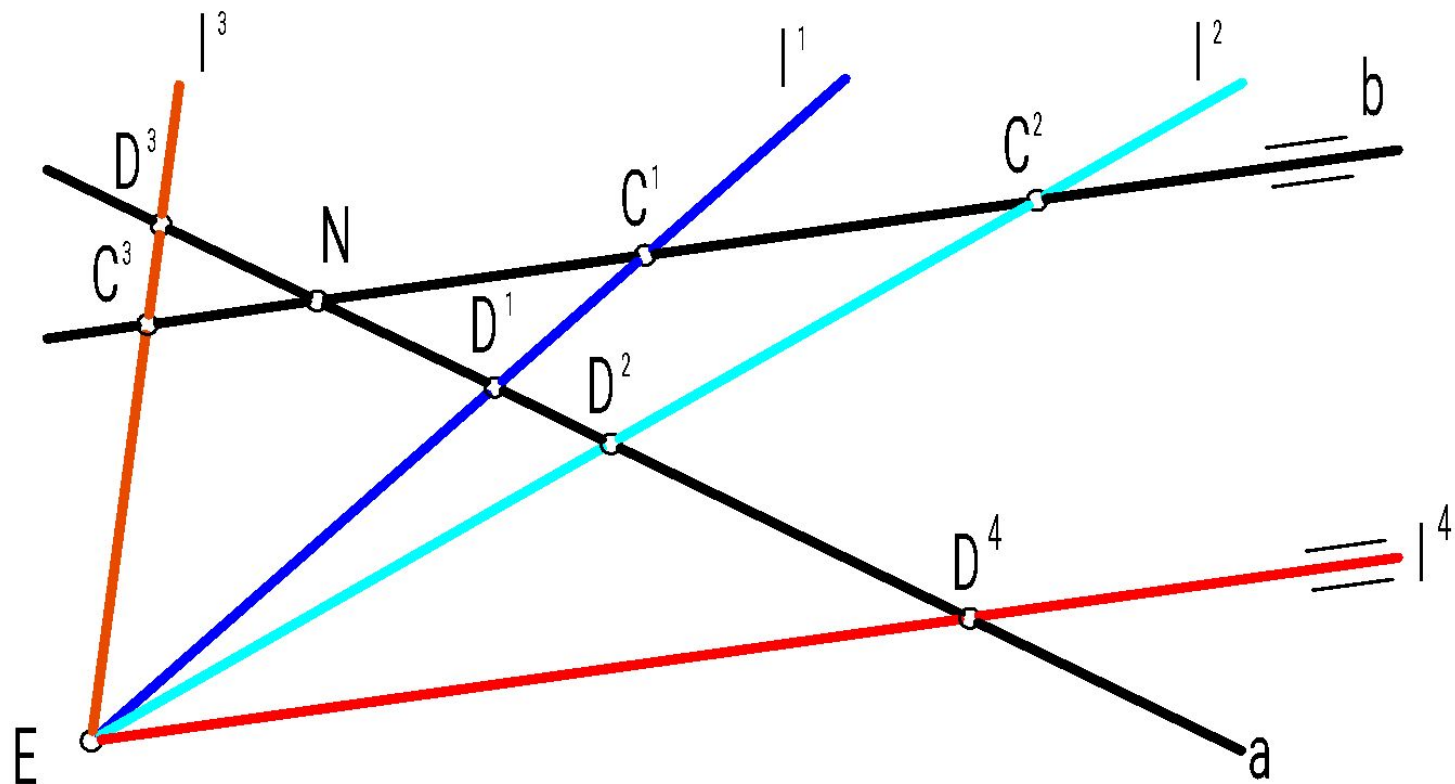
условно принято,

что параллельные между собой прямые

пересекаются

*в бесконечно удаленной точке F^∞ -
несобственной точке пространства.*

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m \cap n = F^\infty)$$



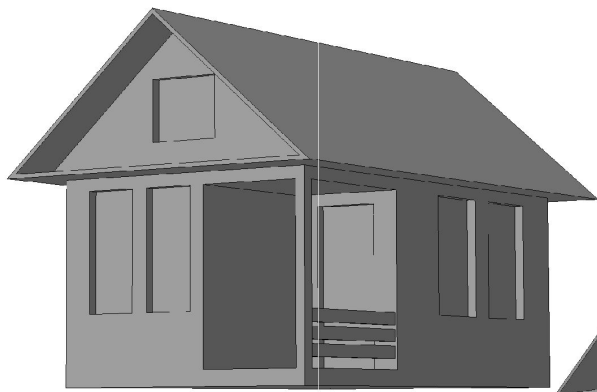
Тогда, если $l^4 \parallel b$, то $l^4 \cap b = C^\infty$.

Следовательно, точке D^4 прямой a однозначно соответствует несобственная точка C^∞ прямой b .

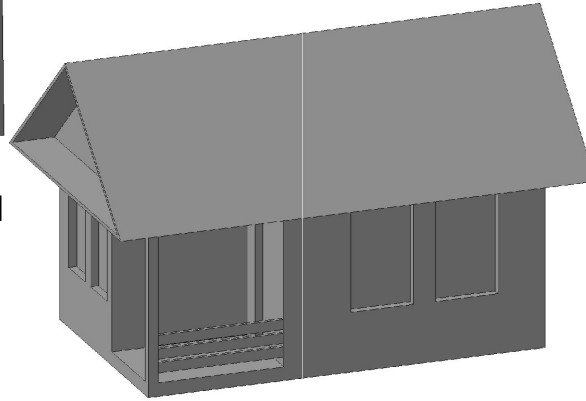
Евклидово пространство становится однородным.

***Евклидово пространство,
дополненное несобственными
элементами,
называют проективным.***

Метод проецирования



Перспективная проекция



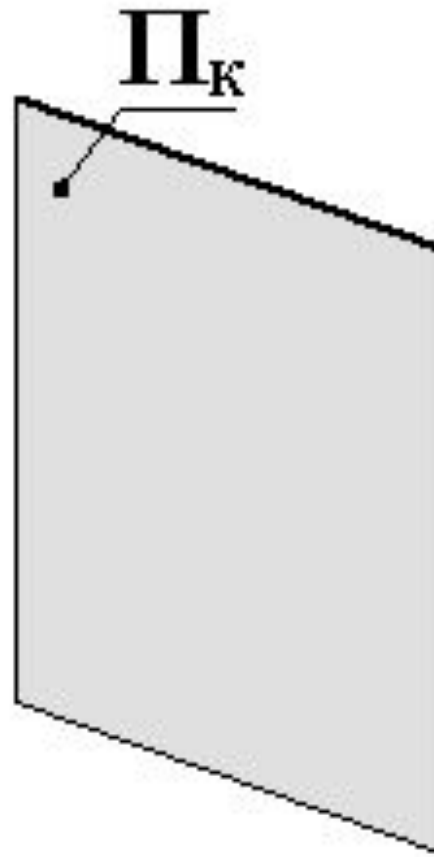
АксонOMETрическая проекция



Ортогональные проекции

Все изображения разные, но их объединяет то, что в основе их построения лежит один и тот же метод – **метод проецирования**.

Все изображения, построенные на основе метода проецирования, называются проекционными

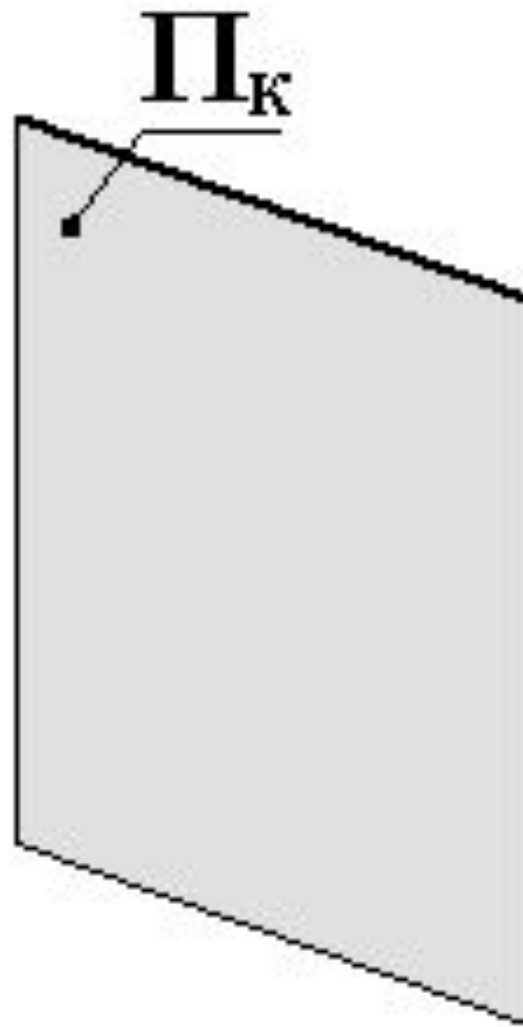


Задаем произвольную плоскость Π_k

Π_k – плоскость проекций

k – порядковый номер плоскости, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

S

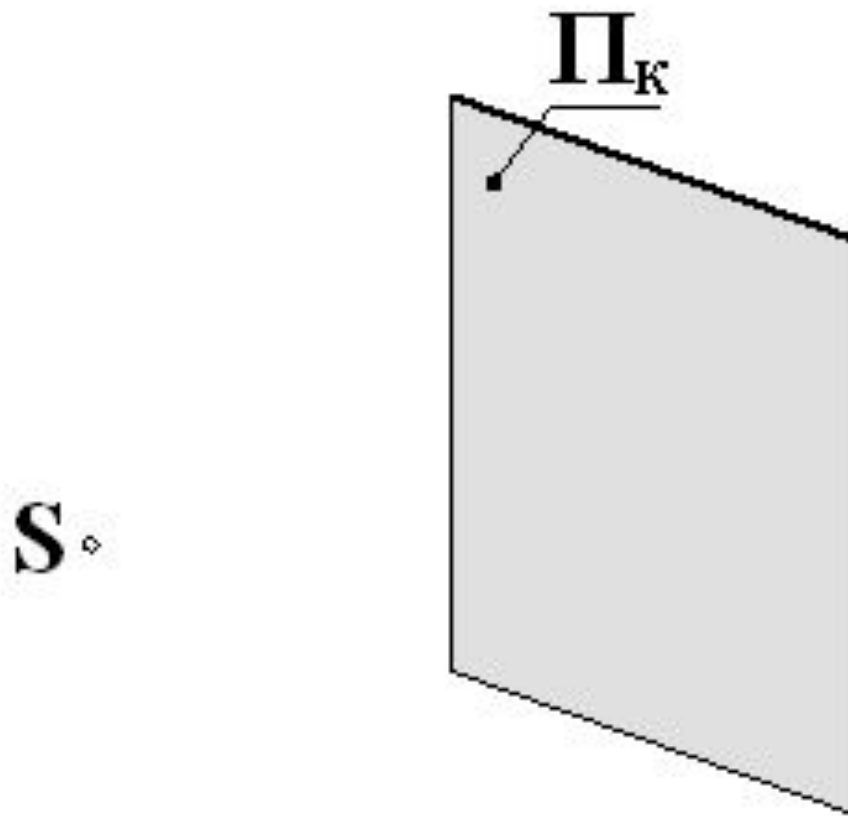


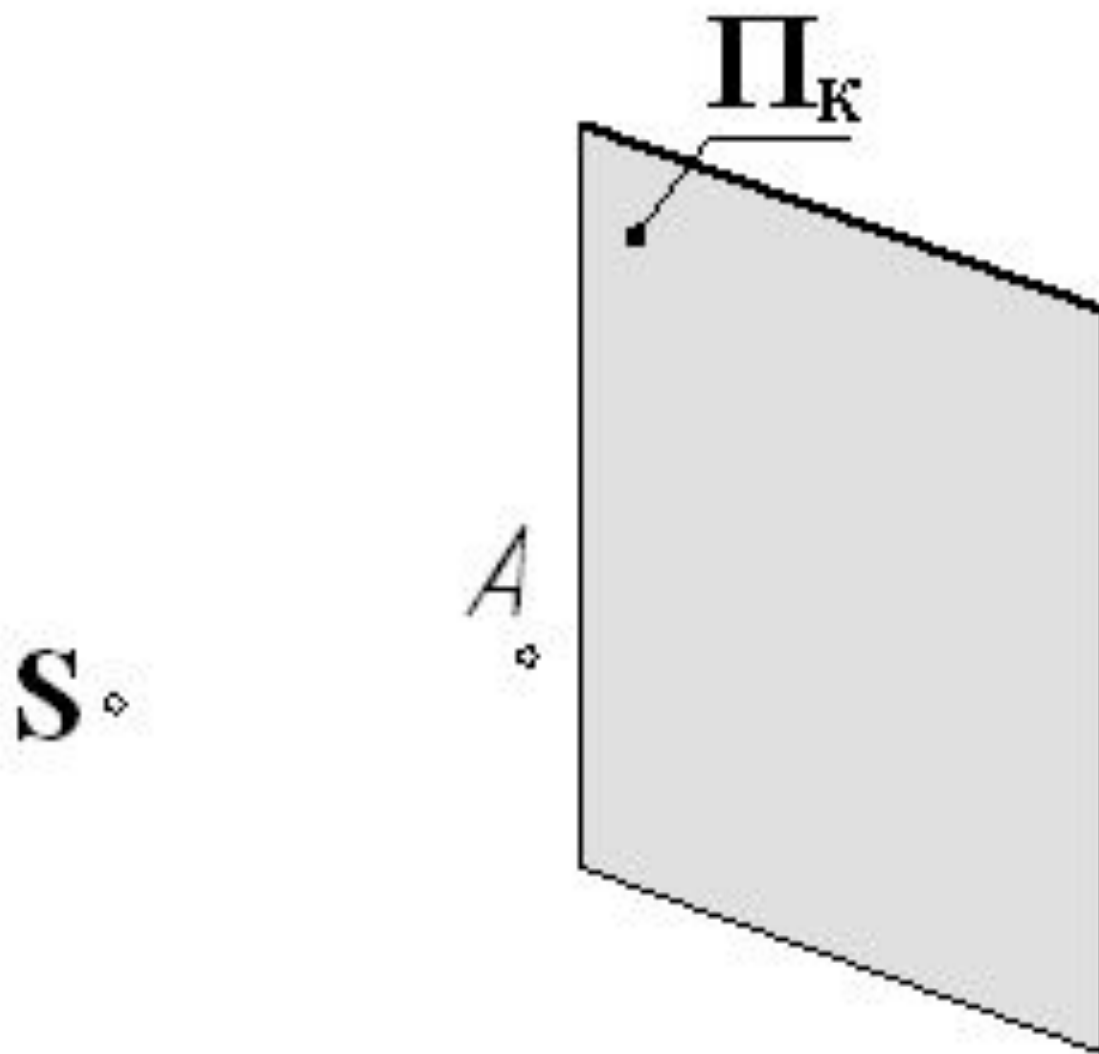
Задаем произвольную точку S
 S – центр проецирования

Аппарат проецирования

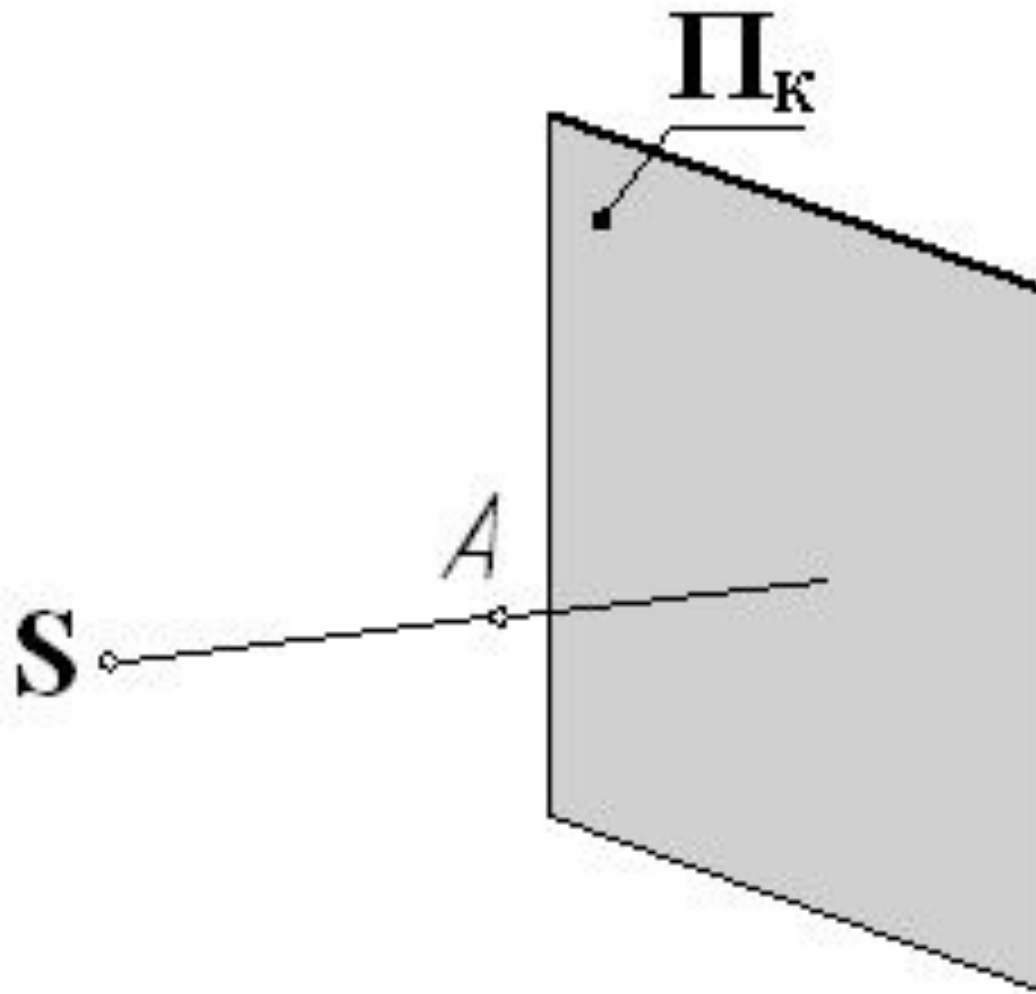
Π_K – плоскость проекций

S – центр проецирования



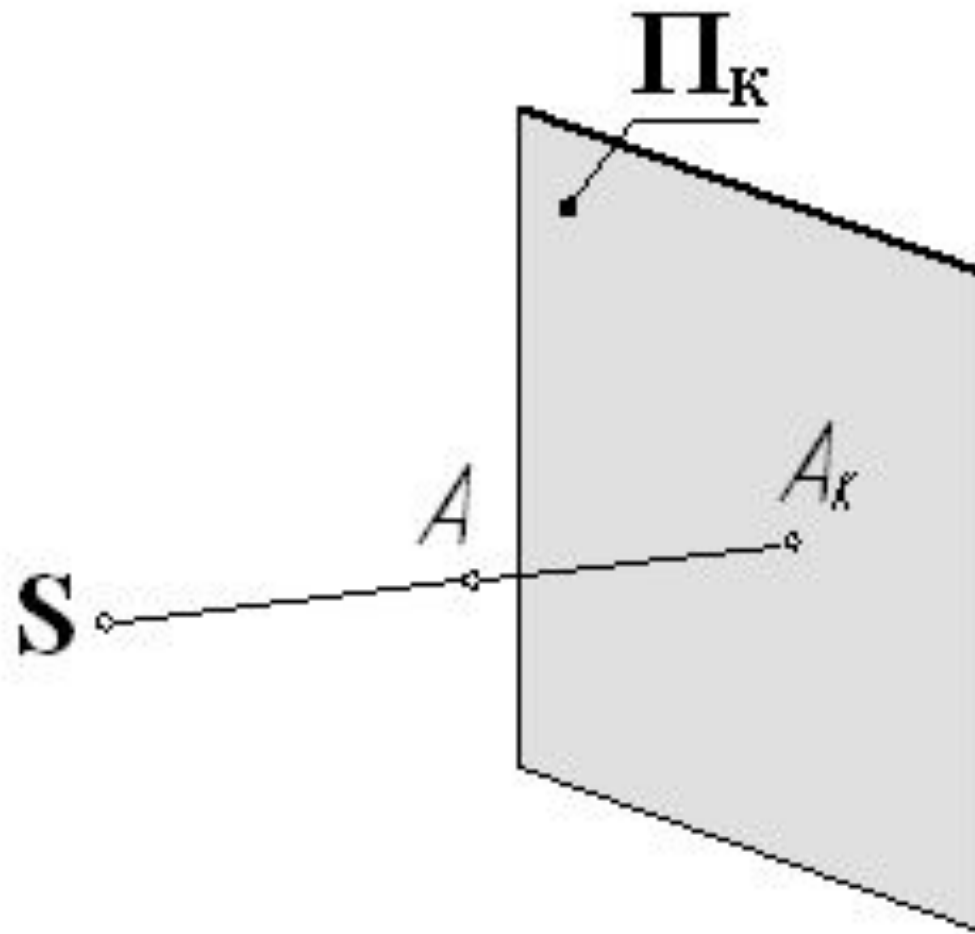


В качестве объекта взята произвольная точка A



Для получения изображения точки A на плоскости проекций Π_K проведем из центра проецирования S прямую SA .

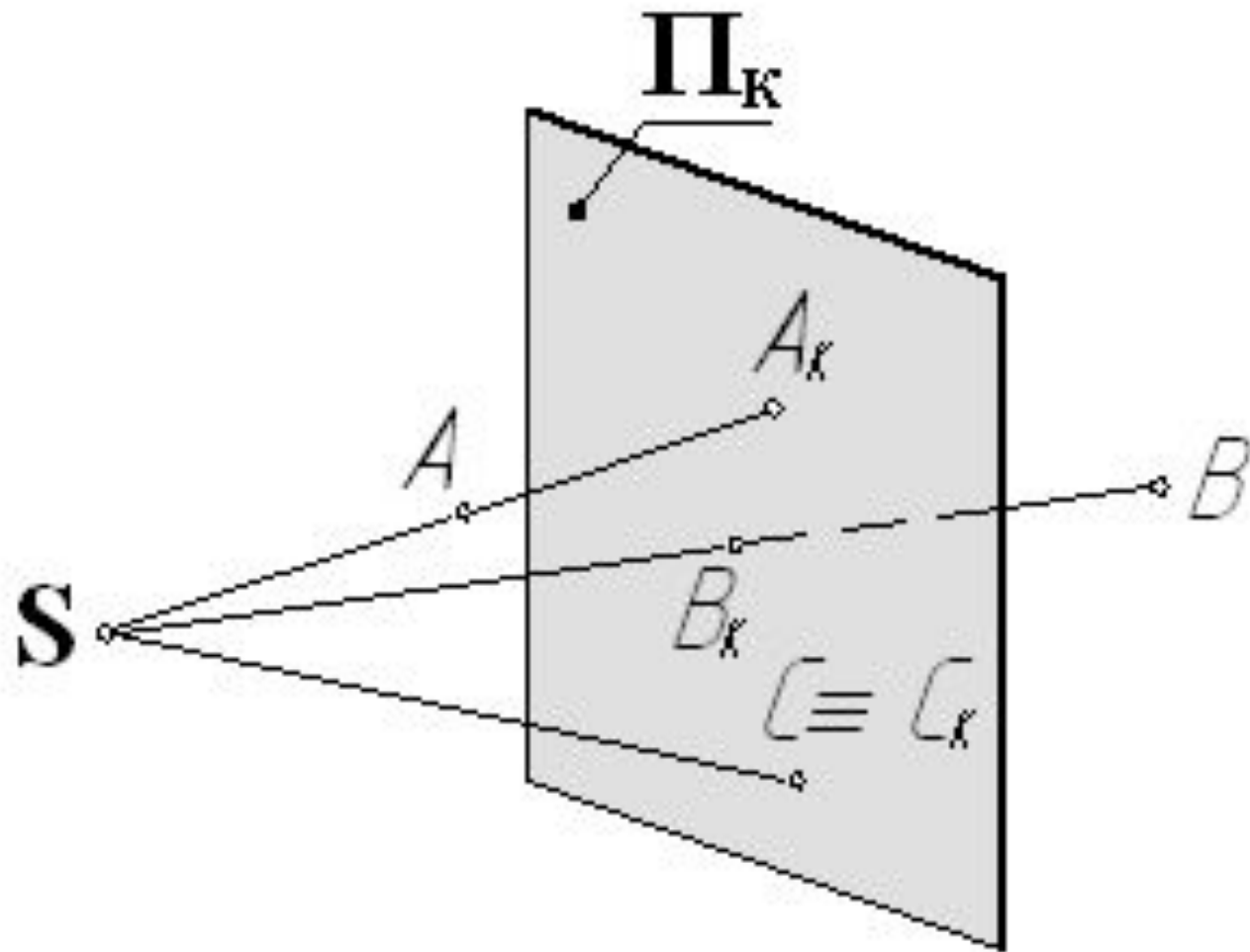
SA – проецирующая прямая (луч)



Определим точку пересечения проецирующей прямой SA с выбранной плоскостью проекций Π_K .

$$SA \cap \Pi_K = A_K$$

A_K — проекция точки A на плоскости проекций Π_K



Для любой точки пространства

$$SA \cap \Pi_K = A_K \quad SB \cap \Pi_K = B_K \quad SC \cap \Pi_K = C_K$$

$$SA \cap SB \cap SC \cap \dots = S$$

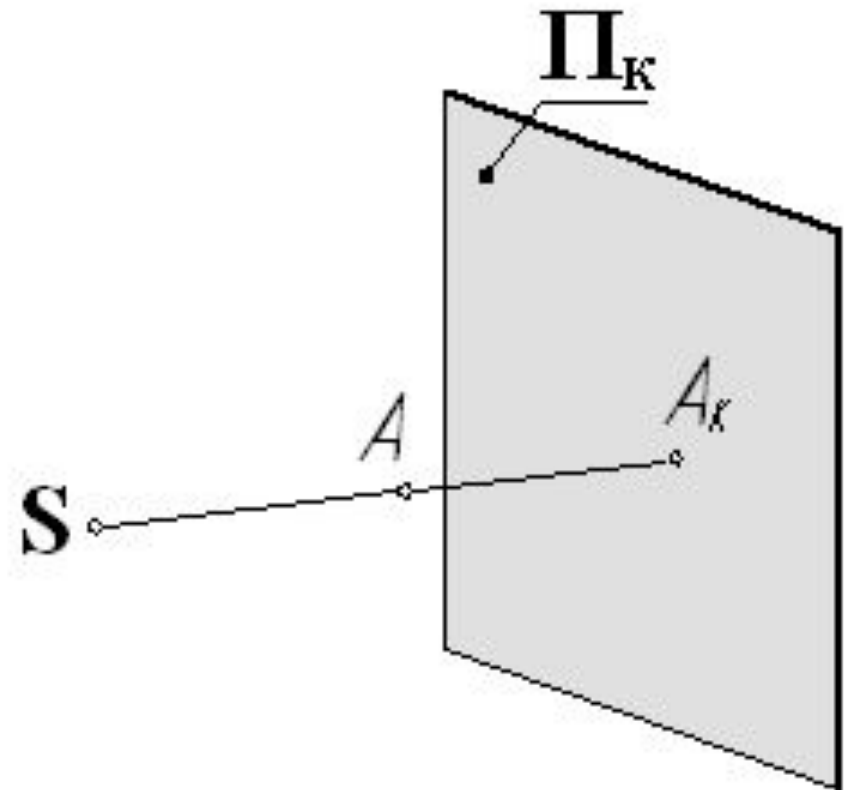
Метод проецирования

Π_K – плоскость проекций

S – центр проецирования

SA – проецирующая
прямая

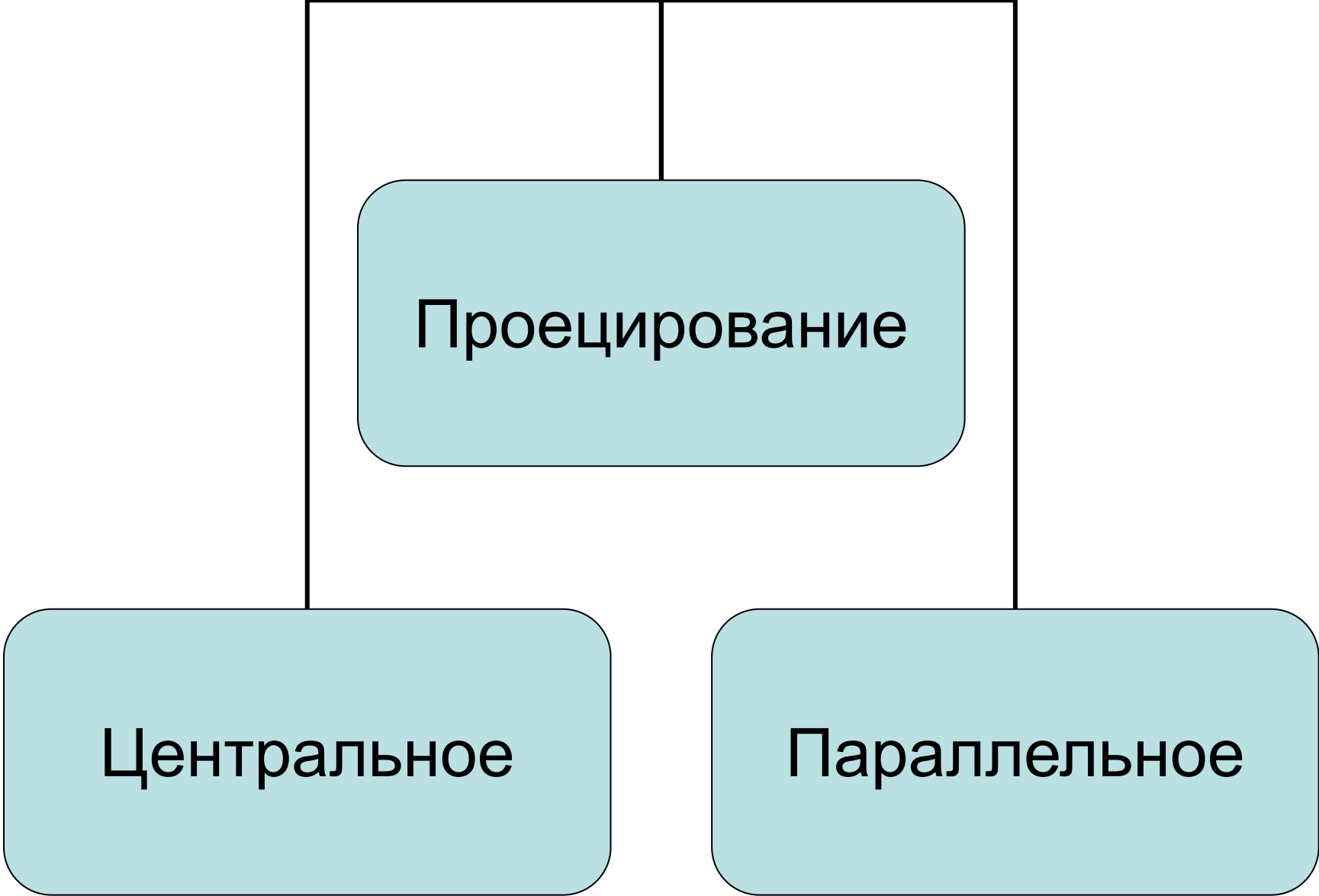
A – объект (точка)



$$SA \cap \Pi_K = A_K$$

A_K – проекция объекта (точки) A на плоскости
проекций Π_K

Варианты метода проецирования



Проецирование

Центральное

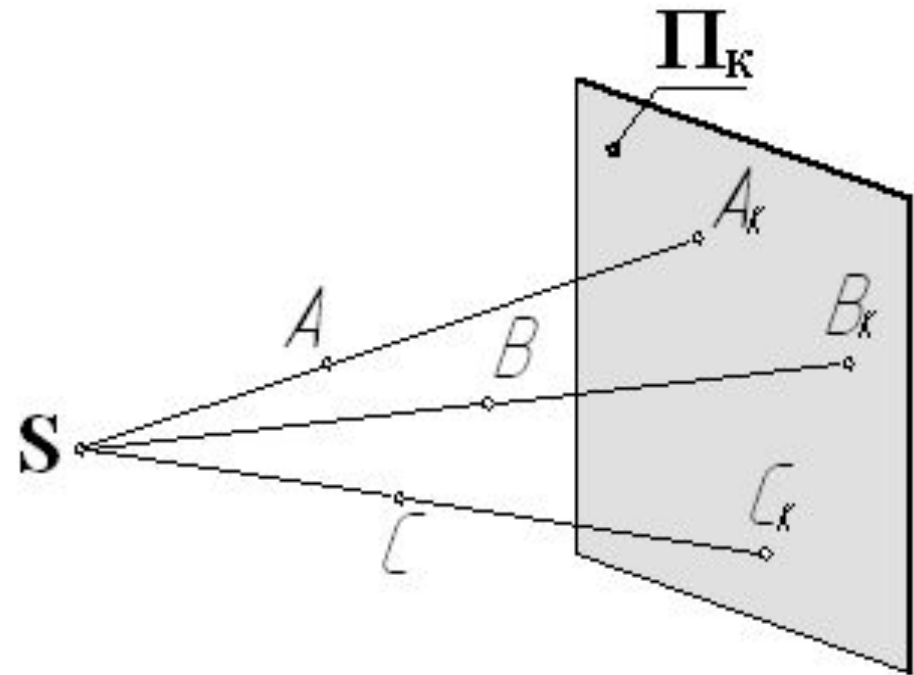
Параллельное

Центральное проецирование (коническое)

S (центр проецирования) –
реальная точка.

Расстояние от S до
плоскости проекций Π_k
измеримая величина.

$$SA \cap SB \cap SC \dots = S$$



Параллельное проецирование (цилиндрическое)

S (центр проецирования) –
несобственная точка.

$$S \equiv S^\infty$$

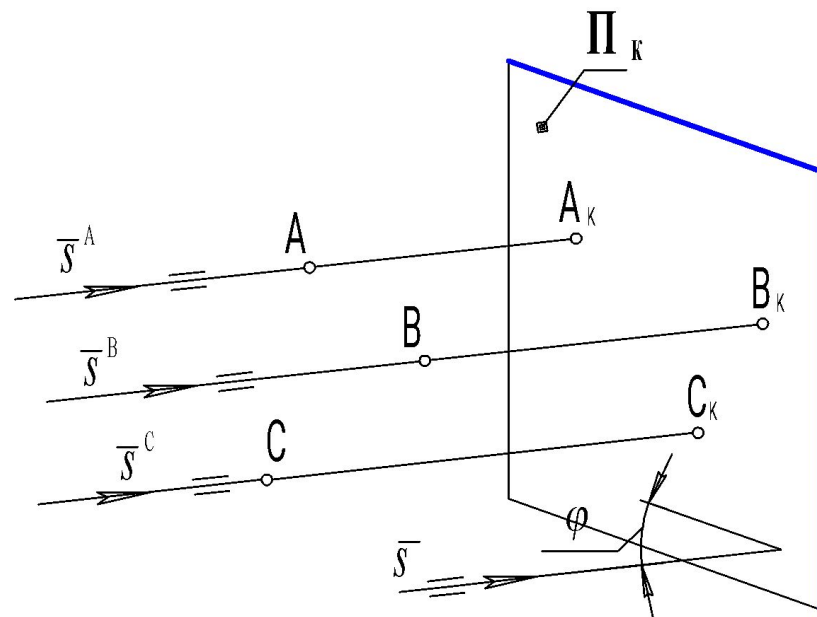
$$SA \cap SB \cap SC \dots = S^\infty$$

следовательно

$$S^\infty A \parallel S^\infty B \parallel S^\infty C \parallel \dots \parallel s$$

s – направление проецирования;

$$S^\infty \in s$$



```
graph TD; A[Параллельное проецирование] --> B[Косоугольное]; A --> C[Прямоугольное];
```

Параллельное проецирование

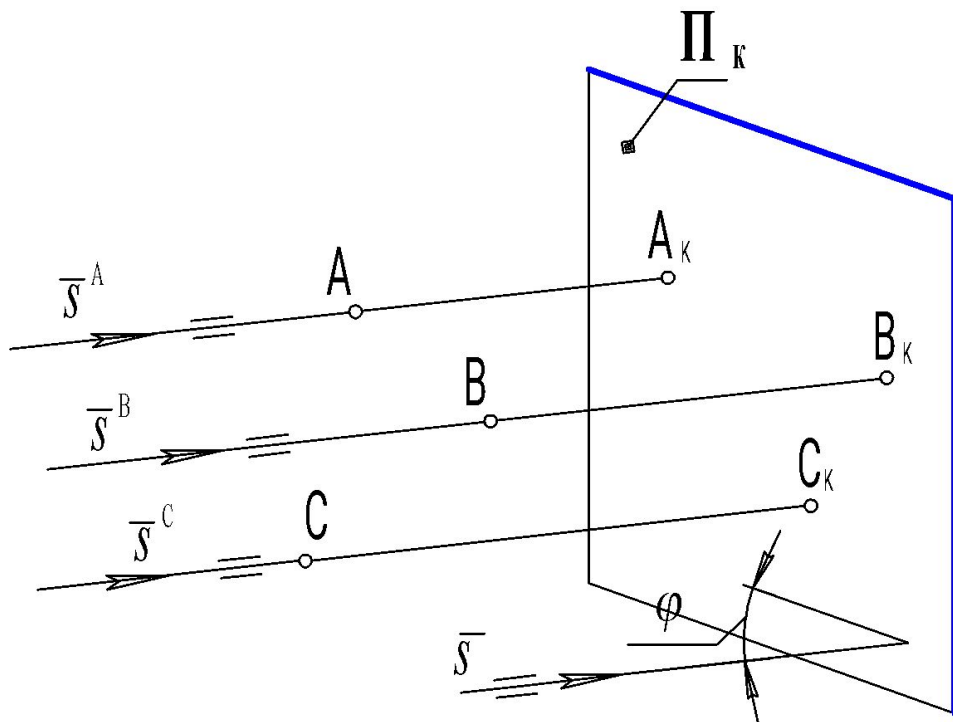
Косоугольное

Направление проецирования
не перпендикулярно
плоскости проекций

Прямоугольное

Направление проецирования
перпендикулярно
плоскости проекций

Параллельное проецирование



$$(s \wedge \Pi_K) = \angle \varphi$$

$\angle \varphi = 90^\circ \vee (s \perp \Pi_K) \Rightarrow$ проецирование
прямоугольное

(ортогональное)

$\angle \varphi \neq 90^\circ \vee (s \not\perp \Pi_K) \Rightarrow$ проецирование косоугольное

Проецирование

```
graph TD; A[Проецирование] --> B[Центральное]; A --> C[Параллельное]; B --> D[Косоугольное]; B --> E[Прямоугольное]; C --> F[Прямоугольное];
```

Центральное

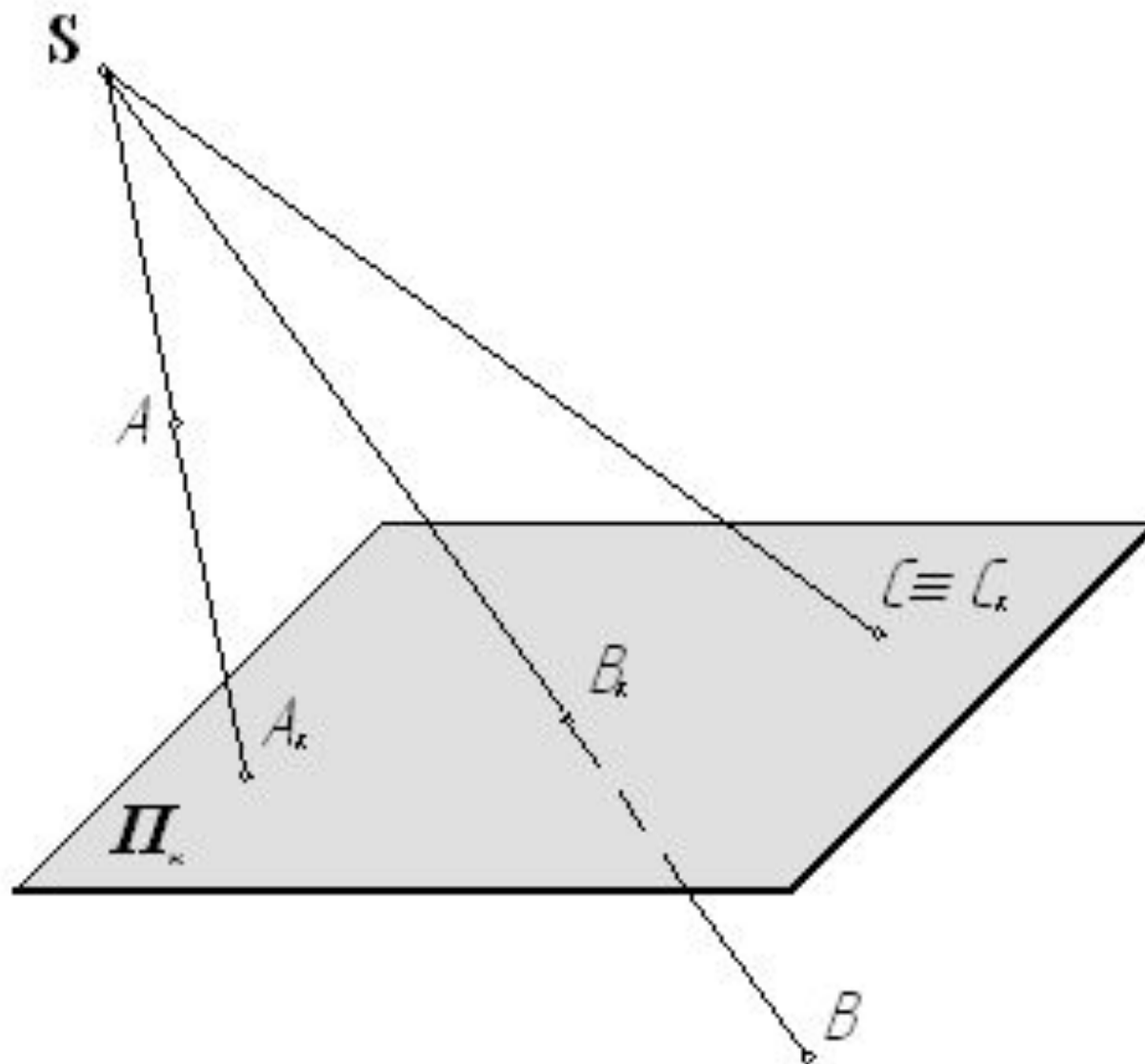
Параллельное

Косоугольное

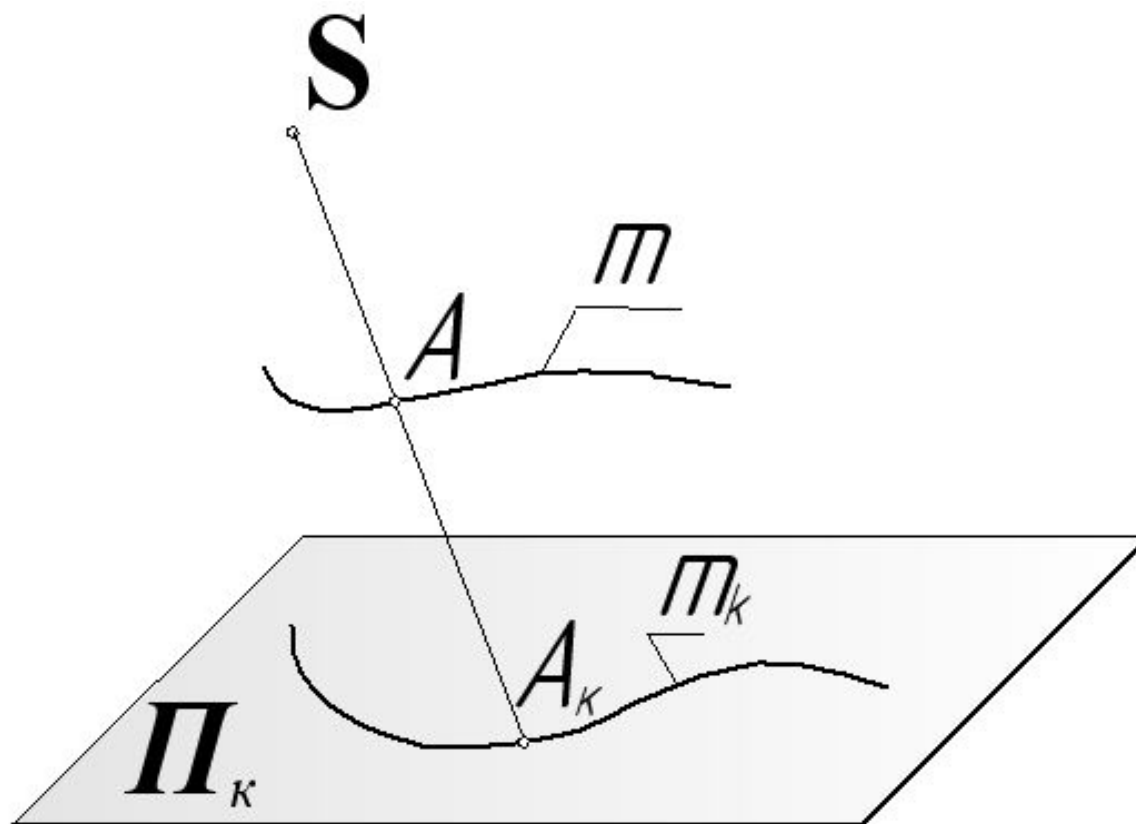
Прямоугольное

Свойства проецирования

Общие свойства проецирования

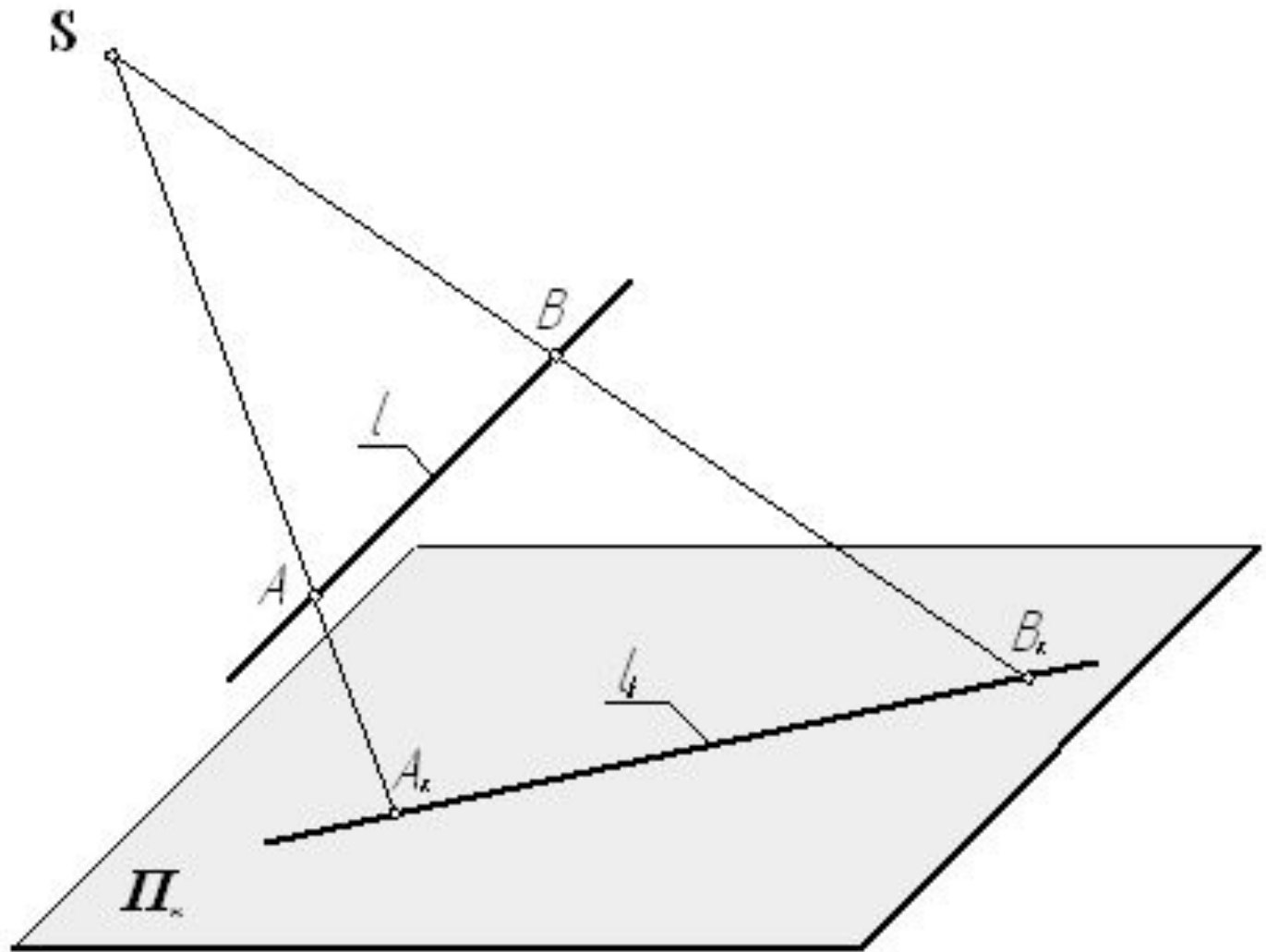


Проекция точки - точка

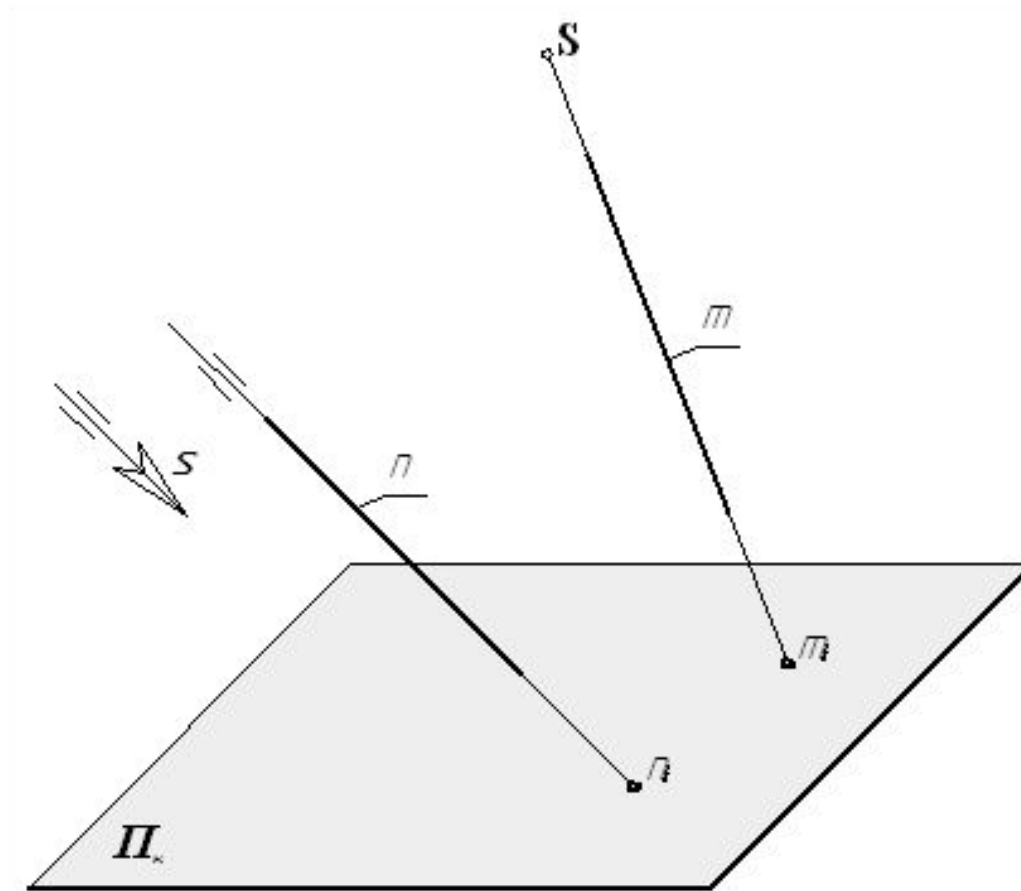


Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат одноименным проекциям этой линии.

$$A \in m \Rightarrow A_k \in m_k$$



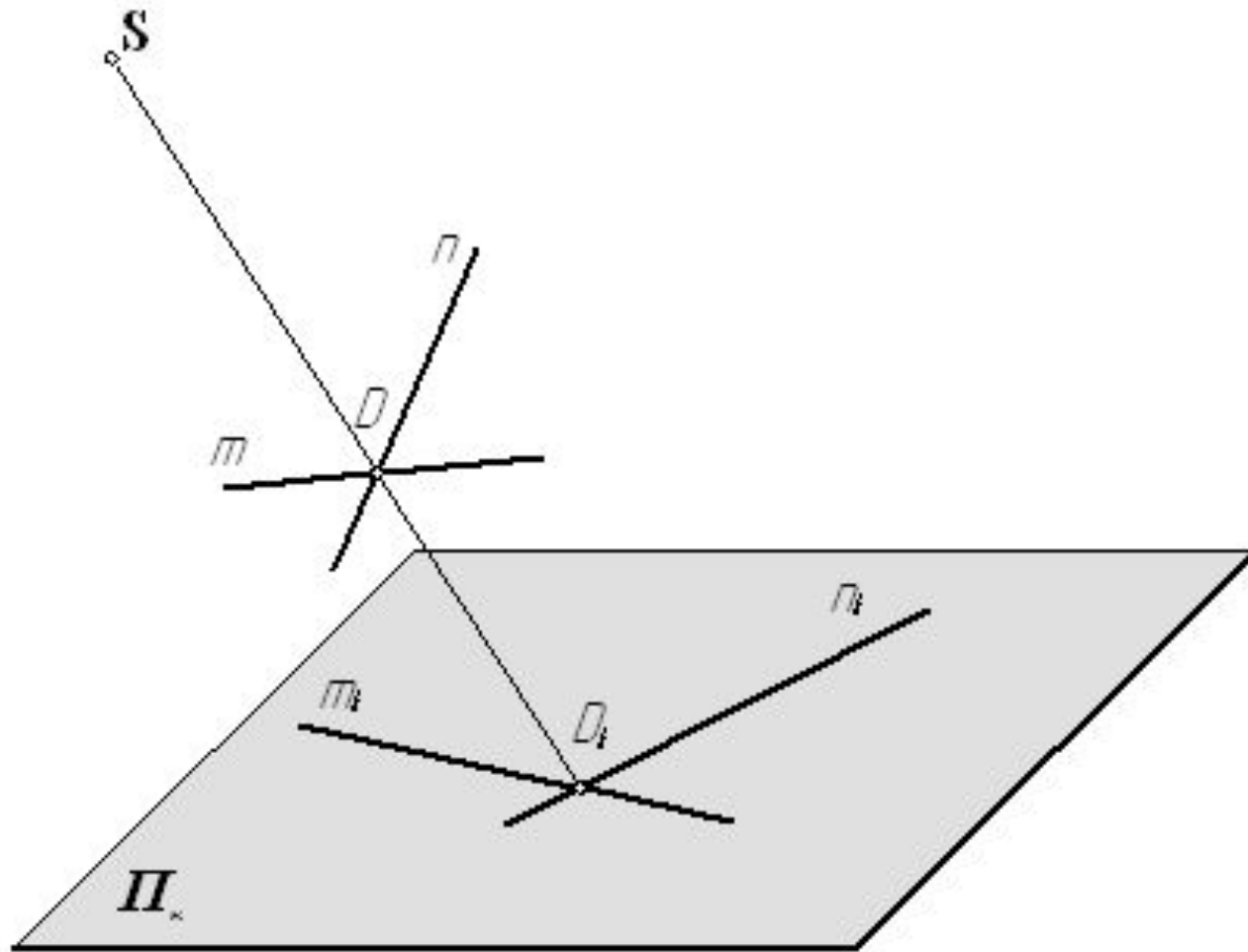
Проекция прямой, **в общем случае**, - прямая.



Если прямая проходит через центр проецирования S (или параллельна направлению проецирования s), то ее проекция вырождается в точку.

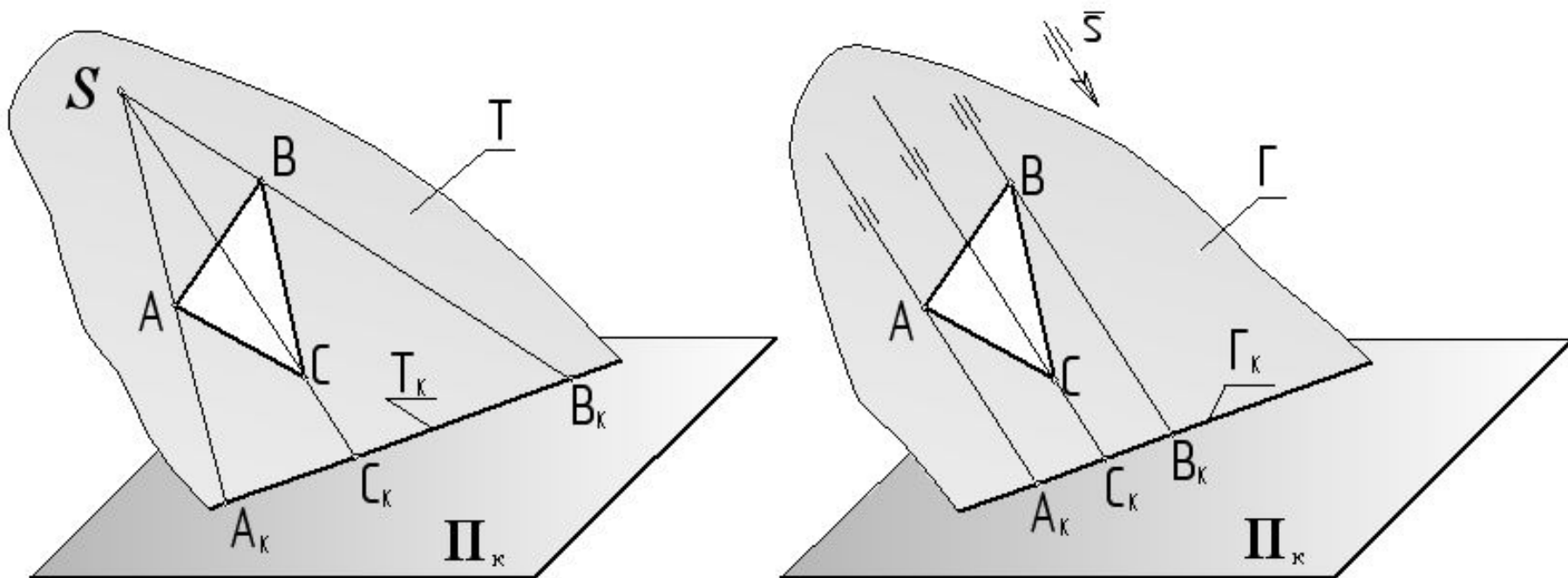
$$(S \in m) \vee (n \parallel \hat{s}) \Rightarrow (m_k \text{ и } n_k - \text{точка})$$

Такая прямая называется проецирующей.



Если прямые пересекаются, то пересекаются и их проекции. Точки пересечения прямых и их проекций лежат на одной проецирующей прямой.

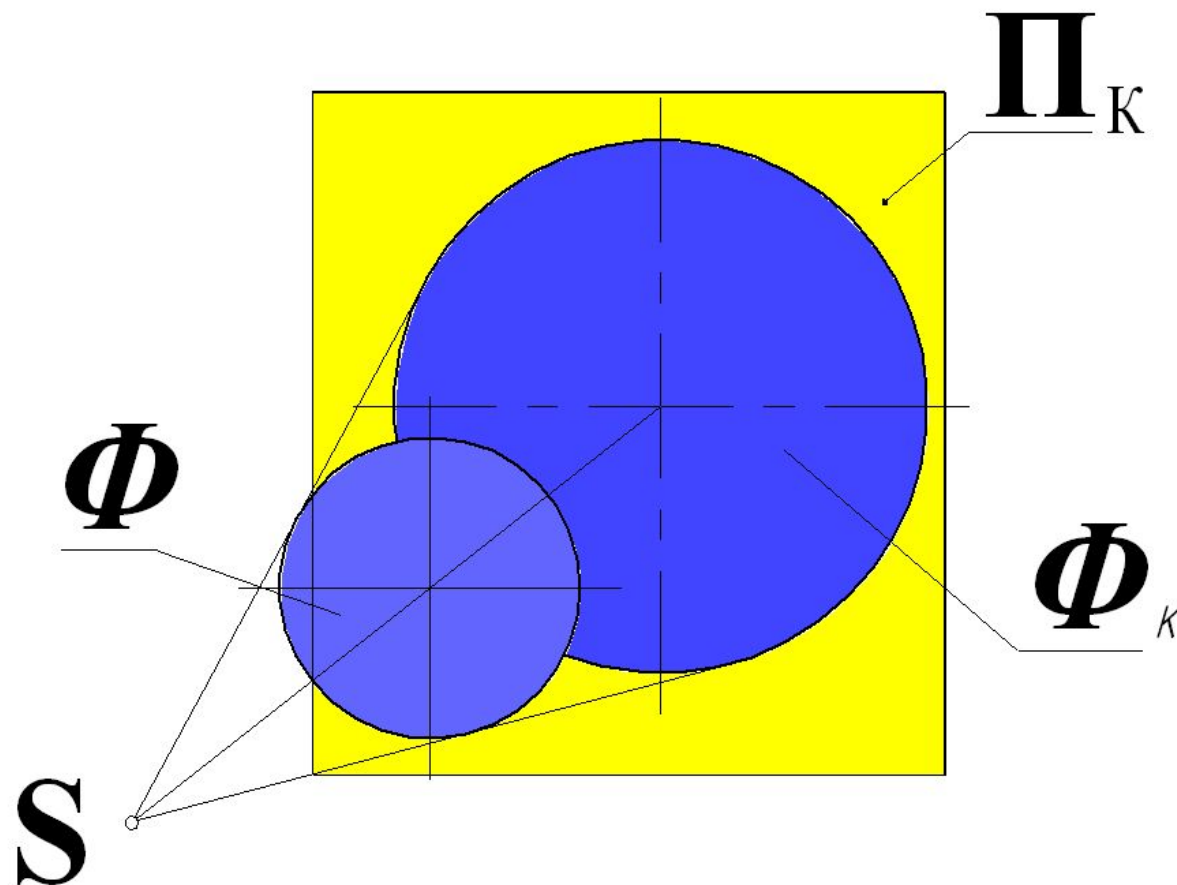
$$(m \cap n = D) \Rightarrow (m_k \cap n_k = D_k \wedge S \in DD_k)$$



Если плоскость проходит через центр проецирования (включает в себя) ($S \in T$), то проекция плоскости вырождается в прямую (T_k – прямая).

$$S \in T \Rightarrow T_k \text{ – прямая}$$

Такая плоскость называется проецирующей



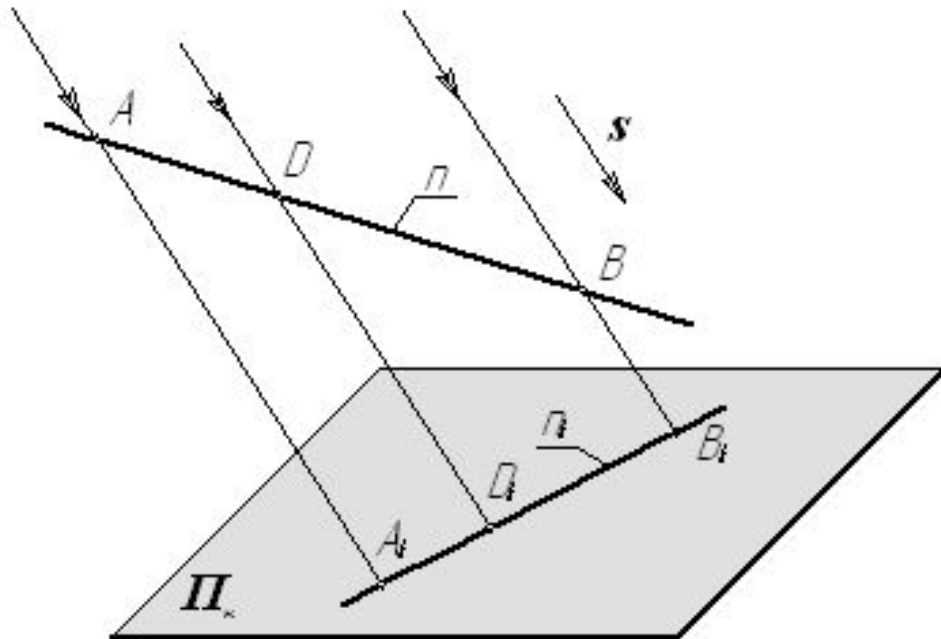
Если плоская фигура Φ параллельна плоскости проекций Π_K , то ее проекция Φ_K на эту плоскость подобна самой фигуре Φ .

$$\Phi \parallel \Pi_K \Rightarrow \Phi_K \sim \Phi$$

Инвариантные свойства параллельного проецирования

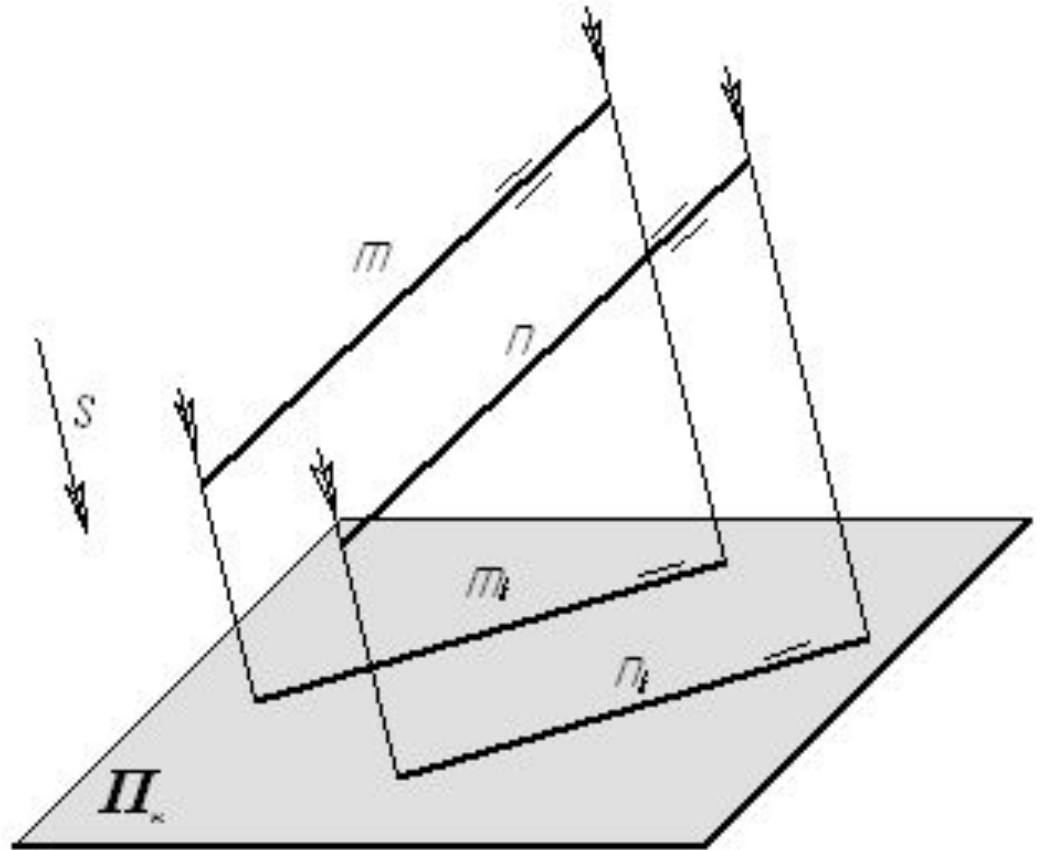
Если отрезок прямой разделен в заданном отношении, то в таком же отношении будет разделена и проекция этого отрезка.

$$AD : DB = A_K D_K : D_K B_K$$



Если прямые
параллельны, то их
одноименные
проекции также
параллельны.

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m_k \parallel n_k)$$



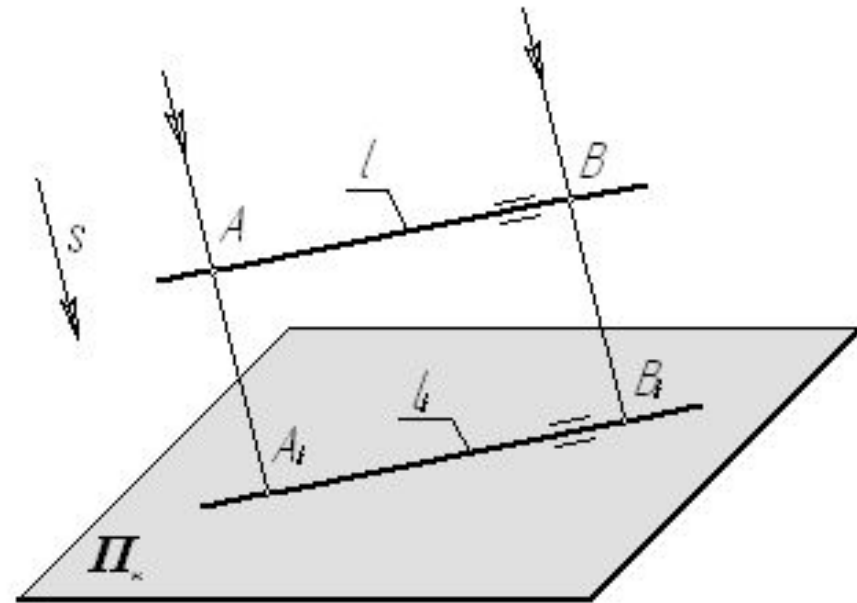
Если прямая параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости параллельна прямой, а отрезок, ей принадлежащий, отображается в истинную величину.

$$(l \parallel \Pi_k) \Rightarrow (l \parallel l_k)$$

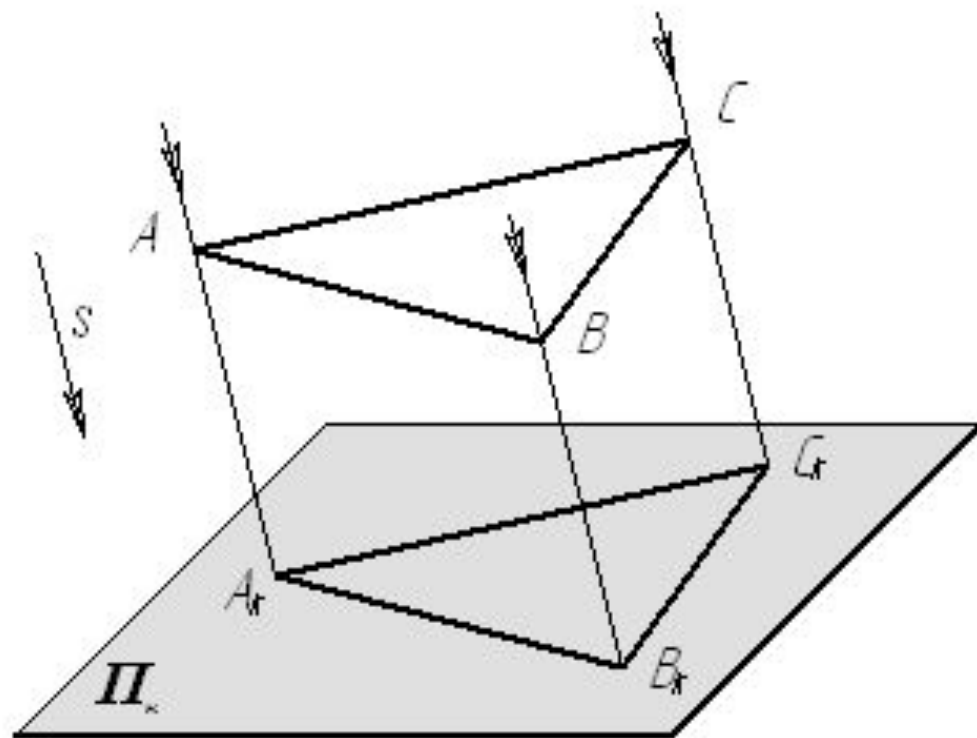
$$(AB \subset l) \Rightarrow (|AB| = |A_k B_k|)$$

Т.е. проекция отрезка конгруэнтна самому отрезку

$$A_k B_k \cong AB$$



Если плоская фигура
параллельна плоскости
проекций, то ее
проекция на этой
плоскости конгруэнтна
самой фигуре.

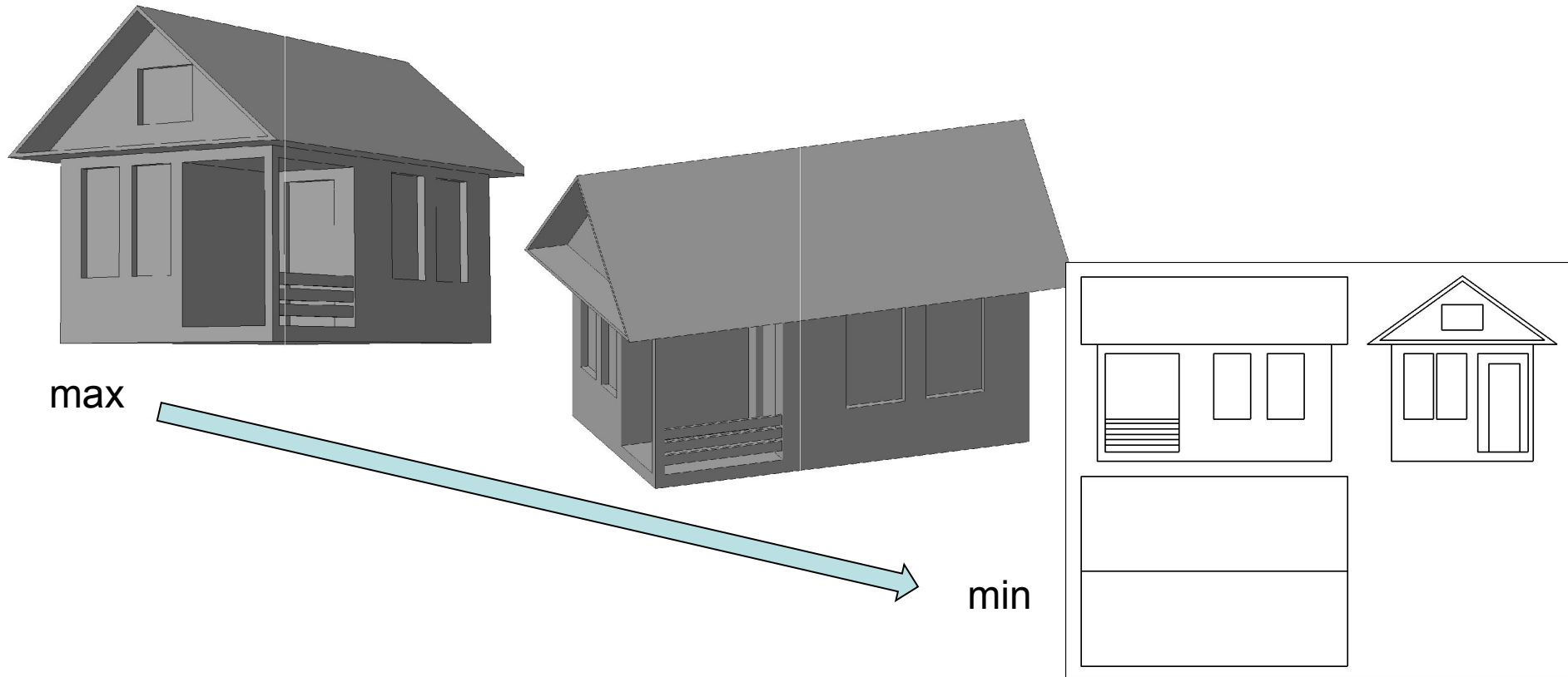


$$(\Phi(ABC) \parallel \Pi_k) \Rightarrow (\Phi_k(A_k B_k C_k) \cong \Phi(ABC))$$

Требования, предъявляемые к проекционному изображению

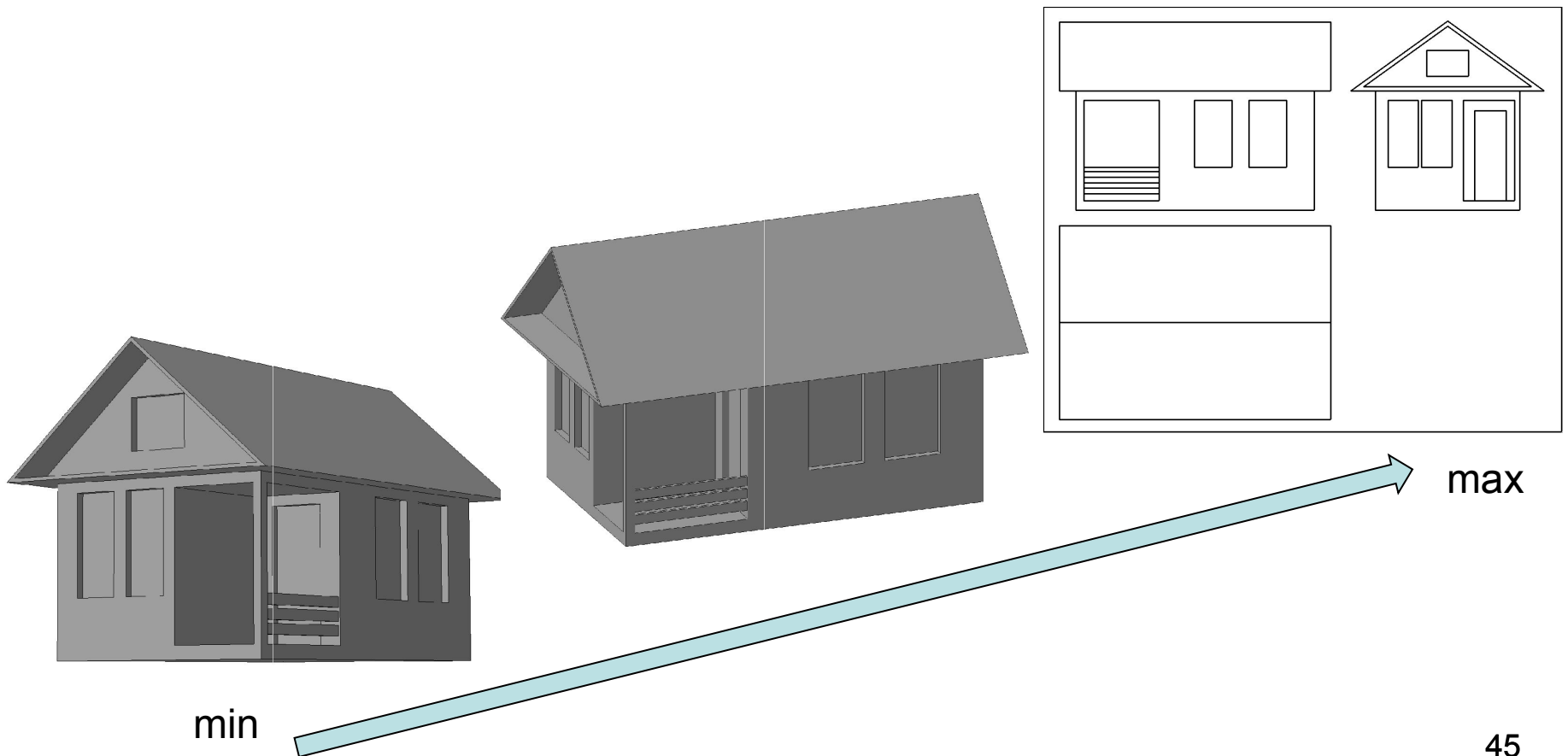
1. Наглядность

- Свойство, которое дает возможность по изображению представить внешнюю форму заданного объекта



2. Обратимость

- Свойство, на основе которого по изображению можно восстановить реальную форму объекта, его размеры и, если необходимо, положение заданного объекта в пространстве



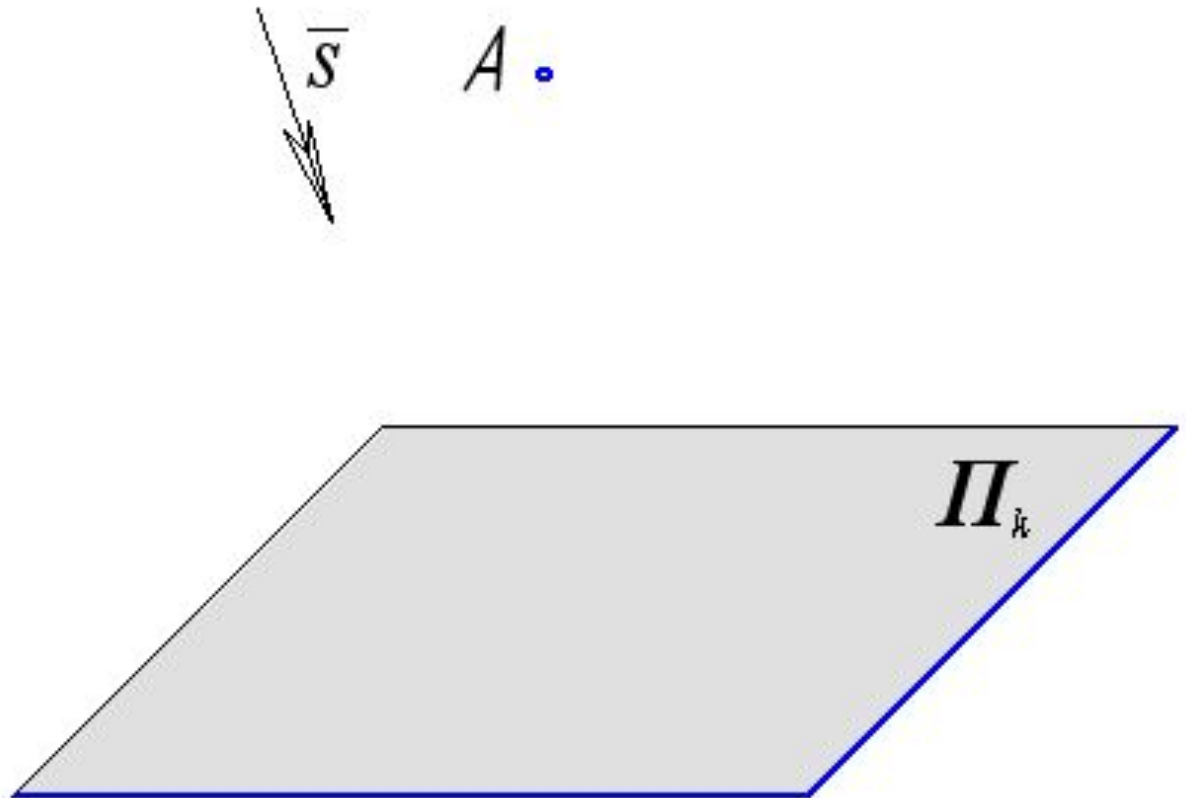
3. Единство правил построения изображения и правил его графического оформления

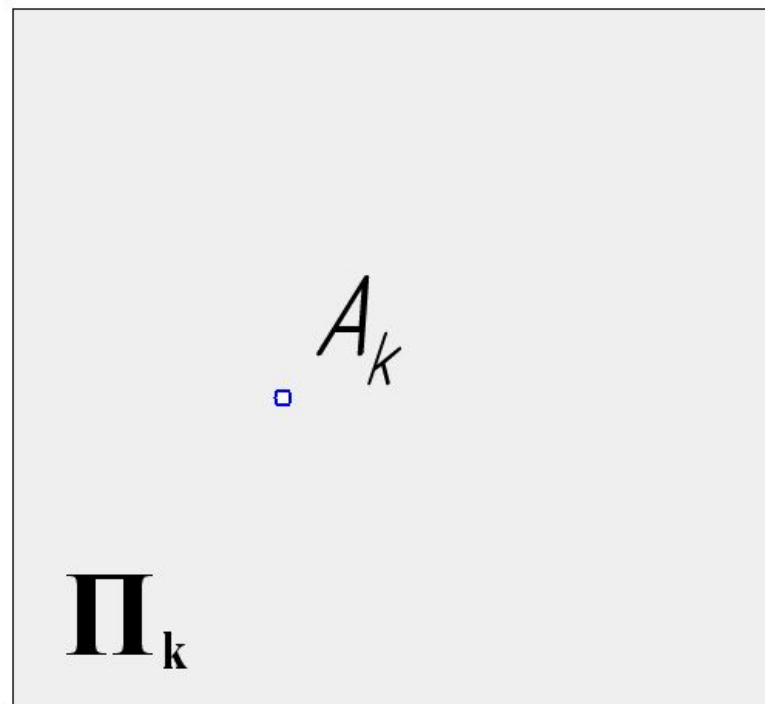
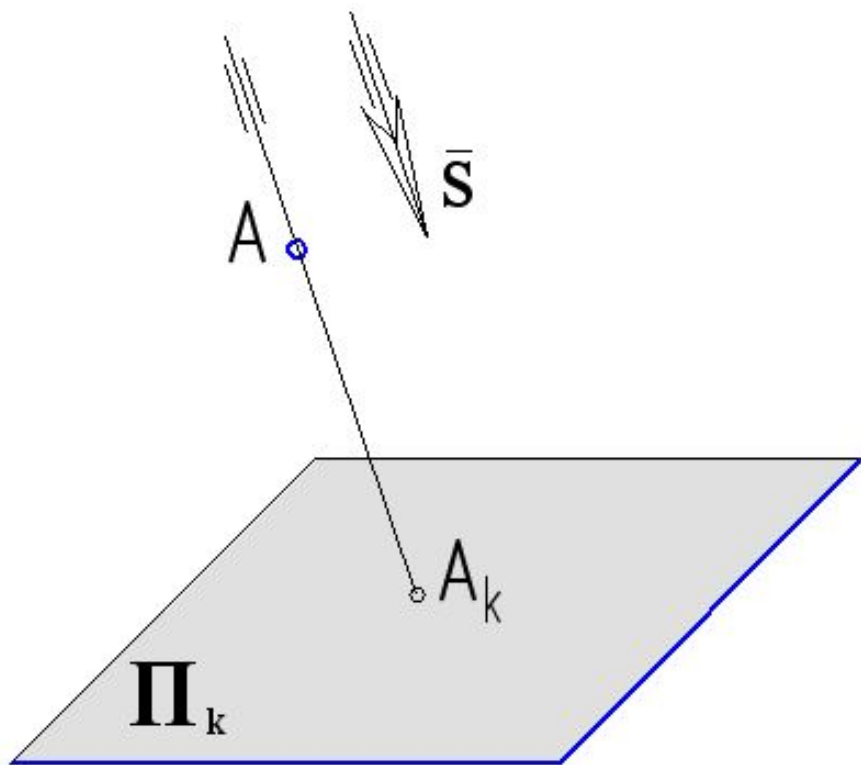
Выводы

- Выбор того или иного вида проекции определяется функциональным назначением получаемого изображения.
- Для презентаций определяющим свойством является наглядность изображения (перспективная или аксонометрическая проекция).
- Для разработки технологического процесса изготовления (строительства) объекта определяющим является обратимость изображения (ортогональные проекции).

Ортогональные проекции

Возьмем
произвольную
точку A и
плоскость
проекций Π_k .



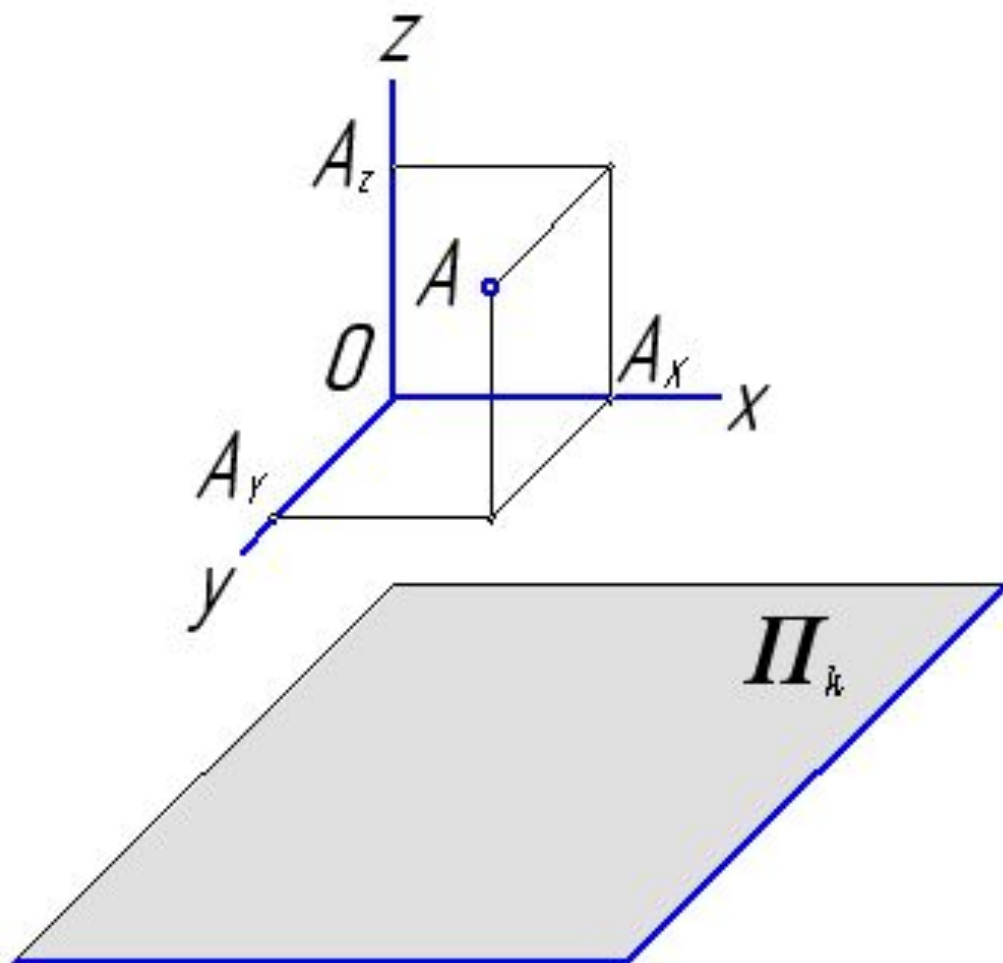


Спроецируем точку A на плоскость проекций Π_k по направлению $\mathbf{s}$.

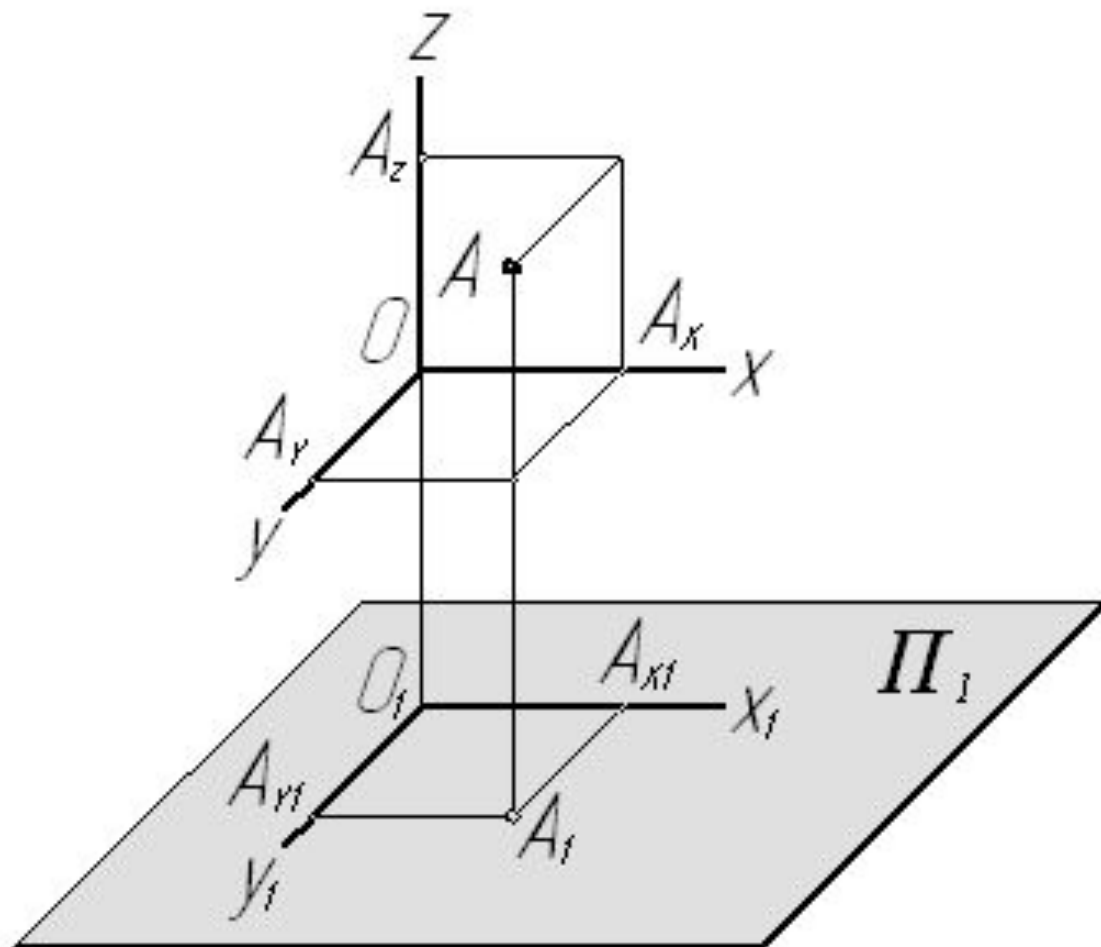
Полученная проекция A_k точки A не дает возможности точно определить положение самой точки A в пространстве, так как проекции A_k соответствует все множество точек, принадлежащих проектирующей прямой, проходящей через точку A

**Одна проекция точки без дополнительных условий
однозначно не определяет ее положение в пространстве**

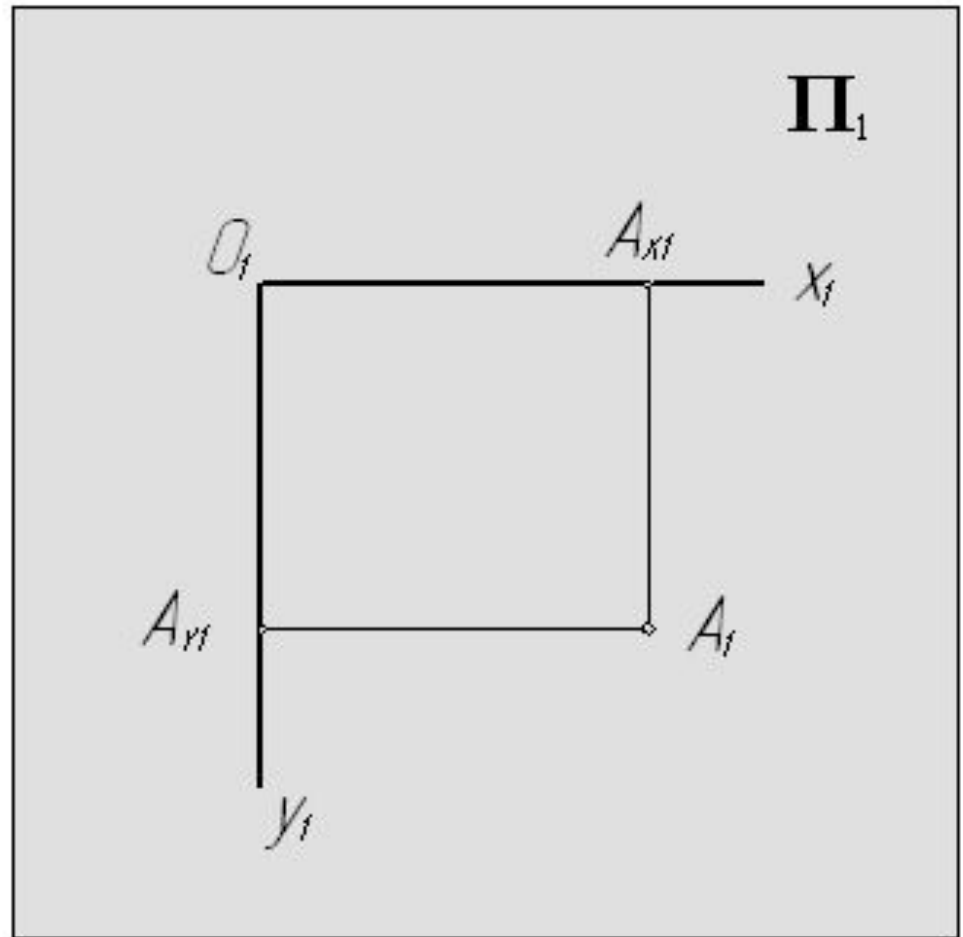
Введем пространственную ортогональную систему координат $Oxyz$ с условием, что координатная плоскость xOy будет параллельна плоскости проекций Π_1 . “Привяжем” точку A к выбранной системе координат.



Ортогонально
спроецируем
систему
координат
 $Oxyz$ и
связанную с
ней точку A на
плоскость
проекций Π_1 .

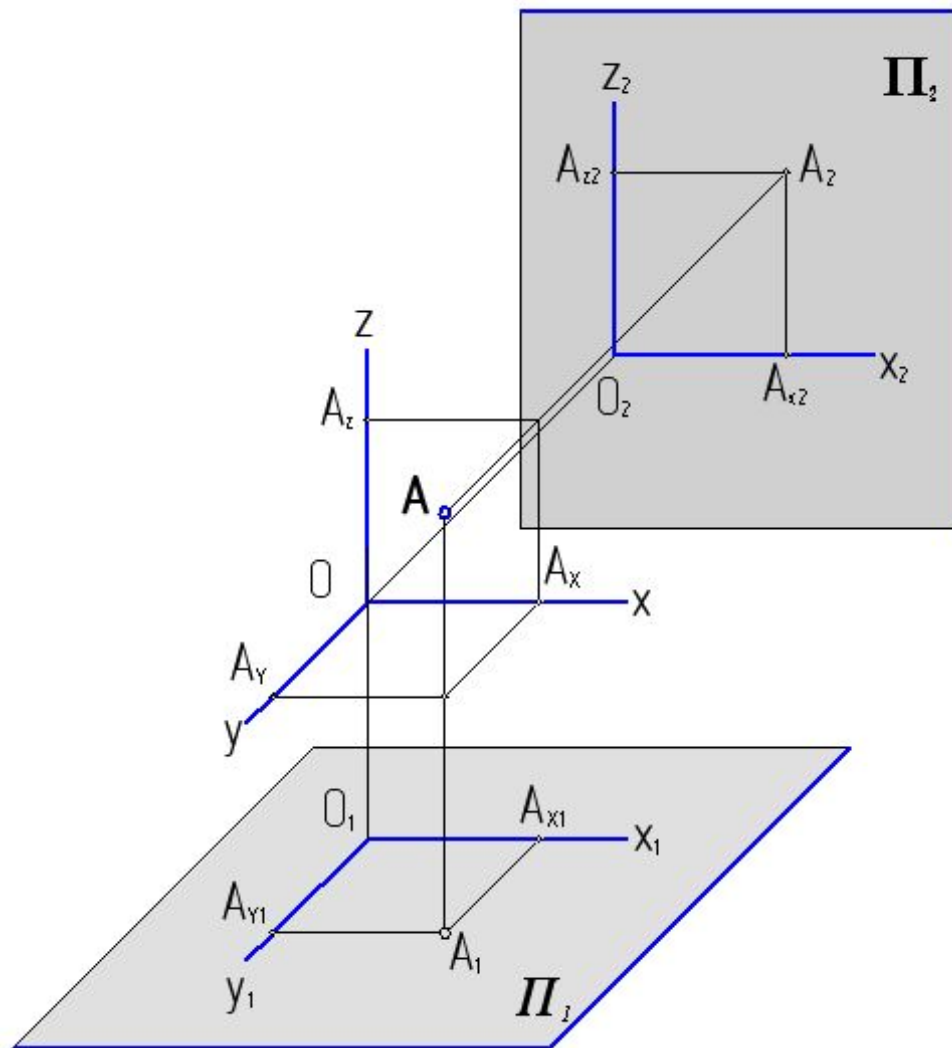


В этом случае на проекции мы имеем только две координаты точки A – x_A и y_A , но отображаемые в истинную величину. Координата z_A , определяющая высоту точки A , отсутствует.



Как было определено ранее, без дополнительных условий изображение необратимо

Введем вторую плоскость проекций Π_2 , параллельную координатной плоскости xOz . Ортогонально спроецируем точку A совместно с системой координат $Oxyz$ на плоскость проекций Π_2 . Как и предыдущем случае получаем две координаты x_A и z_A в истинную величину. Т.е. мы получили все три координаты точки A в истинную величину.



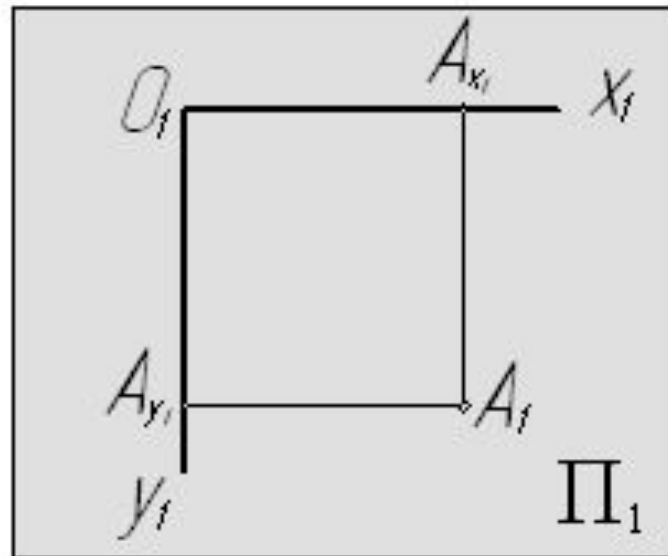
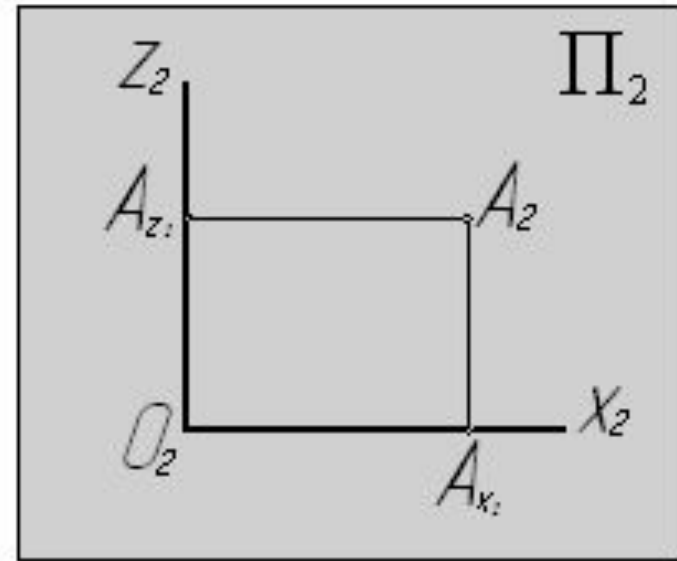
Но координатные
плоскости xOz и xOy
взаимно перпендикулярны.

$$xOz \perp xOy$$

Следовательно, плоскости
проекций Π_1 и Π_2 также
взаимно перпендикулярны

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

Следовательно:



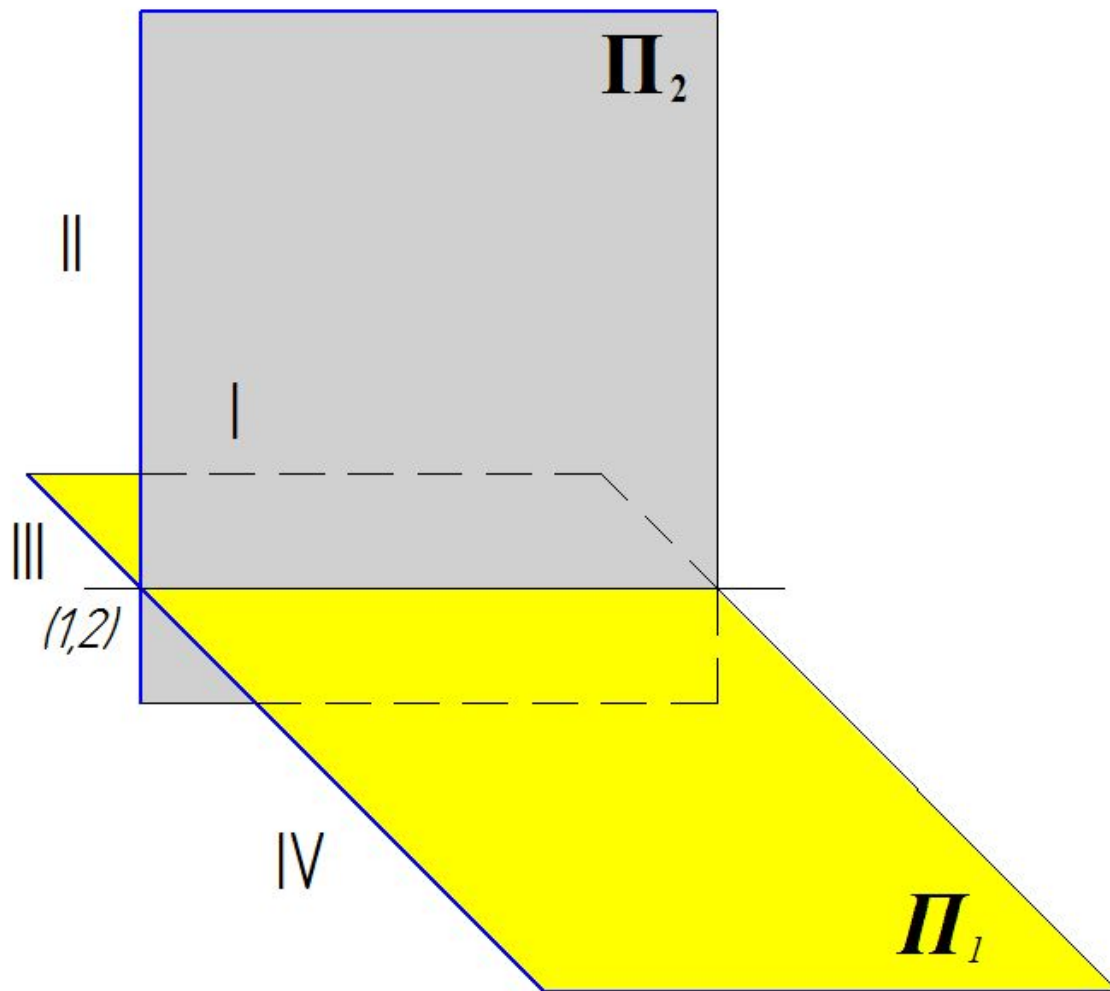
Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$$



Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

I, II, III, IV – четверти пространства

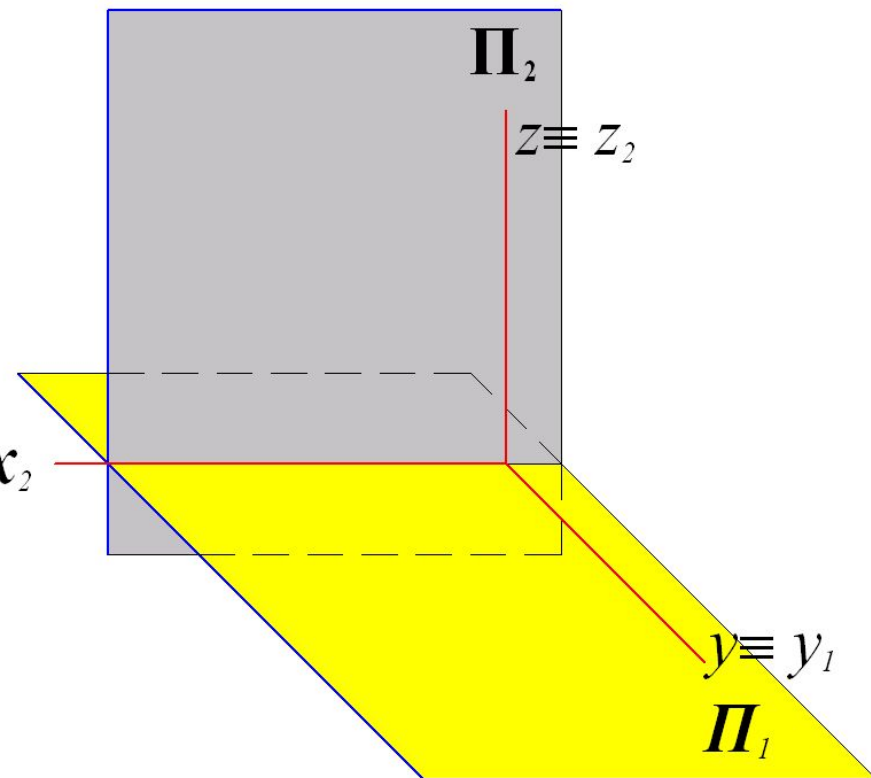
Пространственная
система
координат
совмещается с
плоскостями
проекций так,
чтобы

$$xOz \equiv \Pi_2,$$

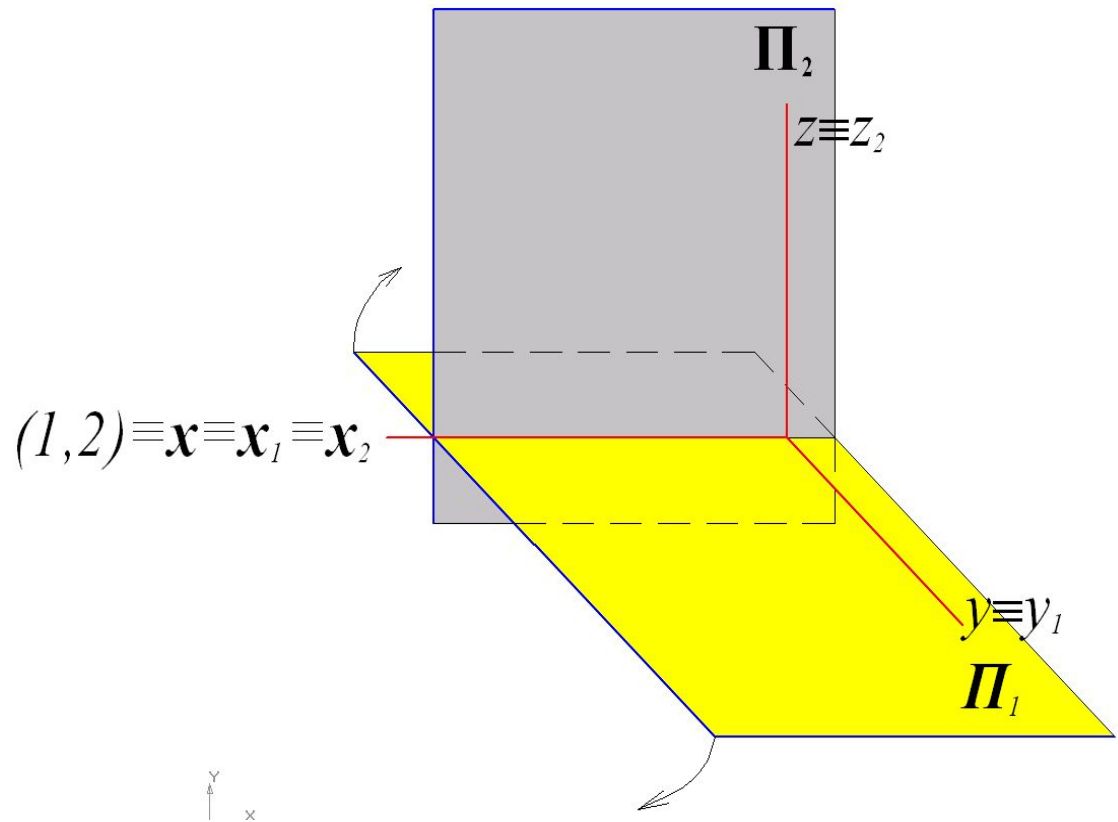
$$xOy \equiv \Pi_1,$$

$$x \equiv (1,2)$$

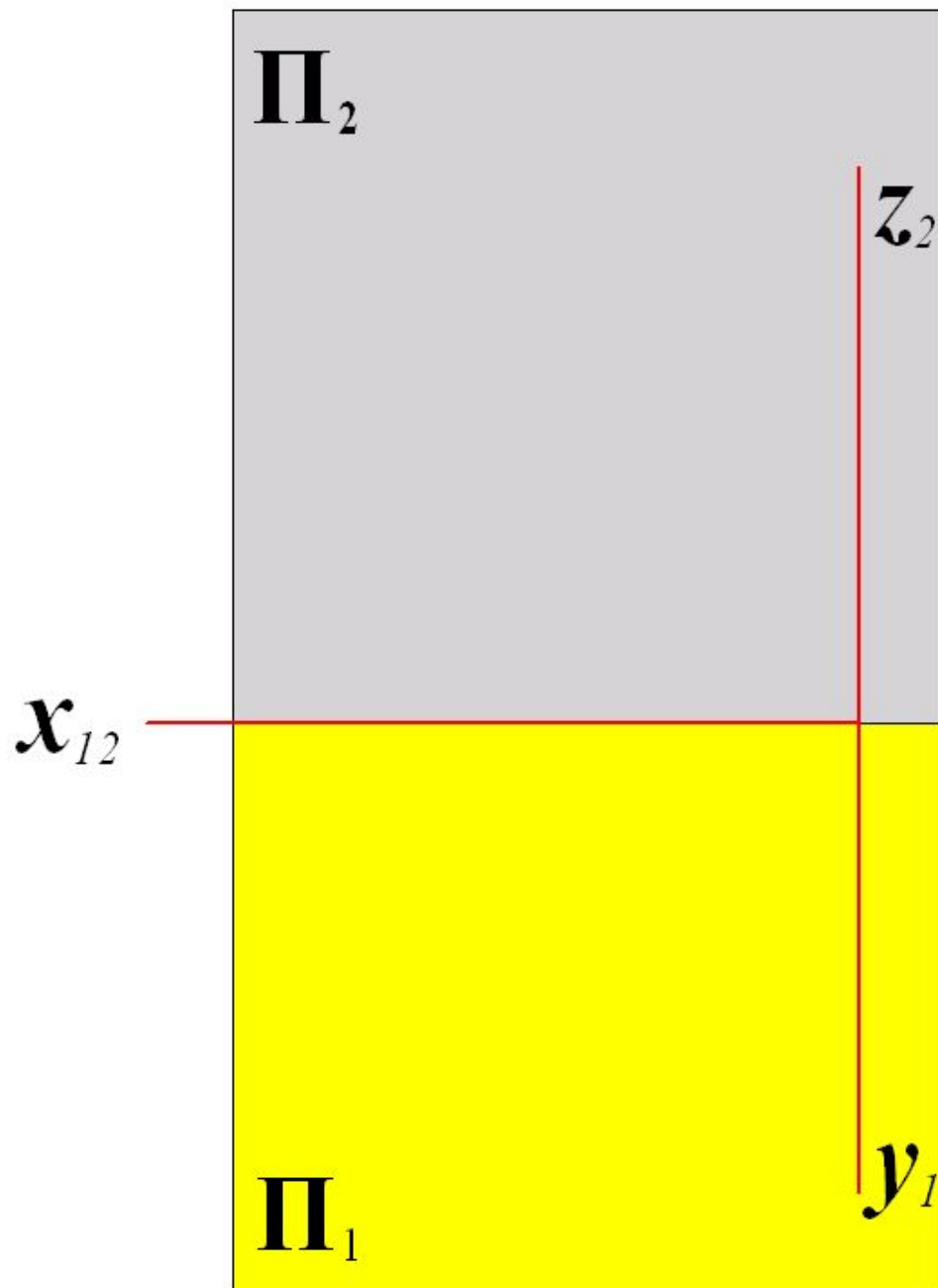
$$(1,2) \equiv x \equiv x_1 \equiv x_2$$



Для получения
плоскостного
чертежа
горизонтальную
плоскость
проекций Π_1
поворачивают
вокруг линии
пересечения $(1,2)$
до совмещения с
плоскостью Π_2 .



Плоскости
проекций Π_1 и Π_2
совмещены в одну
общую плоскость.



Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не оказывают.

Координатные оси y и z также не показывают.

В дальнейшем, когда не требуется знать положение объекта в пространстве относительно системы координат $Oxyz$, ось $x_{1,2}$ также может не изображаться. Получаем безосную систему.

$$x_{1,2} \frac{\Pi_2}{\Pi_1}$$

Ортогональная система трех плоскостей проекций

Вводится третья
плоскость проекций

Π_3 – профильная

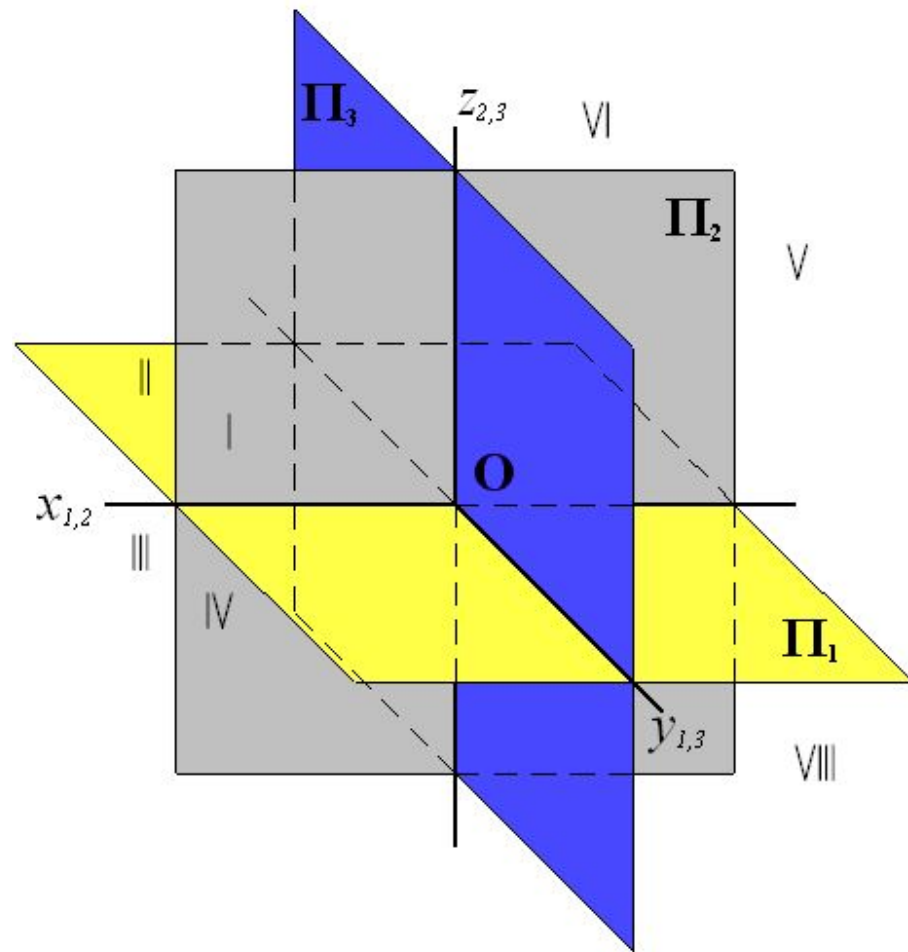
$\Pi_3 \equiv yOz$

$\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$;

$\Pi_3 \cap \Pi_1 = (1,3), (1,3) \equiv y \Rightarrow y_{1,3}$

$\Pi_3 \cap \Pi_2 = (2,3), (2,3) \equiv z \Rightarrow z_{2,3}$

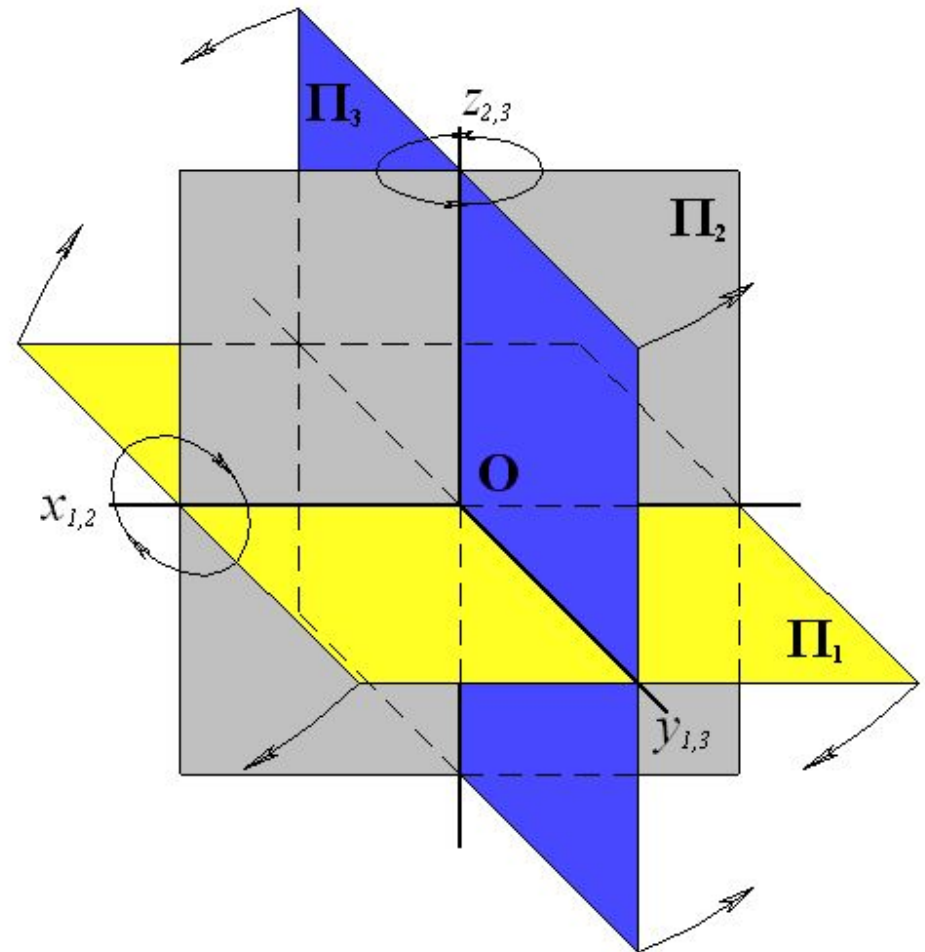
$\Pi_2 \cap \Pi_1 = (1,2), (1,2) \equiv x \Rightarrow x_{1,2}$



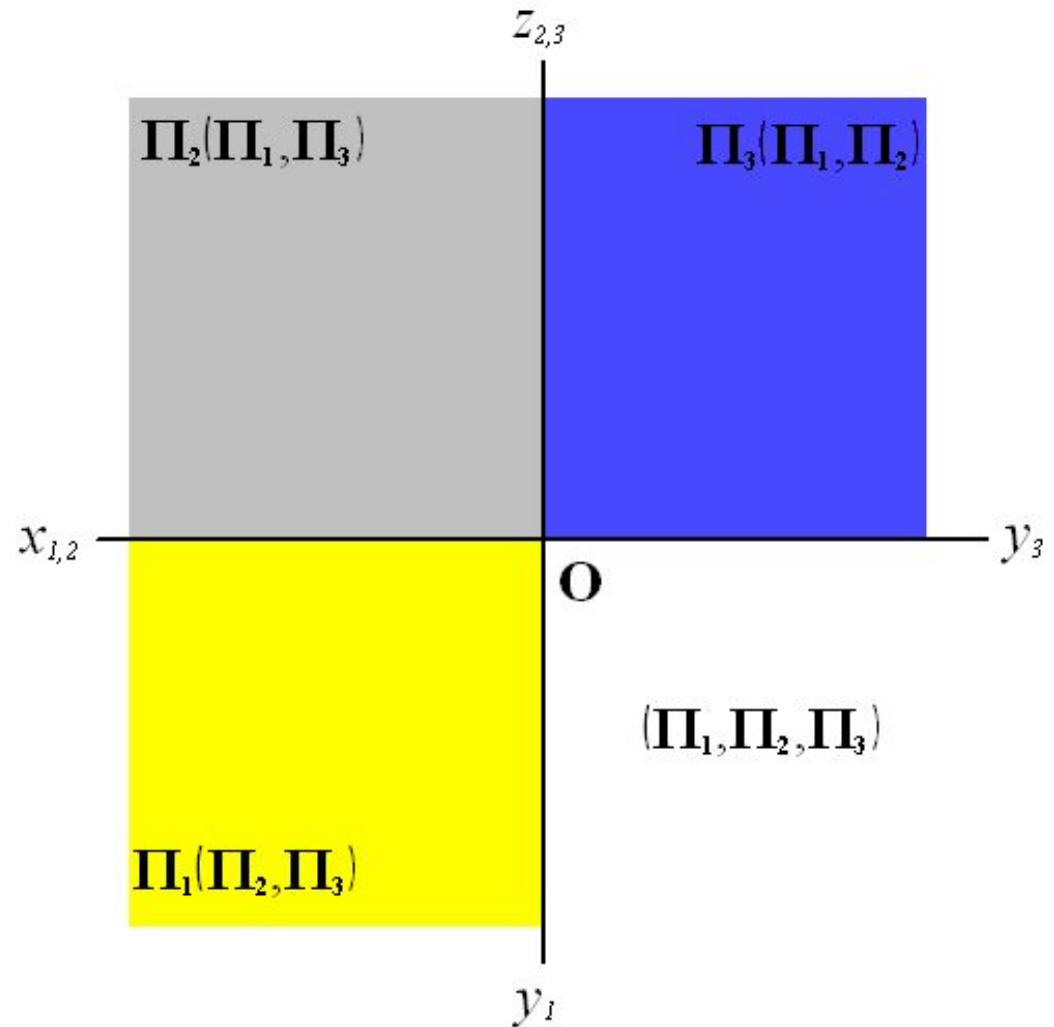
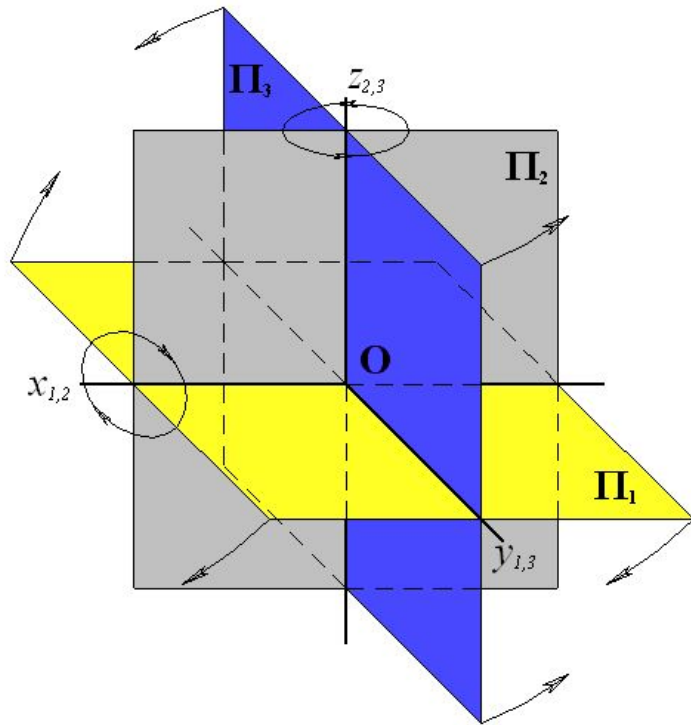
Пространство разделено на 8 частей - **октантов**

Для перехода от трехмерного изображения к плоскостному- двумерному выполняют следующие действия:

- Положение фронтальной плоскости проекций Π_2 не изменяют;
- горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг оси $x_{1,2}$ до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2 ;
- профильную плоскость проекций Π_3 поворачивают вокруг оси $z_{2,3}$ также до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2 .



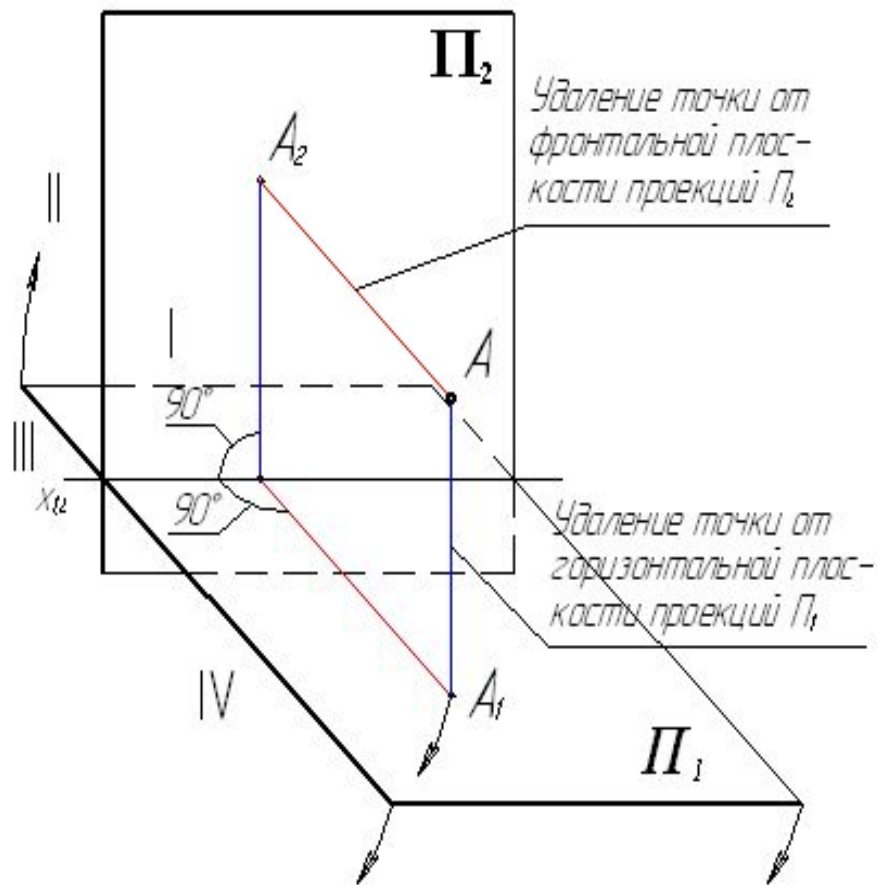
Все три плоскости
проекций совмещены в
одну общую плоскость



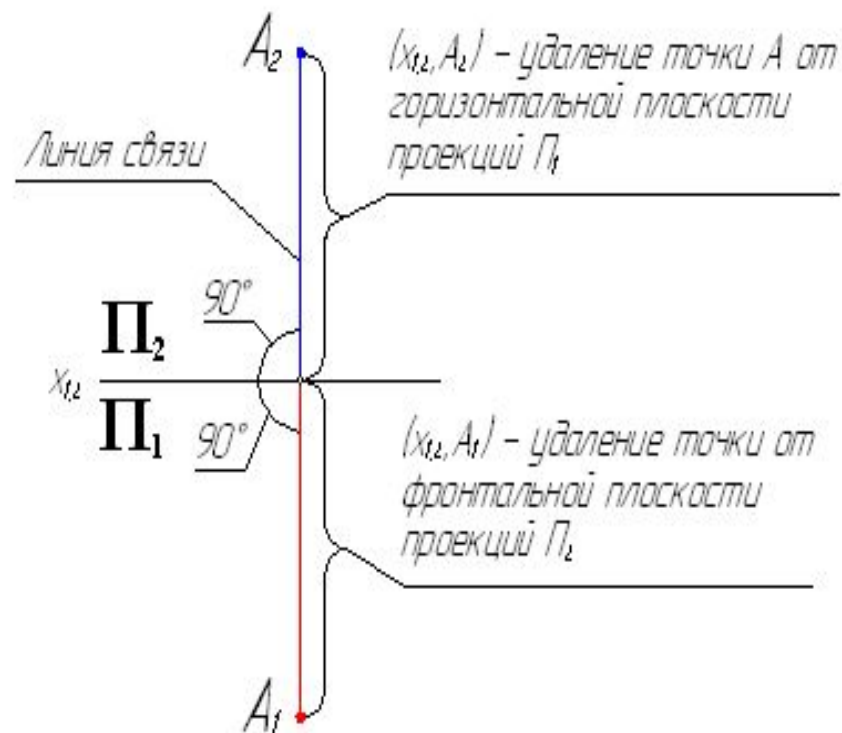
Проецирование точки

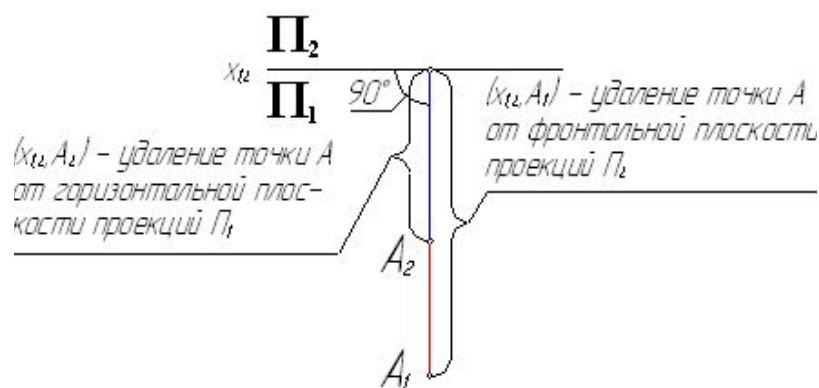
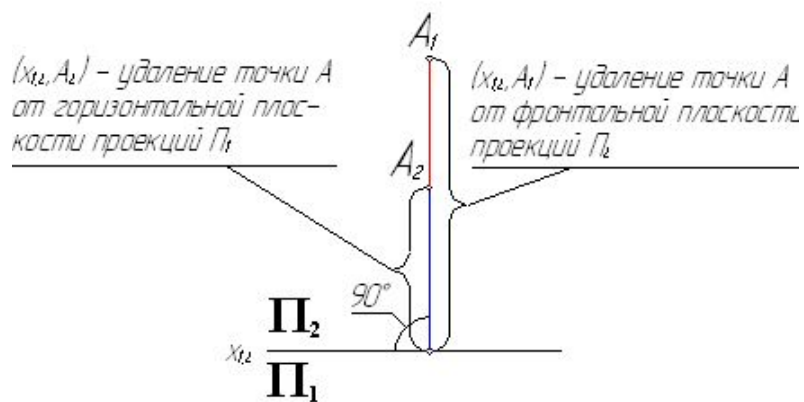
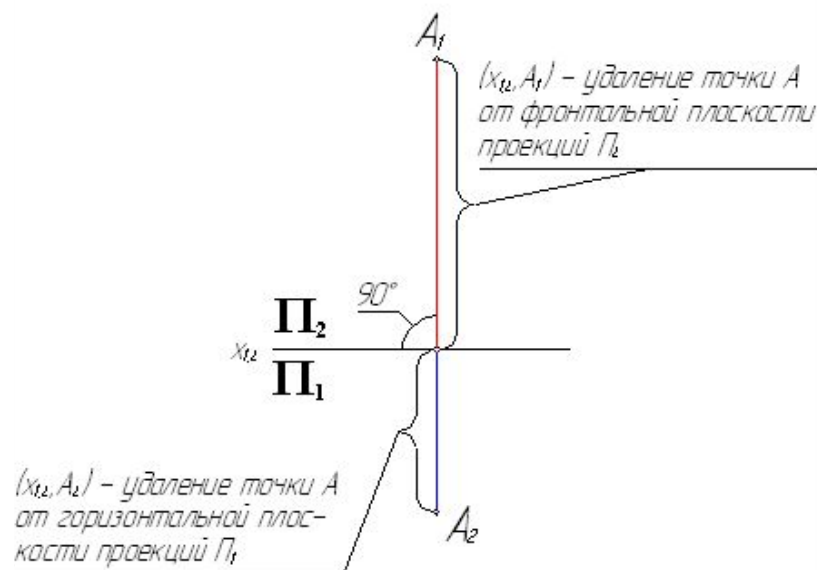
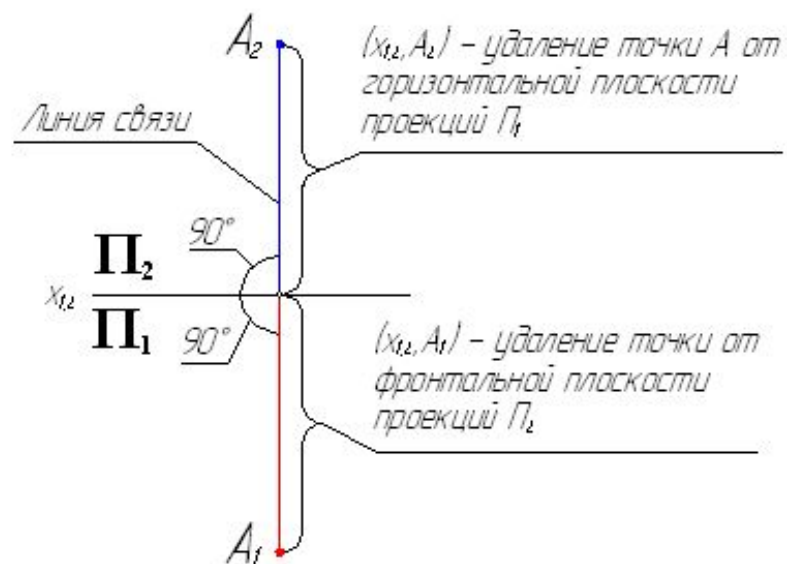
Точка в I-ой четверти

Наглядное изображение



Плоскостное изображение -
Эпюр





Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси $x_{1,2}$

$$A_1 A_2 \perp x_{1,2}$$

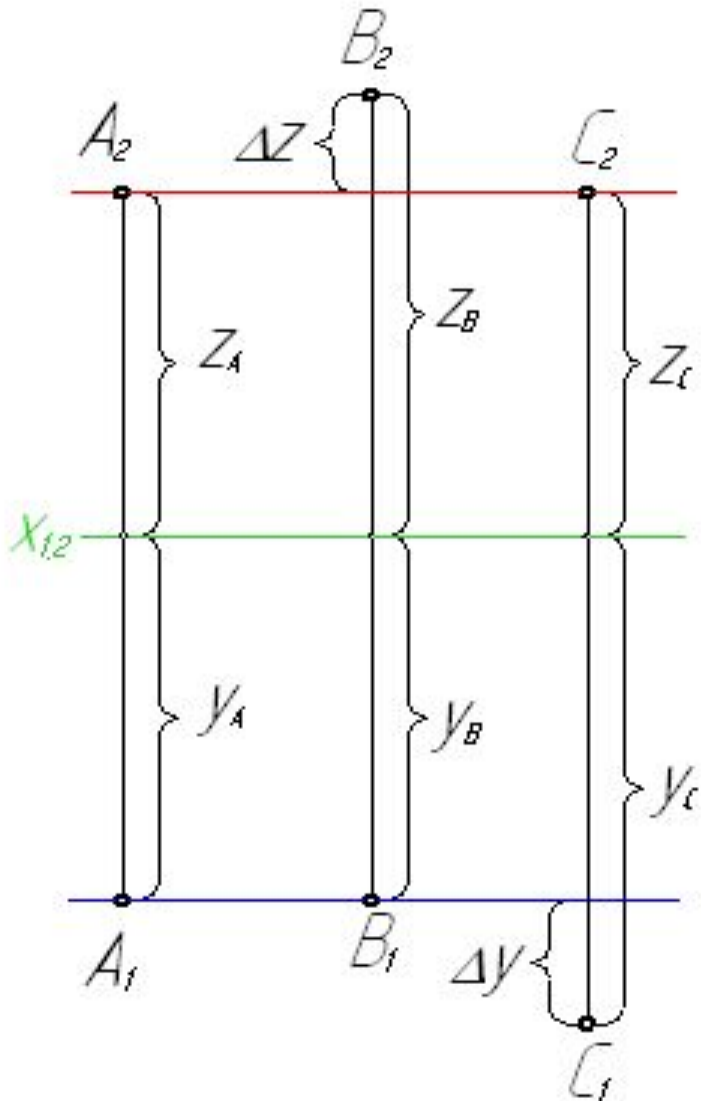
Расстояние от оси $x_{1,2}$ до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

$$(x_{1,2}, A_1) = (A, \Pi_2) - \text{глубина}$$

Расстояние от оси $x_{1,2}$ до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

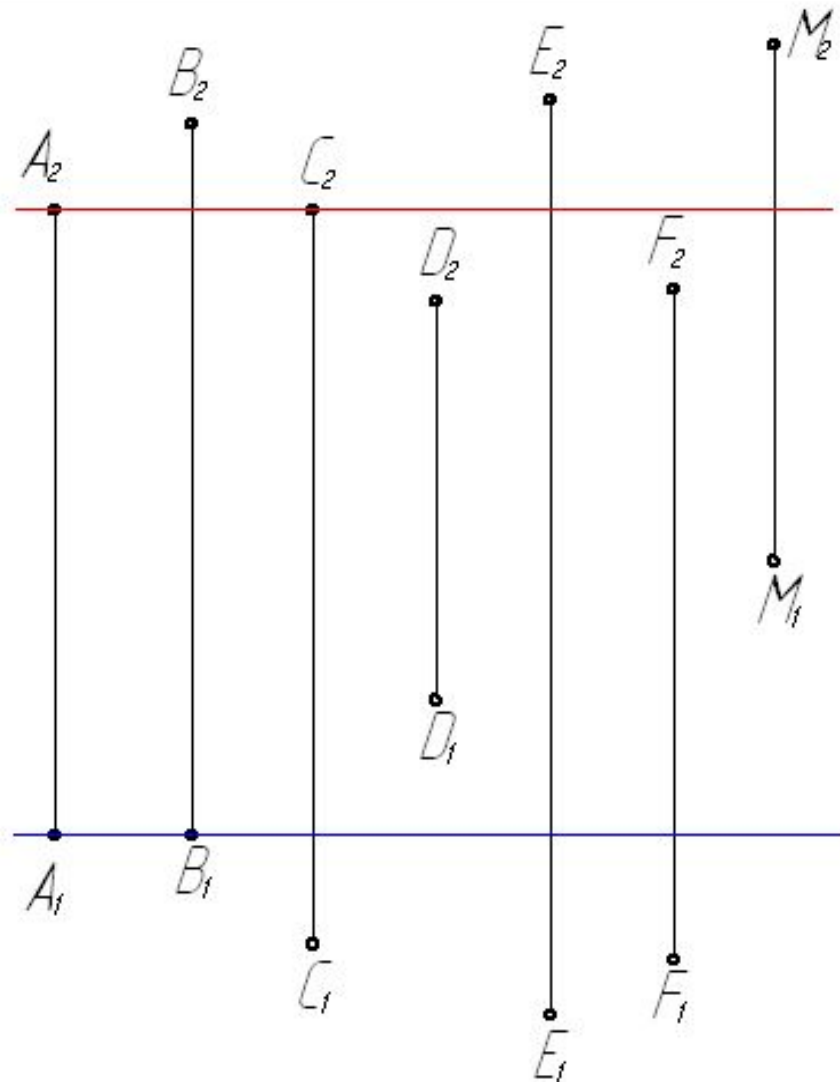
$$(x_{1,2}, A_2) = (A, \Pi_1) - \text{высота}$$

Абсолютные и относительные координаты точки



- $z_A, z_B, z_C, y_A, y_B, y_C$ – абсолютные координаты;
- $\Delta z, \Delta y$ – относительные координаты (приращения).

Безосный эпюр

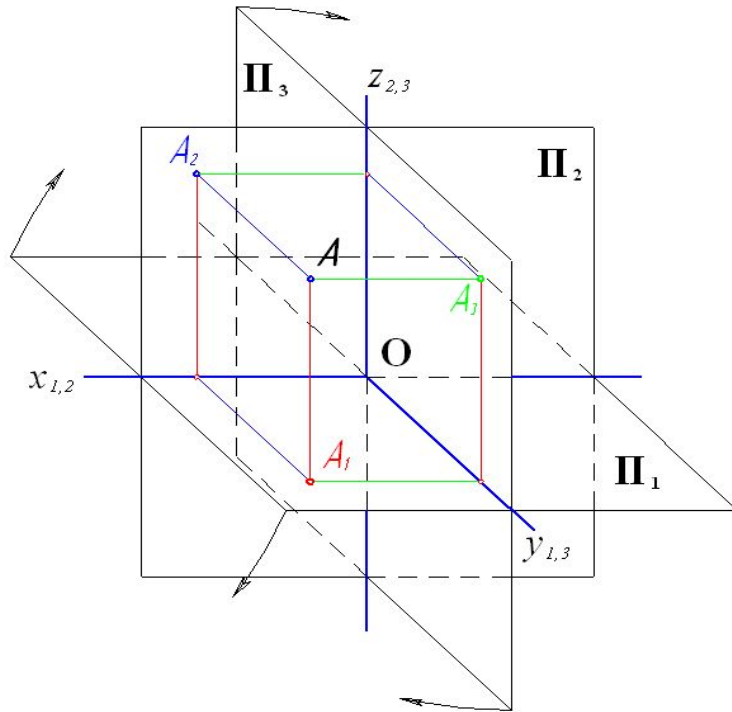


- Точка В выше точки А;
- Точка С перед точкой А;
- Точка D ниже точки А и за точкой А;
- Точка Е выше точки А и перед точкой А;
- Точка F ниже точки А и перед точкой А;
- Точка М выше точки А и за точкой А.

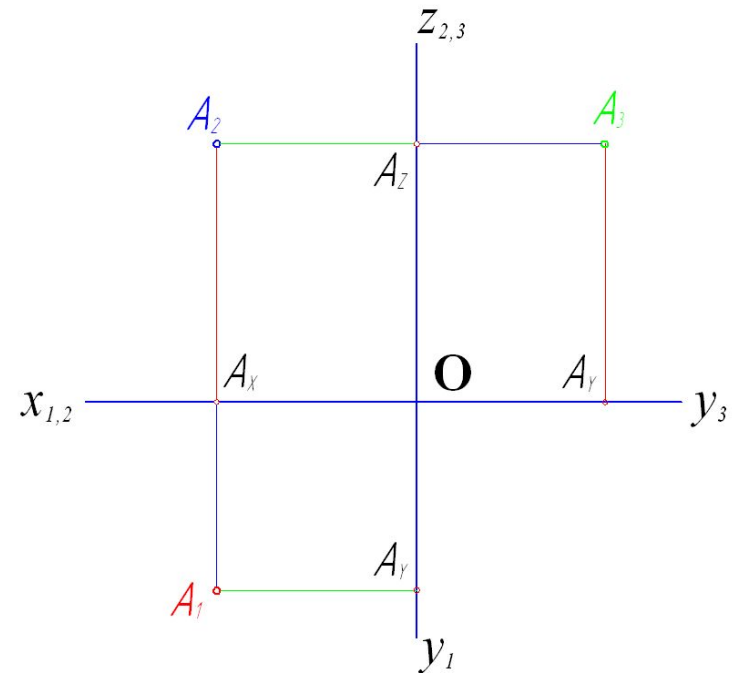
Проецирование точки в системе трех ортогональных плоскостей проекций

Точка в первом октанте

Наглядное изображение



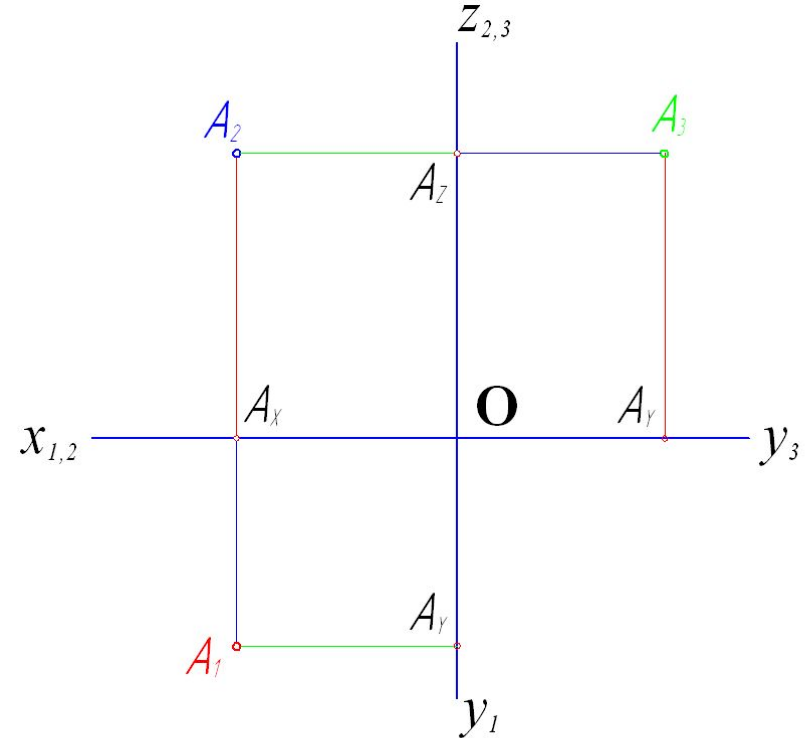
Эпюр



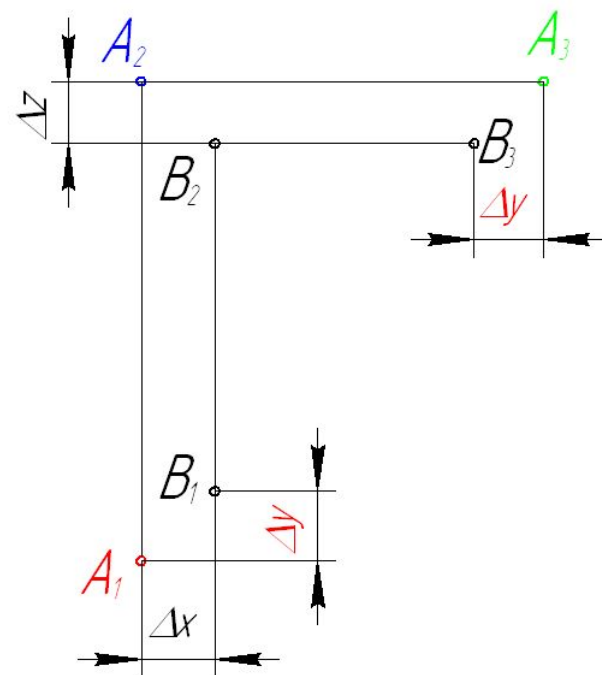
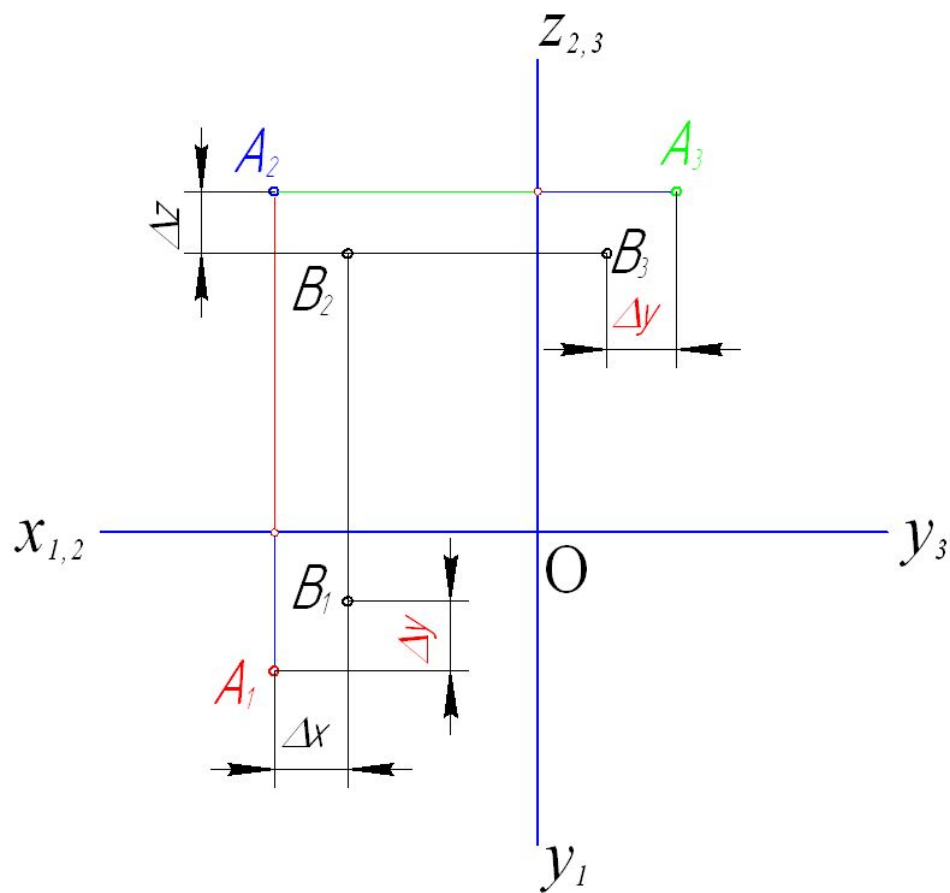
$$\left. \begin{aligned} (A, \Pi_1) &= (A_2, x_{1,2}) = z_A \\ (A, \Pi_2) &= (A_1, x_{1,2}) = y_A \\ (A, \Pi_3) &= (A_2, z_{2,3}) = x_A \end{aligned} \right\} \text{абсолютные координаты точки}$$

**Условия, которым должен удовлетворять
эпюр точки, расположенной в любой части
пространства, в системе трех
ортогональных плоскостей проекций:**

- $A_1 A_2 \perp x_{1,2}$
- $A_2 A_3 \perp z_{2,3}$
- $(A_1, x_{1,2}) = (A_3, z_{2,3})$

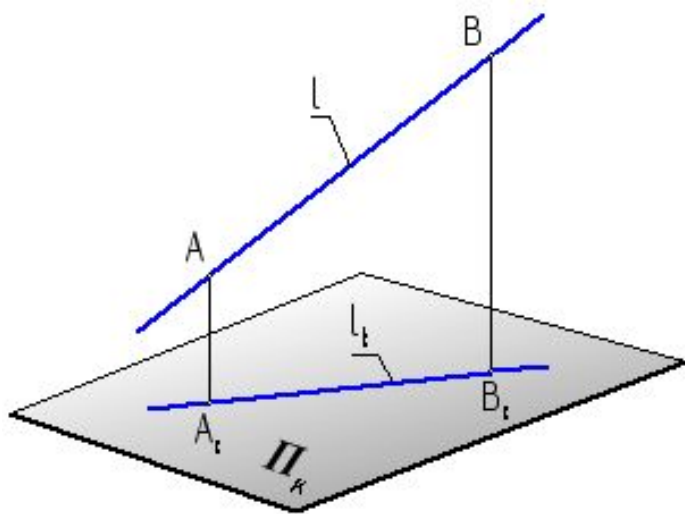


Переход от эпюра в начертательной геометрии к безосному чертежу



Прямая линия

Способы задания прямой на эпюре

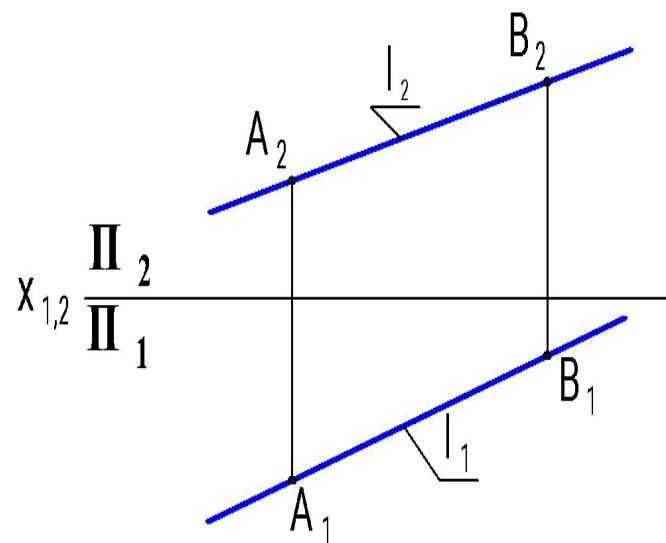


$l(A, B)$

$\Downarrow$

$A \in l$

$B \in l$

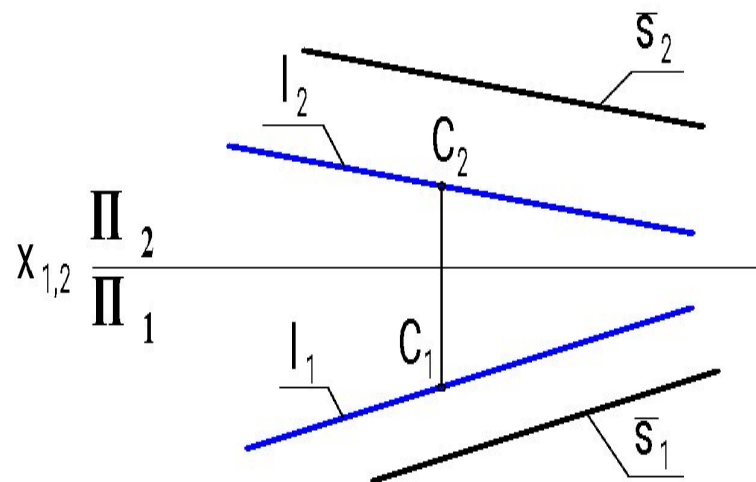
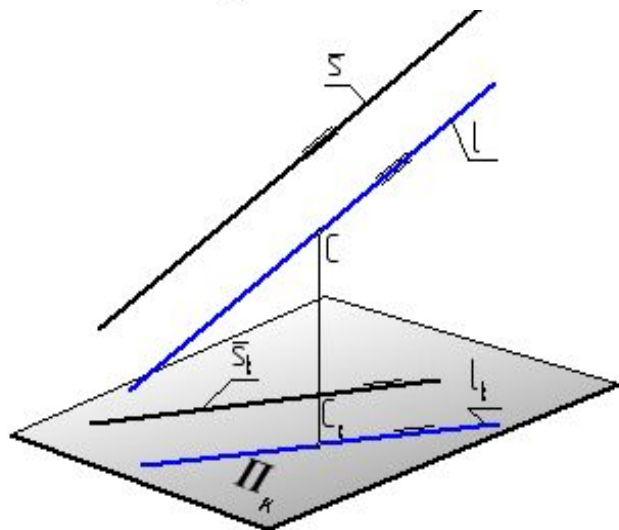


$l(C, s)$

$\Downarrow$

$C \in l$

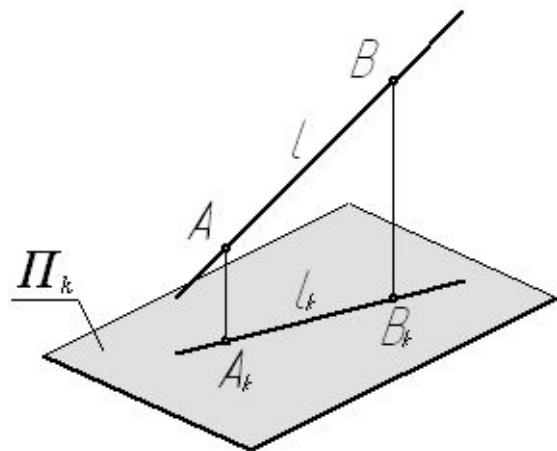
$l \parallel s$



Положение прямой относительно плоскости проекций

Прямая
общего положения

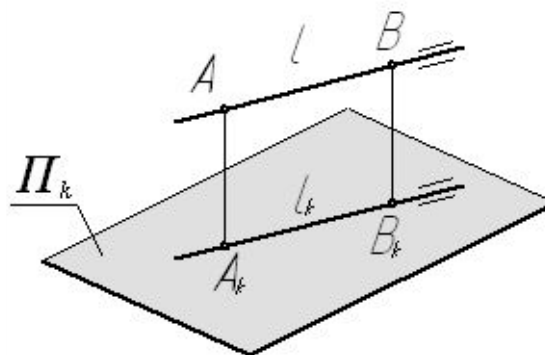
$$l \nparallel \Pi_k \text{ и } l \nperp \Pi_k$$



Прямые частного положения

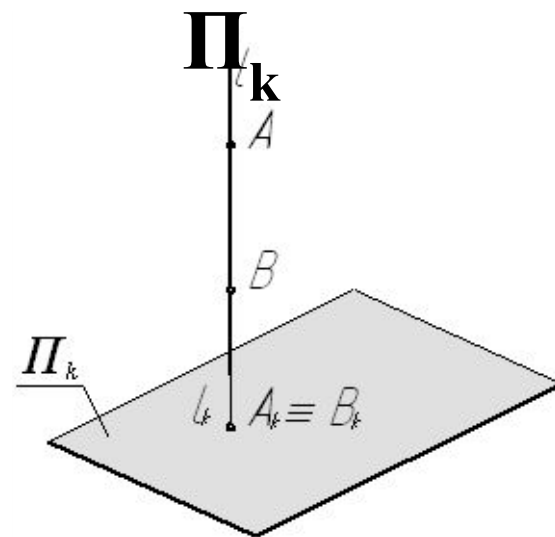
Прямая уровня

$$l \parallel \Pi_k$$



Проецирующая
прямая

$$l \perp \Pi_k$$




```
graph TD; A[ПРЯМЫЕ] --> B[ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ]; A --> C[ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ]; B --> D[УРОВНЯ]; B --> E[ПРОЕКЦИРУЮЩИЕ];
```

ПРЯМЫЕ

**ОБЩЕГО
ПОЛОЖЕНИЯ**

**ЧАСТНОГО
ПОЛОЖЕНИЯ**

УРОВНЯ

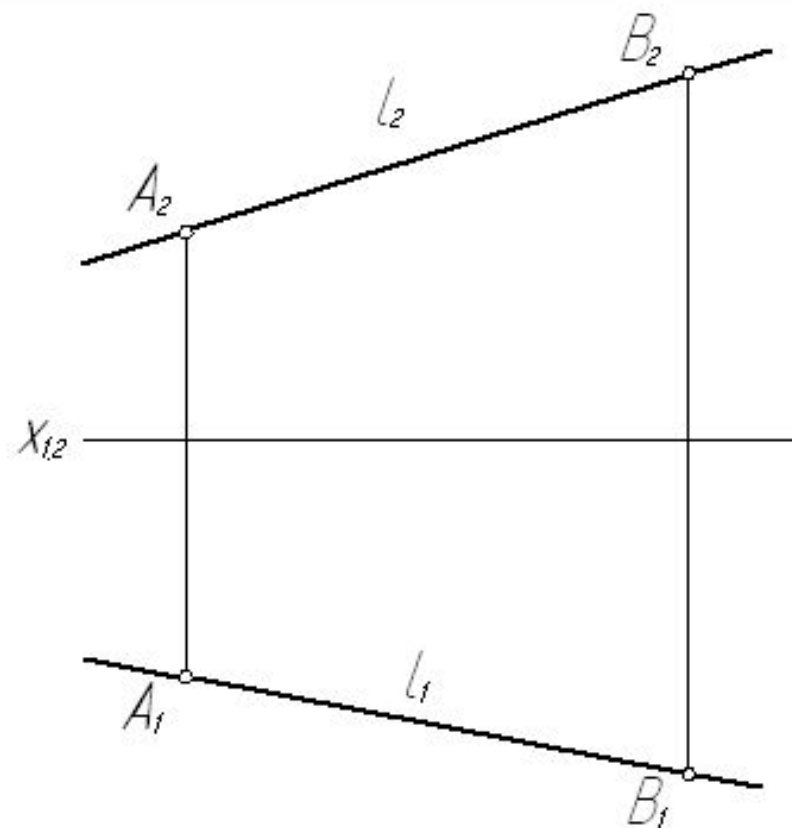
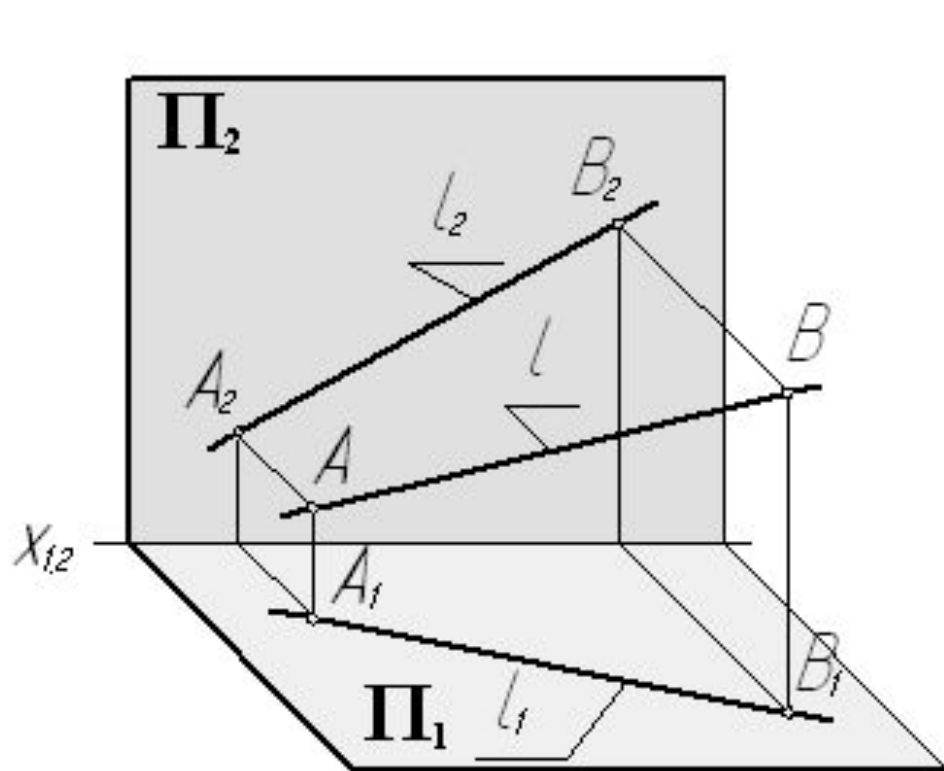
**ПРОЕКЦИРУЮЩИ
Е**

Прямая общего положения

Это прямая не параллельная и
не перпендикулярная
ни одной
из плоскостей проекций

$$l \nparallel \Pi_k \text{ и } l \nperp \Pi_k$$

Прямая общего положения



$l \nparallel \Pi_1$ и $l \nparallel \Pi_2$
 $l \nsubseteq \Pi_1$ и $l \nsubseteq \Pi_2$

$l_1 \nparallel x_{1,2}$ и $l_2 \nparallel x_{1,2}$
 $l_1 \nsubseteq x_{1,2}$ и $l_2 \nsubseteq x_{1,2}$
 $x_{1,2}$

Характерная особенность
эпюра прямой общего
положения – **горизонтальная и
фронтальная проекции прямой
не параллельны и не
перпендикулярны
координатной оси $x_{1,2}$**

Прямые частного положения

Это прямые параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций

$$l \parallel \Pi_k \vee l \perp \Pi_k$$

Прямая уровня

Это прямая параллельная
какой-либо одной
плоскости проекций

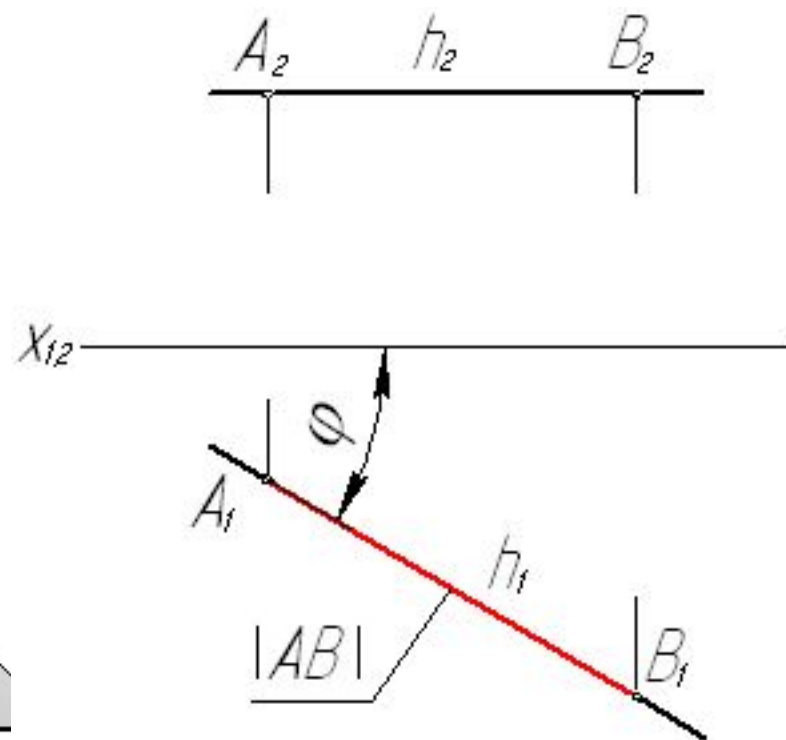
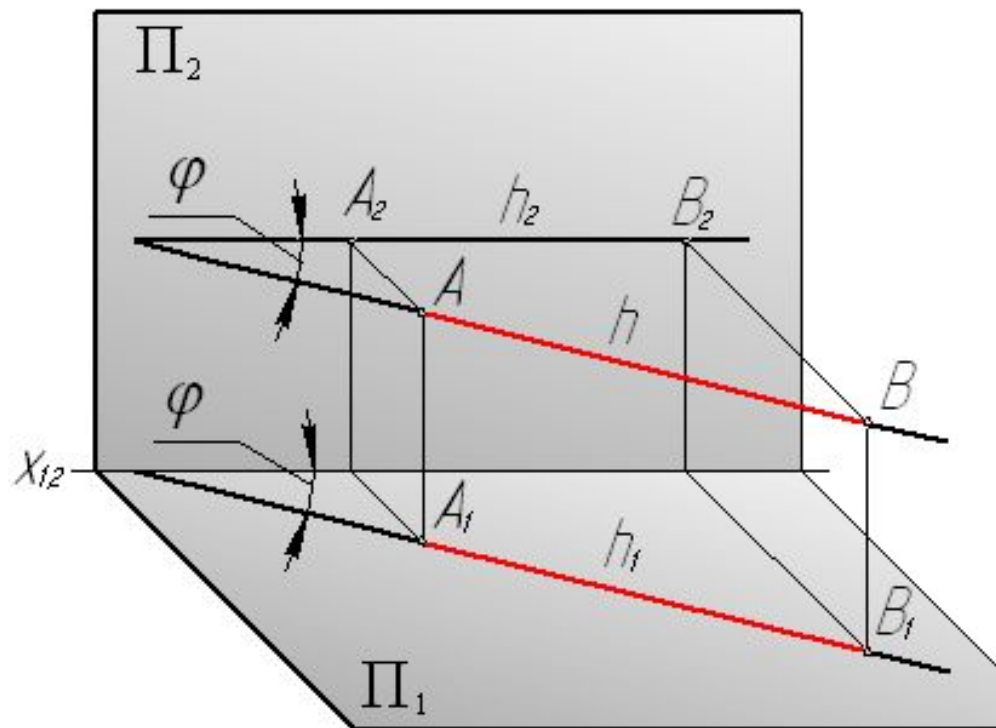
$l \parallel \Pi_K$

Горизонталь

Это прямая параллельная
горизонтальной плоскости
проекций

$$l \parallel \Pi_1 \Rightarrow l \equiv h$$

Горизонталь - h



$$h \parallel \Pi_1$$

$$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \Pi_1$$

$$\Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$$

$$\Rightarrow A_1 B_1 \cong |AB|$$

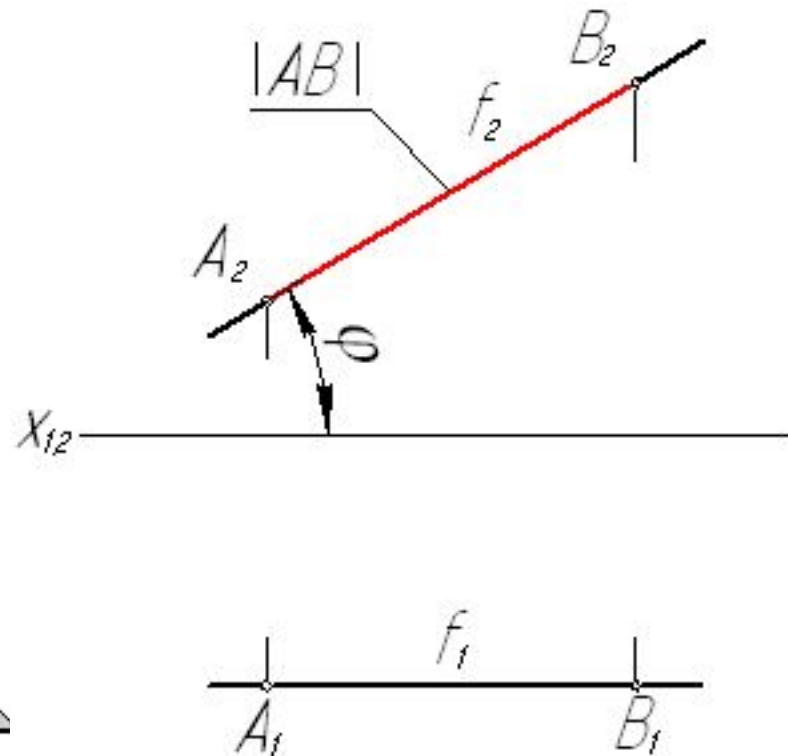
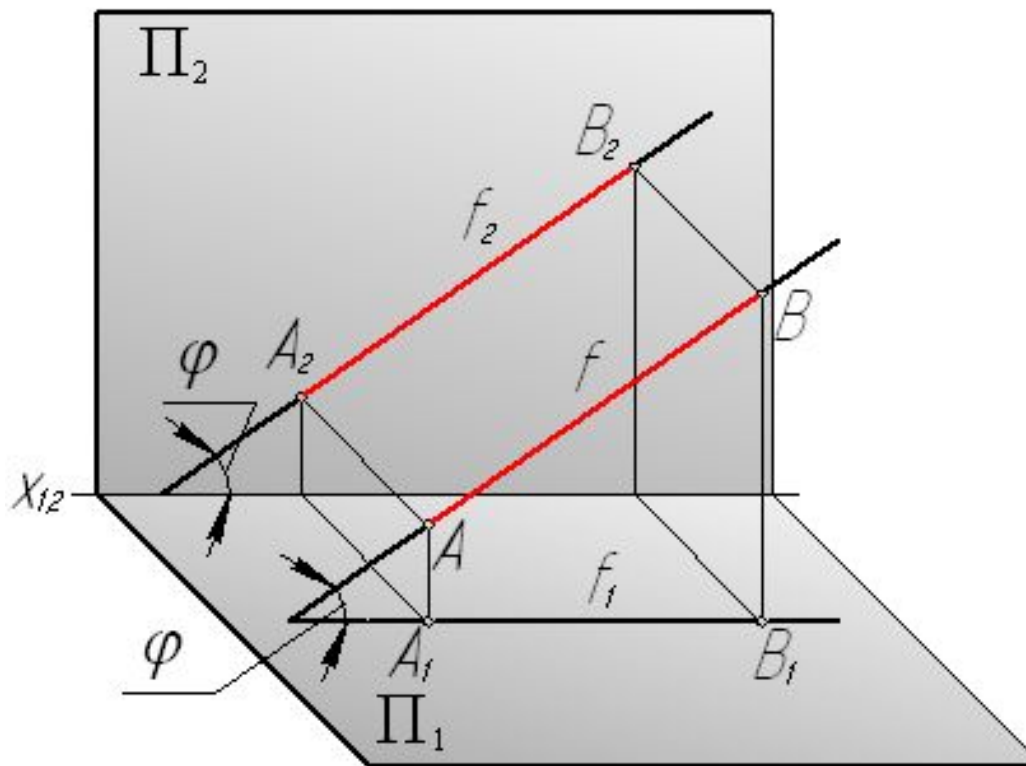
$$\angle \phi = h_1(A_1 B_1)^\wedge$$

Фронталь

Это прямая параллельная
фронтальной плоскости
проекций

$$l \parallel \Pi_2 \Rightarrow l \equiv f$$

Фронталь - f

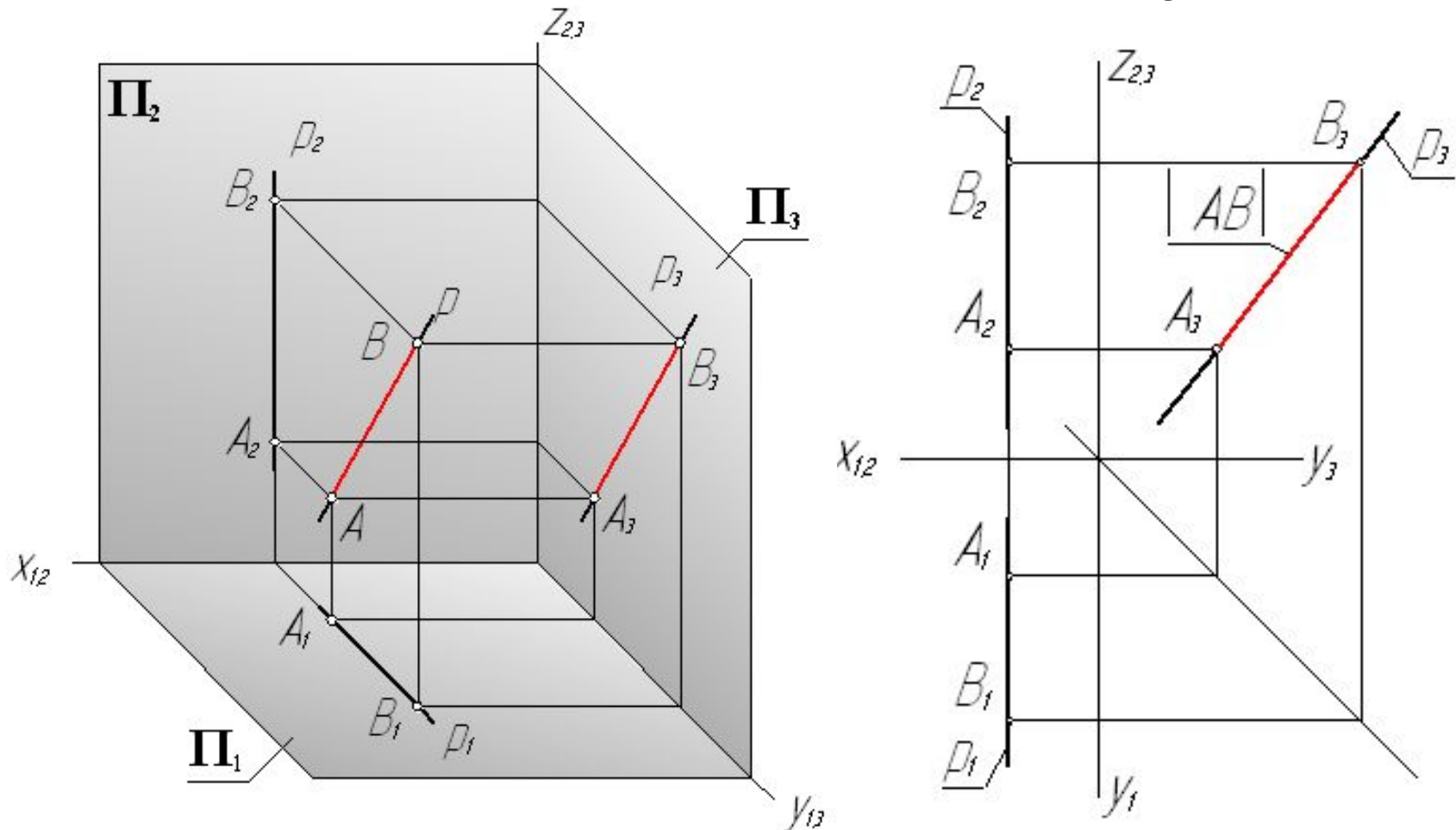


$$\begin{aligned}
 & f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2} \\
 & AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2 \cong |AB| \\
 & \angle \phi = f(AB) \wedge \Pi_1 \quad \angle \phi = f_2(A_2B_2) \wedge x_{1,2}^{90}
 \end{aligned}$$

Характерная особенность
эпюра горизонтали и
фронтала –
**одна из проекций
параллельна координатной
оси $x_{1,2}$**

Профильная прямая - p

Это прямая параллельная профильной плоскости проекций Π_3



Проецирующая прямая

Прямая перпендикулярная
одной
из плоскостей проекций

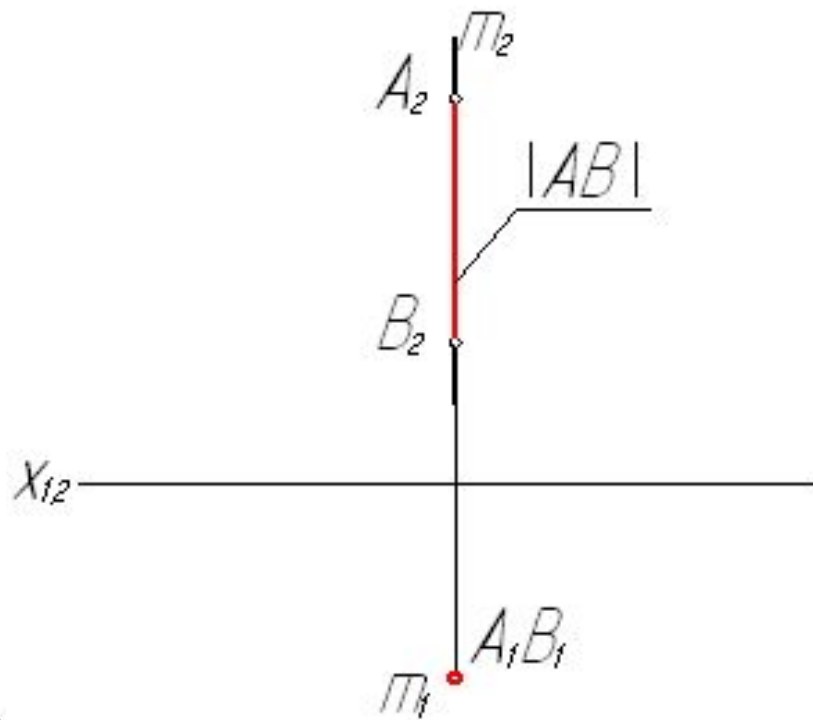
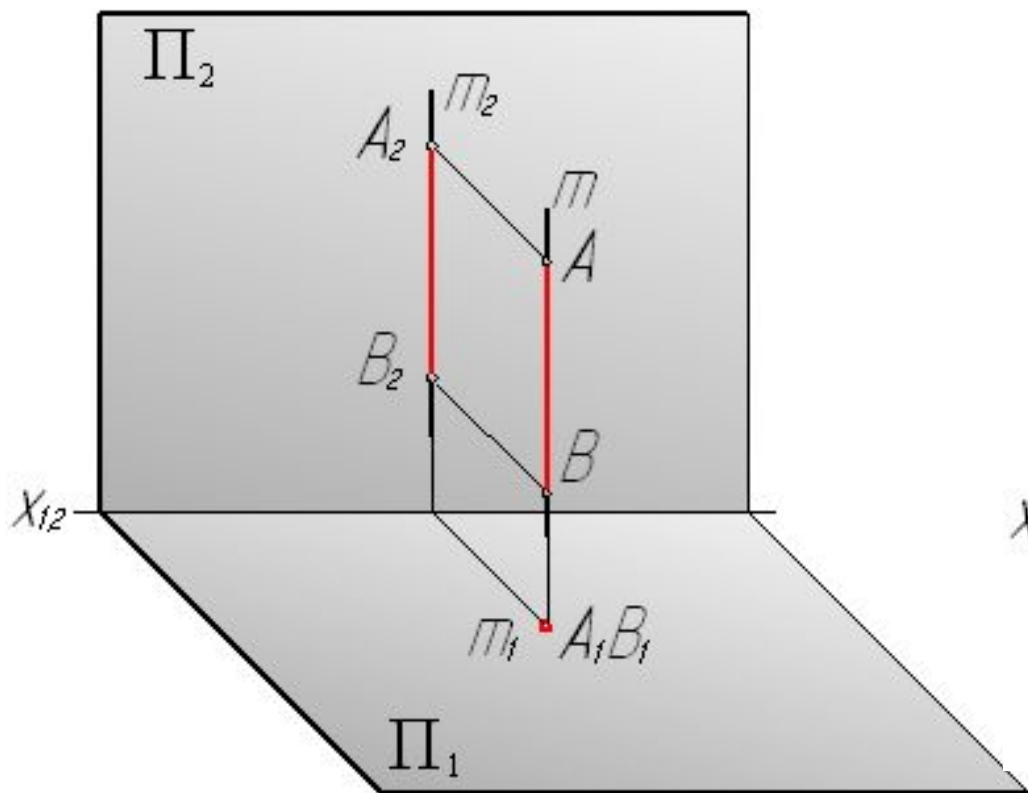
$$m \perp \Pi_k$$

Горизонтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная
горизонтальной плоскости
проекций

$$m \perp \Pi_1$$

Горизонтально-проецирующая прямая



$m \perp \Pi_1 \wedge m \parallel \Pi_2$
 $AB \subset m \Rightarrow AB \parallel$
 Π_2

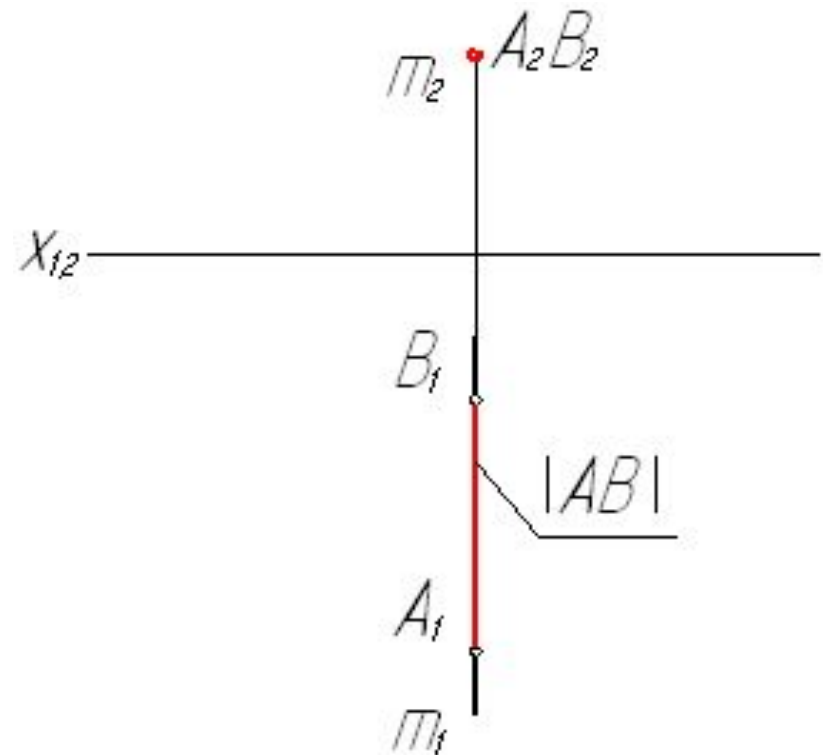
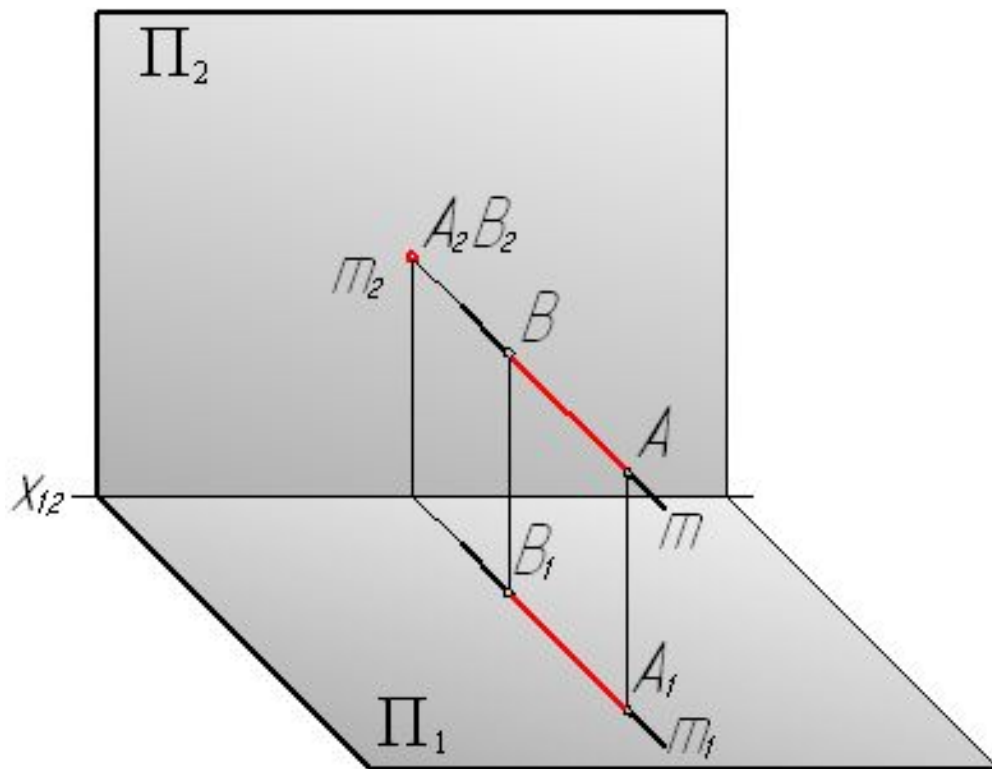
$\Rightarrow m_1 - \text{точка} \wedge m_2 \perp x_{1,2}$
 $\Rightarrow A_1B_1 - \text{точка} \wedge A_2B_2 \cong |AB|$

Фронтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная
фронтальной плоскости проекций

$$m \perp \Pi_2$$

Фронтально-проецирующая прямая



$$m \perp \Pi_2 \wedge m \parallel \Pi_1$$

$$AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_1$$

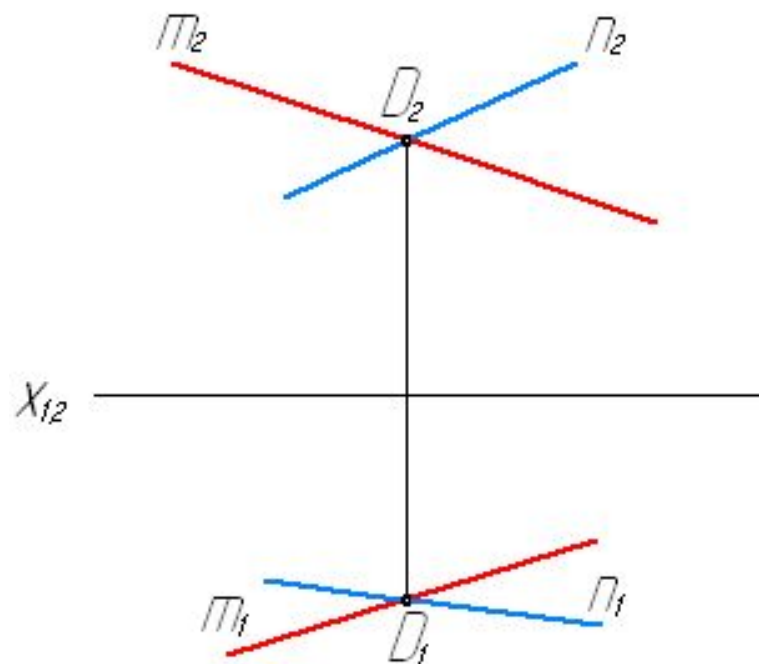
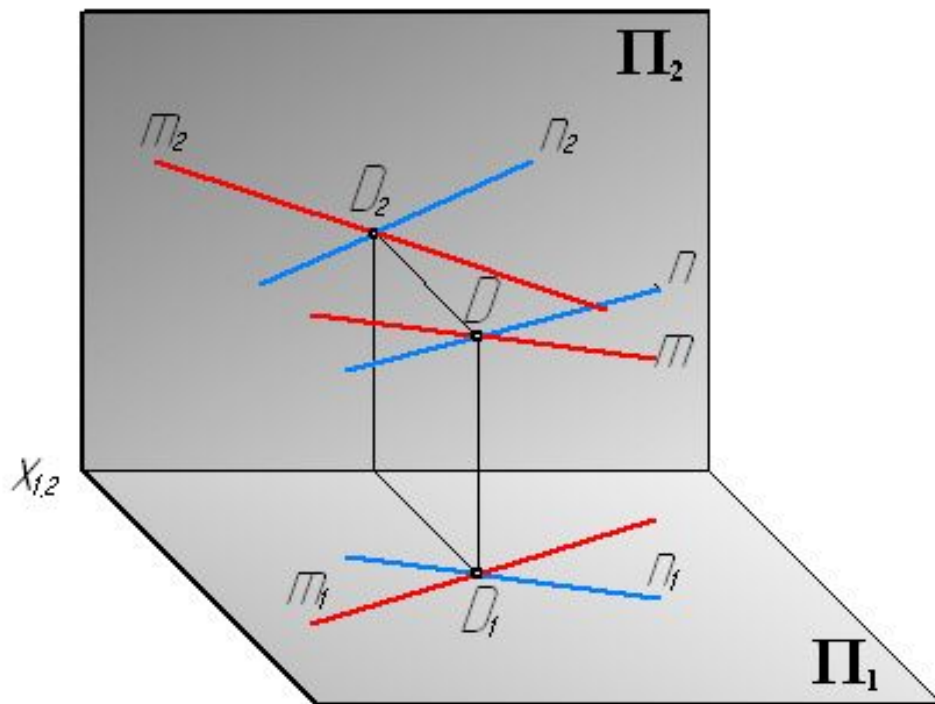
$$\Rightarrow m_2 - \text{точка} \wedge m_1 \perp x_{1,2}$$

$$\Rightarrow A_2B_2 - \text{точка} \wedge A_1B_1 \cong |AB|$$

Характерная особенность
эпюра проецирующей прямой –
одна из проекций прямой точка

Взаимное положение двух прямых

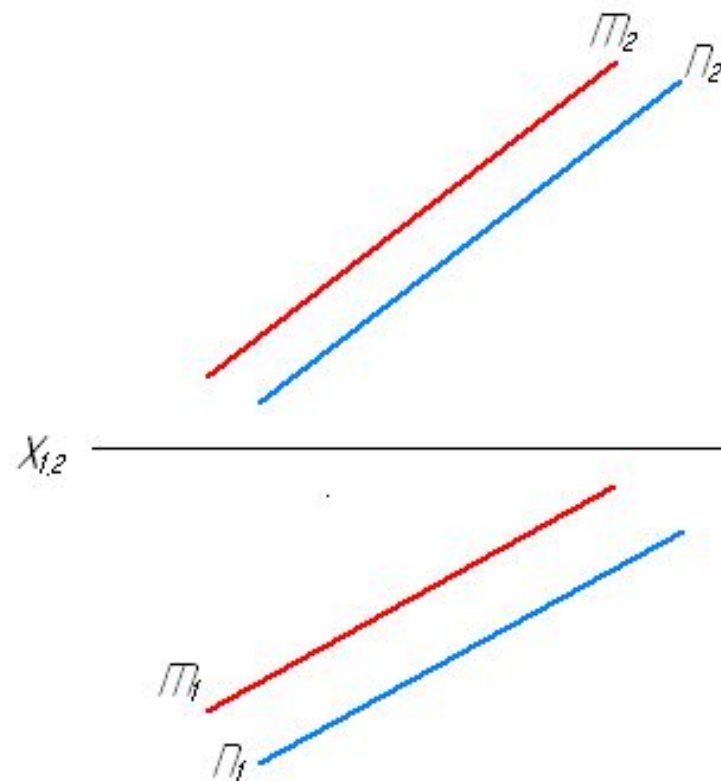
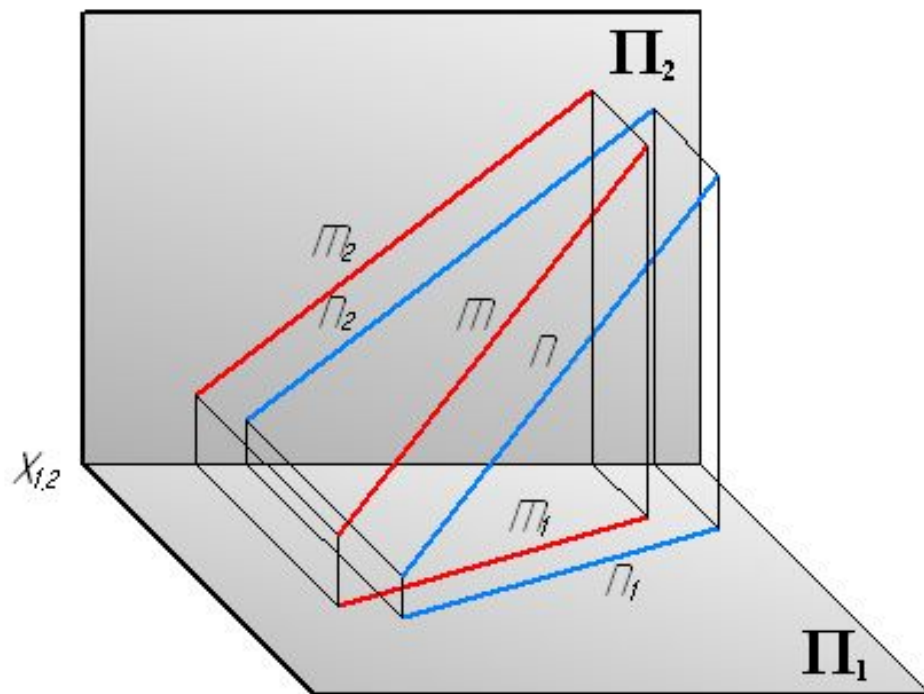
Пересекающиеся прямые



$$m \cap n = D \Rightarrow \\ \Rightarrow m_k \cap n_k = D_k$$

$$\begin{aligned} m_1 \cap n_1 &= D_1 \\ m_2 \cap n_2 &= D_2 \\ D_1 D_2 &\perp X_{1,2} \end{aligned}$$

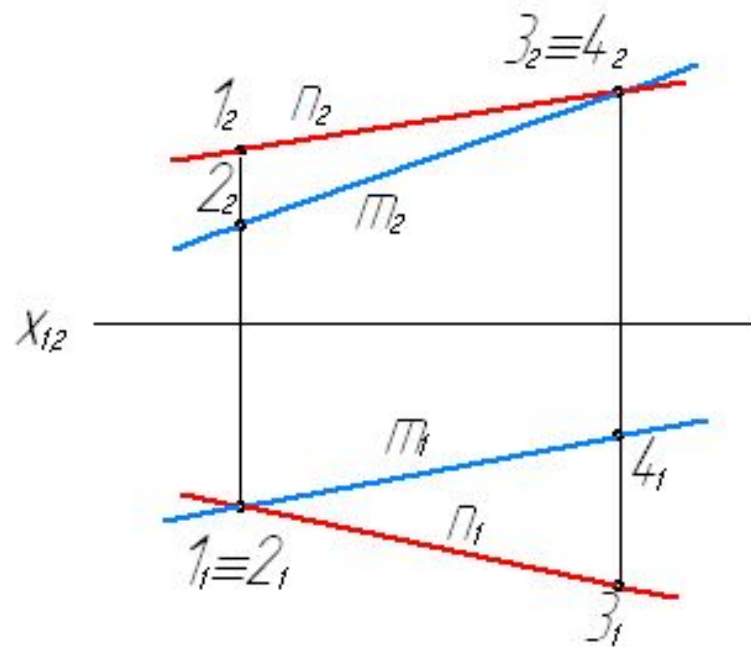
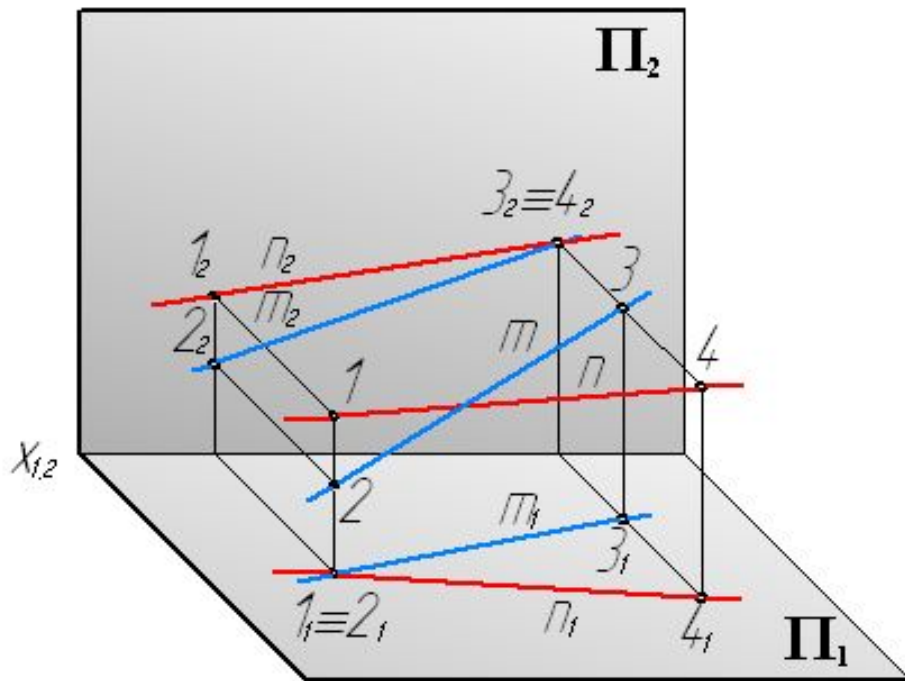
Параллельные прямые



$$m \parallel n \Rightarrow \\ \Rightarrow m_k \parallel n_k$$

$$m_1 \parallel n_1 \\ m_2 \parallel n_2$$

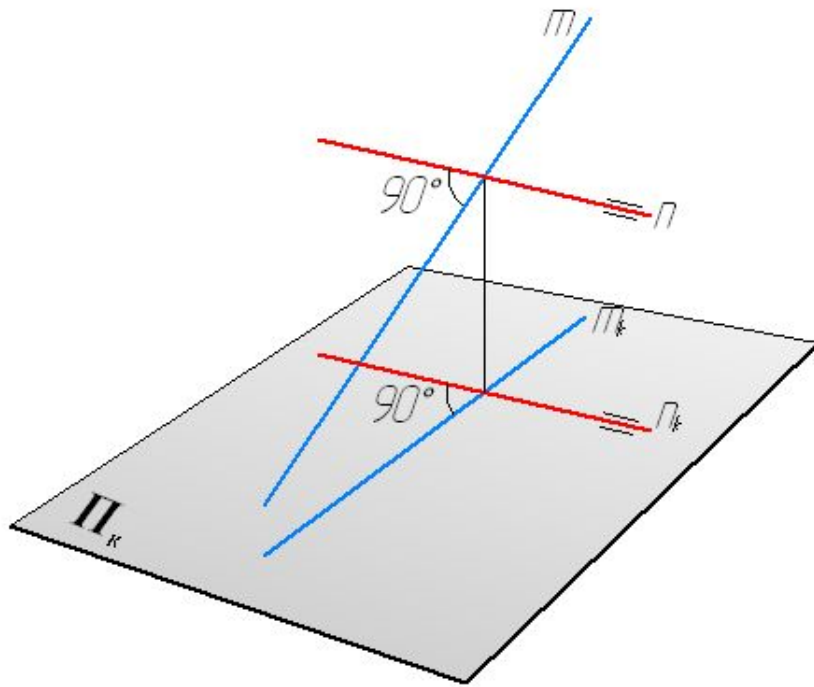
Скрещивающиеся прямые



$$m \perp n \Rightarrow m \nparallel n \wedge m \nsubseteq n$$

Пары точек (1-2) и (3-4) – конкурирующие точки

Взаимно перпендикулярные прямые



Если $m \perp n$,
 $m \cap n \in m$.

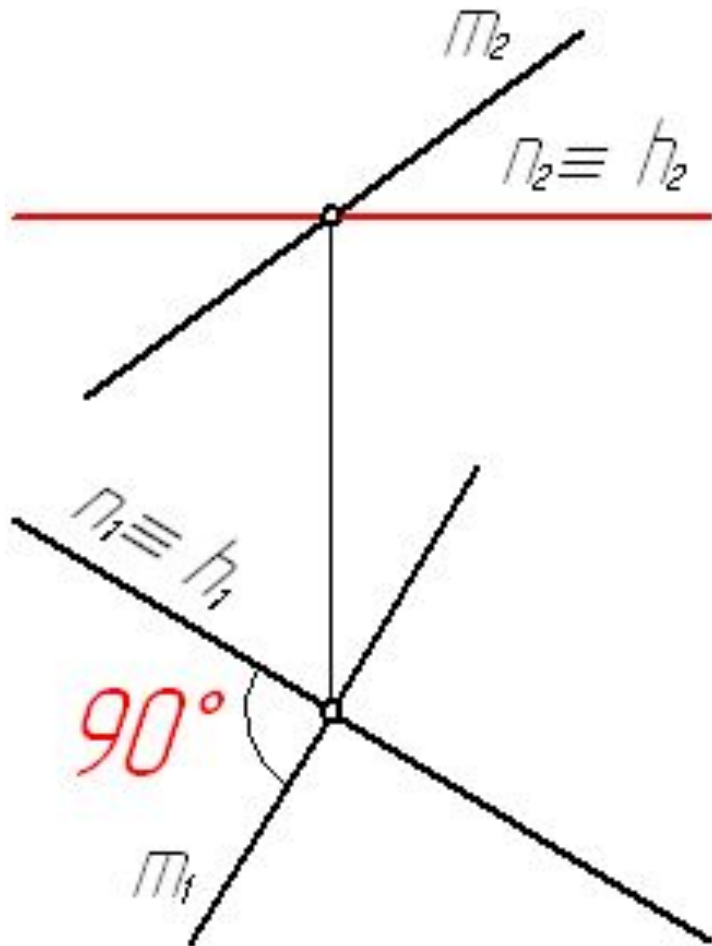
n ,

$n \parallel \Pi_K$,
 $m \perp \Pi_K$,

то

$m_K \perp n_K$

Пример. Заданы две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся прямые m и n . Прямая n параллельна горизонтальной плоскости проекций, прямая m – прямая общего положения. Построить эпюр этих прямых.



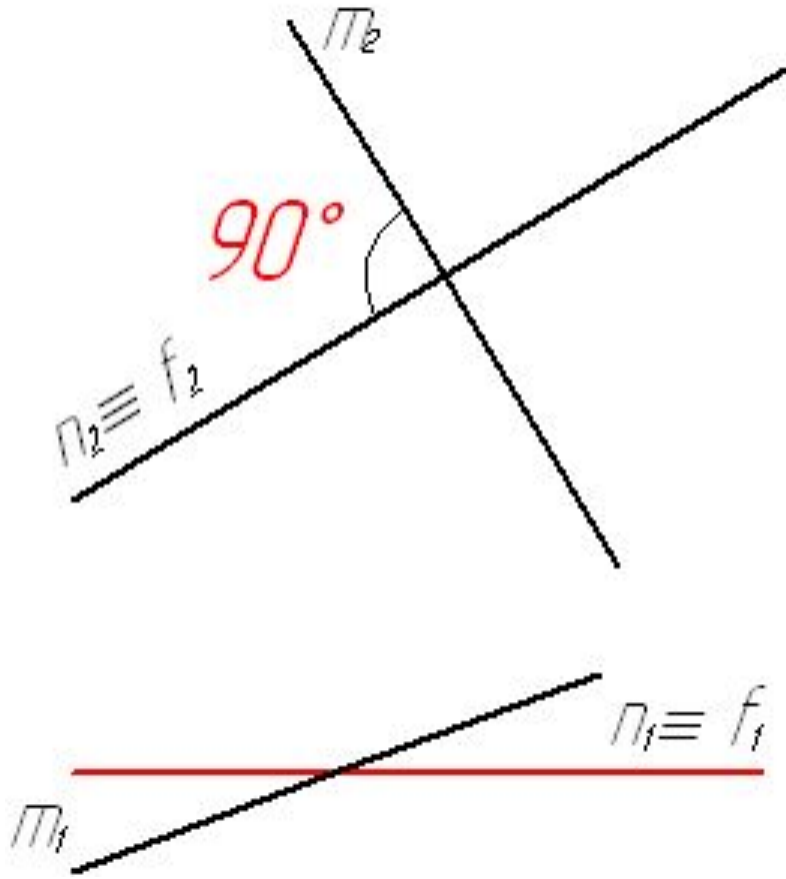
$$m \perp n \wedge m \cap n$$

$$n \parallel \Pi_1 \Rightarrow n \equiv h \text{ и } n_2 \parallel x_{1.2}$$

$$m \not\perp \Pi_1$$

$$\Rightarrow m_1 \perp n_1$$

Пример. Заданы две взаимно перпендикулярные и скрещивающиеся прямые m и n . Прямая n параллельна фронтальной плоскости проекций, прямая m – прямая общего положения. Построить эпюр этих прямых.



$$m \perp n \wedge m \cdot n$$

$$n \parallel \Pi_2 \Rightarrow n \equiv f \text{ и } n_1 \parallel X_{12}$$

$$m \perp \Pi_2$$

$$\Rightarrow m_2 \perp n_2$$